ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME LXIX — ANNÉE 1952

(88e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-EDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1952

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-NEUVIÈME — ANNÉE 1952

(88e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1952

Copyright by Gauthier-Villars, 1952.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONTRIBUTION
A
L'ÉTUDE THÉORIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES. ONDES DE CHOC [1]

PAR M. HENRI CABANNES

INTRODUCTION.

Les équations de la Mécanique des fluides ont été établies par Euler et Lagrange, et l'étude de la Mécanique des fluides prit de bonne heure un grand développement. Le cas d'un fluide dont la densité demeure constante a été particulièrement étudié. Il correspond à l'Hydraulique, et aussi à l'Aérodynamique des vitesses relativement faibles; aussi les premiers développements de l'Aérotechnique ont-ils pu s'appuyer sur des théories qui négligent la compres-

(1) Ce Mémoire, présenté le 7 février 1950 comme Thèse de Doctorat devant la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, fut rédigé à la fin de l'année 1949, et sur certains points paraîtra aujourd'hui un peu dépassé. Afin de remédier à cet inconvénient, j'ai indiqué au moment de l'impression les résultats que j'ai obtenus depuis, j'ai en particulier rédigé une brève Note additive à la suite du chapitre IV.

sibilité de l'air. Cette approximation cesse d'être valable pour les engins actuels, dont la vitesse atteint et même dépasse la célérité du son. Les premiers travaux sur les fluides compressibles datent du siècle dernier. Riemann étudia les mouvements non stationnaires à une dimension; il établit à cette occasion sa méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique. Rankine et Hugoniot envisagèrent la propagation des discontinuités dans les gaz et donnèrent pour la première fois les équations du choc. Molenbrock et Tchapliguine publièrent deux Mémoires célèbres sur les mouvements gazeux à deux dimensions, le premier en 1890, le second en 1904. A l'heure actuelle, l'étude de la Dynamique des gaz est indispensable si l'on désire résoudre théoriquement les problèmes que pose la technique. Plusieurs centaines de Mémoires lui ont déjà été consacrés; nous nous bornerons à indiquer dans la bibliographie ceux qui présentent un rapport direct avec le travail suivant. L'objet de ce travail est une étude des écoulements plans permanents continus transsoniques et des écoulements permanents comportant une onde de choc.

1. Le premier chapitre est consacré à l'étude des écoulements continus. Nous indiquons d'abord une famille de solutions exactes des équations de l'écoulement plan permanent d'un fluide parfait compressible. Ces solutions, très générales, dépendent d'une fonction et d'une double infinité de constantes arbitraires; elles contiennent, comme cas particuliers, les solutions étudiées par Tchapliguine, Tollmien et Ringleb. Dans les mouvements correspondants, la vitesse du fluide peut atteindre et dépasser la célérité du son sans subir de discontinuité.

Envisageant ensuite plus spécialement les vitesses voisines de la célérité du son, nous déterminons la loi de compressibilité à laquelle devrait obéir un fluide fictif pour que l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction de courant dans le plan de l'hodographe se réduise à la forme canonique étudiée par Tricomi. Nous construisons, pour un tel fluide, des écoulements correspondant à des solutions multivalentes de l'équation de Tricomi. Dans le diagramme pression-inverse de la densité, la loi de compressibilité précédente et la loi de compressibilité adiabatique sont osculatrices au point sonique. On peut admettre que, pour les vitesses voisines de la célérité du son, les résultats obtenus représentent les phénomènes réels avec une bonne approximation.

2. Nous envisageons, dans les chapitres suivants, les écoulements qui comportent une onde de choc. L'écoulement avant l'onde de choc étant irrotationnel, on sait que l'écoulement postérieur ne possède pas en général cette propriété. Dans le second chapitre, nous caractérisons les ondes de choc stationnaires le long desquelles chaque élément gazeux subit la même variation d'entropie; ainsi, lorsque l'écoulement initial est irrotationnel, l'écoulement

après le choc est un écoulement isentropique. Dans le cas des mouvements à deux dimensions, ce nouvel écoulement est encore irrotationnel. Nous prouvons, en particulier, que chacun des écoulements spiraliformes étudiés par Tollmien peut être engendré par choc dans un écoulement analogue.

3. Nous abordons ensuite le problème du mouvement permanent autour d'un obstacle d'un fluide parfait compressible animé à l'infini d'une vitesse supersonique. Lorsque le corps solide ne présente pas de pointe, ou bien lorsque la vitesse à l'infini est faiblement supersonique, la première des ondes de choc ou onde de tête est une onde de choc détachée. En aval d'une onde de choc détachée, se trouve une région subsonique. Nous présentons diverses solutions approchées de ce problème de l'onde choc détachée. Supposant d'abord connues la forme de l'onde et la vitesse du courant uniforme amont, nous établissons, en utilisant des développements limités, des équations qui déterminent la position et la forme de la surface de courant décomposée. La solution de ces équations, en considérant cette dernière surface comme donnée, permet de résoudre le problème posé. En appliquant cette méthode, nous avons établi des tables donnant la solution du problème de l'onde de choc détachée dans le cas général des écoulements à trois dimensions. Dans cet ordre d'idées, on pourrait traiter le problème de l'onde de choc détachée avec une approximation indéfinie, sous réserve de questions de convergence que nous avons laissées de côté. Nous avons envisagé un exemple (écoulement de révolution comportant une onde de choc détachée) en utilisant des constructions graphiques qui interprètent les équations intrinsèques du mouvement établies au début de notre travail.

Une autre méthode pour traiter le problème de l'onde de choc détachée, basée sur une représentation approchée du courant aval, est également appliquée. L'écoulement aval, étant subsonique sur l'axe de révolution ainsi qu'au voisinage de cet axe, est supposé irrotationnel et incompressible; il est alors déterminé, à certains paramètres arbitraires près, par la condition de contourner l'obstacle. Nous déterminons ensuite la position et la forme qu'il convient de donner à l'onde de choc, afin que l'écoulement engendré par le choc et l'écoulement aval précédent, coïncident avec la meilleure approximation possible.

4. Lorsque l'obstacle présente en son sommet un point singulier, l'onde de tête peut être attachée à la pointe. Nous avons étudié ce cas, lorsque l'écoulement est un écoulement plan symétrique. Quand la vitesse amont est légèrement supérieure à la vitesse pour laquelle se produit le phénomène d'attachement, l'écoulement aval comporte une région subsonique et présente au sommet de l'obstacle une singularité dont l'existence a été signalée par Crocco. Nous avons établi des formules qui lient les dérivées d'ordre quel-

conque de la courbure en un point de l'onde de choc et de la courbure de la ligne de courant issue de ce point. Suivant une idée de M. J. Fabri, nous avons prouvé que, dans le cas d'un obstacle terminé par un segment rectiligne, cette singularité subsiste aussi longtemps que la vitesse le long de la paroi rectiligne demeure subsonique; elle affecte les diverses dérivées de la courbure au sommet de l'onde de choc; pour des valeurs croissantes de la vitesse amont, l'ordre de la première de ces dérivées affectée par la singularité augmente; toutes les dérivées sont nulles lorsque la vitesse le long de la paroi rectiligne est sonique. Lorsque cette vitesse est supersonique, l'onde de choc comporte elle aussi un segment rectiligne à l'extrémité duquel la courbure subit une discontinuité que nous avons déterminée. Nos résultats complètent, de façon tout à fait indépendante, ceux qu'a obtenus M. T. Y. Thomas par des méthodes plus compliquées.

5. Dans le dernier chapitre, nous étudions les branches infinies de la première onde de choc. Nous avons admis que la forme prise par cette onde est telle que l'écoulement engendré tende, le plus rapidement possible, vers un écoulement uniforme. A partir de cette hypothèse, nous avons démontré que l'onde pouvait, à l'infini, être assimilée à une parabole.

Au terme de cette introduction, je tiens à témoigner ma reconnaissance envers M. le Professeur Joseph Pérès, pour les conseils et les encouragements qu'il m'a toujours prodigués, ainsi que pour les nombreuses suggestions dont je lui suis redevable. Je suis heureux de pouvoir aussi remercier M. le Professeur Jean Leray pour sa bienveillance et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail. Je remercie également MM. les Professeurs Henri Villat et Georges Valiron de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

PRÉLIMINAIRES.

Équations de la dynamique des gaz.

0.1. Équations du mouvement. — Le mouvement d'un fluide est déterminé lorsqu'on connaît la vitesse en chaque point et à chaque instant. Nous utiliserons les variables d'Euler. Les fonctions inconnues, au nombre de cinq, sont les trois composantes cartésiennes de la vitesse u, v, w, la densité ρ et la pression p. Les variables indépendantes sont les coordonnées cartésiennes x, y, z, et le temps. Nous étudierons seulement les mouvements stationnaires.

Équations cartésiennes du mouvement. — Les axes de coordonnées sont rectangulaires. Nous supposons que le fluide n'est soumis à aucune force extérieure,

et nous écrivons d'une part l'équation fondamentale de la Dynamique, d'autre part la conservation de la masse. On obtient ainsi

$$(0.1)\qquad \begin{cases} uu_x + vu_y + wu_z + p_x : \rho = 0, \\ uv_x + vv_y + wv_z + p_y : \rho = 0, \\ uw_x + vw_y + ww_z + p_z : \rho = 0; \end{cases}$$

$$(0.2)\qquad (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0.$$

Le symbole f_x désigne la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$. Nous faisons en outre l'hypothèse suivante : les divers éléments fluides n'échangent entre eux aucune quantité de chaleur; de plus, ils n'échangent aucune quantité de chaleur avec le milieu extérieur. Cette hypothèse est vérifiée de façon satisfaisante lorsque la conductibilité calorifique du fluide est faible, ce que nous supposerons. On dit que l'écoulement envisagé est un phénomène adiabatique, et l'on établit que, en l'absence de choc, l'entropie gazeuse S de chaque élément fluide demeure constante. Afin de simplifier l'exposé, nous nous limiterons au cas des gaz parfaits, mais certains des résultats obtenus sont valables dans des cas plus généraux; pour un gaz parfait, on a la relation suivante :

$$S = \frac{R^*}{(k-1)J} \operatorname{Log} \frac{p}{\rho^k} + S_0.$$

R^* est la constante des gaz parfaits, J l'équivalent mécanique de la calorie, k le rapport des chaleurs spécifiques du fluide; on convient de choisir la même valeur de la constante S_0 pour tous les éléments du gaz dont nous étudions le mouvement. Le mouvement étant stationnaire, le caractère adiabatique de l'écoulement se traduit par l'équation suivante :

$$(0.3)\qquad u\left(\frac{p}{\rho^k}\right)_x + v\left(\frac{p}{\rho^k}\right)_y + w\left(\frac{p}{\rho^k}\right)_z = 0.$$

Cette équation exprime que le produit $p\rho^{-k}$ et par conséquent l'entropie conservent une valeur constante sur chaque ligne de courant; lorsque cette valeur constante est la même pour toutes les lignes de courant, on dit que l'écoulement est isentropique. Dans un écoulement isentropique, le produit $p\rho^{-k}$ possède une valeur constante dans tout l'espace occupé par le fluide. Tous les écoulements que nous étudierons seront des phénomènes adiabatiques, mais tous ces écoulements ne seront pas isentropiques.

Dans le cas général, les équations (0, 1), (0.2) et (0.3) doivent permettre, à l'aide de conditions aux limites convenablement choisies, de déterminer les cinq fonctions inconnues. Elles admettent une intégrale première obtenue par Bernoulli. Sur chaque ligne de courant, la pression est fonction de la seule densité, et l'on peut écrire

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que le produit $p\rho^{-k}$ demeure constant sur chaque ligne de courant,

$$\frac{2k}{k-1}\frac{p}{\rho}+q^2=q_m^2, \qquad \text{avec} \quad \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}=q_m^2,$$

q_m étant la vitesse limite, tandis que p_0 et ρ_0 désignent les valeurs au repos de la densité et de la pression. On en déduit

$$\rho=\rho_0\left\{1-\frac{q^2}{q_m^2}\right\}^{\frac{1}{k-1}}, \tag{0.4}$$

$$p=p_0\left\{1-\frac{q^2}{q_m^2}\right\}^{\frac{k}{k-1}}. \tag{0.5}$$

Les équations (0.4) et (0.5) peuvent remplacer deux des équations du mouvement : l'équation (0.3) et l'une quelconque des équations (0.1). L'équation (0.2) doit être conservée, puisqu'elle ne fut pas utilisée pour former l'intégrale de Bernoulli.

A priori, les valeurs des constantes p_0 et ρ_0, donc aussi la valeur de q_m, dépendent de la ligne de courant envisagée. Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, l'intégrale de Bernoulli est valable pour un déplacement arbitraire, donc la vitesse limite possède une valeur constante dans tout espace occupé par le fluide; comme nous le verrons plus loin, l'entropie est alors constante dans tout le fluide, donc aussi p_0 et ρ_0. Nous étudierons dans la suite, non seulement les écoulements irrotationnels, mais ceux qui s'en déduisent par choc; dans de tels écoulements, q_m reste constant quelle que soit la ligne de courant, mais non p_0 et ρ_0. En résumé, dans tous les écoulements, isentropiques ou non, que nous étudierons, q_m est une constante dans tout le fluide.

Une grandeur fondamentale est la célérité du son. Les phénomènes sonores, constitués par des perturbations infiniment petites, se propagent à la vitesse

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}=\left\{\frac{k-1}{2}(q_m^2-q^2)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Suivant que la vitesse du fluide est inférieure, égale ou supérieure à la célérité du son, l'écoulement est subsonique, sonique ou supersonique. La vitesse q^* d'un écoulement sonique, appelée vitesse critique, a pour valeur

$$q^*=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,q_m.$$

Les valeurs correspondantes de la densité et de la pression, ρ^* et p^*, sont la densité critique et la pression critique.

Équations vectorielles du mouvement. — On peut donner aux équations du mouvement une forme vectorielle en introduisant le vecteur vitesse W :

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{2}\operatorname{grad} q^2 + \operatorname{rot} W \wedge W = 0, \qquad \operatorname{div}\rho W = 0.$$

Compte tenu des équations (0.4) et (0.5), dans lesquelles q_m possède une valeur constante, la première de ces deux équations s'écrit

$$\frac{p}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{Log} p_0 + \operatorname{rot} W \wedge W = 0.$$

Lorsque le tourbillon est partout nul, la pression au repos est une constante, donc le mouvement est isentropique. La réciproque n'est pas vraie. Dans un mouvement isentropique, le tourbillon et la vitesse sont colinéaires; dans le cas particulier d'un mouvement plan ou d'un mouvement de révolution, on en déduit que le tourbillon est nul. Par contre, dans l'espace, il existe des écoulements tourbillonnaires isentropiques. Ces écoulements sont déterminés par les équations

$$\operatorname{rot} W \wedge W = 0, \qquad \operatorname{div}(q_m^2 - q^2)^{\frac{1}{k-1}} W = 0.$$

On construit une solution élémentaire de ce système en prenant

$$u = u(z), \qquad v = v(z), \qquad w = 0.$$

La seconde équation est toujours vérifiée; la première exige que la grandeur de la vitesse soit constante.

D'une façon plus générale, il suffit, pour obtenir de tels écoulements, de résoudre l'équation vectorielle

$$\operatorname{rot} W = \lambda\rho W,$$

dans laquelle λ est une constante.

Équations intrinsèques du mouvement. — Nous écrirons les équations du mouvement en coordonnées intrinsèques, en nous plaçant d'abord dans le cas des écoulements de révolution. Nous envisageons un demi-plan méridien rapporté aux axes rectangulaires constitués par l'axe de révolution Ox et l'axe directement perpendiculaire Or; θ désignant l'angle de la vitesse avec Ox, nous posons $u = q\cos\theta$, $v = q\sin\theta$. Les trois équations cartésiennes (0.1) se réduisent aux deux suivantes :

$$(0.1') \qquad \begin{cases} uu_x + vu_r + p_x : \rho = 0, \\ uv_x + vv_r + p_r : \rho = 0. \end{cases}$$

Les équations (0.2) et (0.3) deviennent

$$(0.2') \qquad (r\rho u)_x + (r\rho v)_r = 0,$$

$$(0.3') \qquad u\left(\frac{p}{\rho^k}\right)_x + v\left(\frac{p}{\rho^k}\right)_r = 0.$$

Nous utiliserons encore l'intégrale de Bernoulli, en écrivant les équations (0.4) et (0.5), qui déterminent la densité et la pression en fonction de la vitesse. Il sera alors suffisant de conserver, parmi les quatre équations précédentes, une quelconque des deux équations (0.1′) et l'équation (0.2′).

Nous envisageons, dans un demi-plan méridien, le réseau des courbes formé par les lignes de courant et par les trajectoires orthogonales aux lignes de courant; s et n désignent l'abscisse curviligne comptée respectivement sur une ligne de courant et sur une des trajectoires orthogonales, les directions positives sur ces courbes étant choisies de telle sorte que leur angle soit égal à $+\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées intrinsèques sont liées par les relations différentielles suivantes :

$$(0.6)\qquad \begin{cases} ds = \quad dx\cos\theta + dr\sin\theta, \\ dn = -dx\sin\theta + dr\cos\theta. \end{cases}$$

Compte tenu des équations (0.4) et (0.5), nous effectuons le changement de variables dans l'une des équations (0.1′) et dans l'équation (0.2′); on obtient respectivement

$$(0.7)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial n} - \frac{p}{\rho q^2}\frac{d\,\mathrm{Log}\,p_0}{dn},$$

$$(0.8)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial n} = -\frac{1}{q}\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{\partial q}{\partial s} - \frac{\sin\theta}{r}.$$

Les symboles $\frac{\partial\theta}{\partial s}$, $\frac{\partial\theta}{\partial n}$, $\frac{\partial q}{\partial s}$, $\frac{\partial q}{\partial n}$, que nous notons comme des dérivées partielles, ne représentent pas en fait de véritables dérivées partielles, puisqu'on ne peut songer à repérer le plan avec des coordonnées s et n; ce sont des coefficients différentiels relatifs aux pseudo-variables ds et dn définies en chaque point du plan.

En faisant croître r au delà de toute limite, nous obtiendrons les équations du mouvement plan. On peut donner aux équations intrinsèques la forme suivante :

Mouvements de révolution :

$$(0.9)\qquad \begin{cases} \rho q^2\dfrac{\partial\theta}{\partial s} = -\dfrac{\partial p}{\partial n}, \\ \rho q^2\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial n} + \dfrac{\sin\theta}{r}\right) = \left(1-\dfrac{q^2}{a^2}\right)\dfrac{\partial p}{\partial s}. \end{cases}$$

Mouvements plans :

$$(0.10)\qquad \begin{cases} \rho q^2\dfrac{\partial\theta}{\partial s} = -\dfrac{\partial p}{\partial n}, \\ \rho q^2\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \left(1-\dfrac{q^2}{a^2}\right)\dfrac{\partial p}{\partial s}. \end{cases}$$

Dans chacun des deux cas, il convient de joindre aux deux équations écrites les relations (0.4) et (0.5).

Du moment que les symboles introduits ne représentent pas des dérivées partielles au sens propre, il conviendra de prendre les précautions nécessaires quand on dérivera ces équations. Si l'on désire conserver les coordonnées intrinsèques, on sera amené à introduire les coefficients différentiels $\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}$, $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)$, $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}$, relatifs aux différentielles du second ordre; nous les noterons encore comme des dérivées partielles. Il faut alors remarquer que les coefficients différentiels $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ ne sont pas égaux; en coordonnées intrinsèques, on doit tenir compte de l'ordre des dérivations. Envisageons en effet deux lignes de courant voisines et deux trajectoires orthogonales voisines;

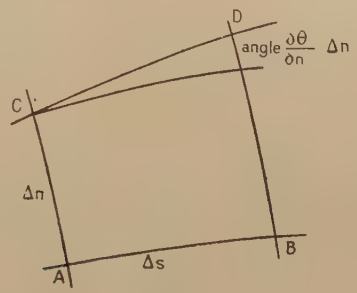


Fig. 1.

ces quatre courbes se coupent en quatre points A, B, C, D, en lesquels nous considérons les valeurs d'une certaine fonction f; $AB = \Delta s$, $AC = \Delta n$. Le segment BD a pour longueur $\Delta n + \Delta s\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\Delta n\right)$. D'une façon analogue,

$$CD = \Delta s\left(1 - \frac{\partial\theta}{\partial s}\Delta n\right).$$

La différence

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)$$

est égale à la valeur limite, lorsque Δs et Δn tendent simultanément vers zéro, de la quantité suivante :

$$\frac{\dfrac{f_D - f_C}{CD} - \dfrac{f_B - f_A}{AB}}{AC} - \frac{\dfrac{f_D - f_B}{BD} - \dfrac{f_C - f_A}{AC}}{AB}.$$

En remplaçant les divers segments par leur valeur, on obtient à la limite la relation cherchée :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\partial f}{\partial n}, \tag{0.11}$$

qui généralise le théorème de Schwartz relatif aux dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

Dans les équations du mouvement, interviennent les dérivées de la pression et de la vitesse; lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de courant, on peut écrire le théorème de Bernoulli $dp + \rho q\, dq = 0$; lorsqu'on se déplace le long d'une direction différente, on établit la relation plus générale

$$dp + \rho q\, dq = p\, d\,\mathrm{Log} p_0. \tag{0.12}$$

0.2. Équations du choc. — Les équations du mouvement établies dans le paragraphe précédent demeurent valables aussi longtemps que les fonctions inconnues restent continues. Or il est nécessaire d'envisager l'apparition de discontinuités dans le champ des vitesses du fluide. On dit que le fluide subit un choc en un point, lorsque la vitesse en ce point est discontinue; en un tel point, la densité, la pression et la température sont aussi discontinues. Le lieu des points en lesquels se produit ce phénomène forme une surface que l'on appelle onde de choc.

Les discontinuités qui apparaissent à la traversée d'une onde de choc ne peuvent être arbitraires. La masse et l'énergie totale de chaque élément fluide conservent une valeur constante; la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des percussions subies. Il en résulte des relations qui permettent de déterminer l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde de choc, lorsque l'état du fluide sur la face antérieure est connu ainsi que l'onde de choc elle-même. Ces relations portent le nom d'équations du choc. Nous désignons par w_n la composante de la vitesse normalement à l'onde de choc; par w_τ et w_ξ, les composantes suivant deux directions situées dans le plan tangent à l'onde de choc. Nous introduirons les indices 1 et 2: l'indice 1 est relatif à l'état du fluide avant le choc; l'indice 2, à l'état du fluide après le choc. Les équations du choc, au nombre de cinq, sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_1 w_{n_1} = \rho_2 w_{n_2},\\ &\rho_1 w_{n_1}^2 + p_1 = \rho_2 w_{n_2}^2 + p_2,\\ &\rho_1 w_{n_1} w_{\tau_1} = \rho_2 w_{n_2} w_{\tau_2},\\ &\rho_1 w_{n_1} w_{\xi_1} = \rho_2 w_{n_2} w_{\xi_2},\\ &\frac{2k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + w_{n_1}^2 + w_{\tau_1}^2 + w_{\xi_1}^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + w_{n_2}^2 + w_{\tau_2}^2 + w_{\xi_2}^2. \end{aligned}\right. \tag{0.13}$$

On en déduit l'égalité des composantes tangentielles de la vitesse: en outre, le rapport des densités et des pressions est fonction du seul rapport des composantes normales

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_{n_1} - \mu^2 w_{n_2}}{w_{n_2} - \mu^2 w_{n_1}}, \qquad \text{où} \quad \mu^2 = \frac{k-1}{k+1}.$$

On obtient aussi

$$w_{n_1} w_{n_2} = q^{*2} - \mu^2 (w_{\tau_1}^2 + w_{\xi_1}^2).$$

En vertu de la conservation de l'énergie, la vitesse critique possède la même valeur de part et d'autre de l'onde de choc; il en est de même de la vitesse maximum.

Cas d'un écoulement initial uniforme. — Un cas particulier est celui dans lequel le mouvement du fluide avant le choc est un écoulement uniforme de vitesse $\vec{q}_1$. Les composantes cartésiennes u, v, w de la vitesse après le choc s'expriment alors simplement à l'aide des paramètres directeurs de la normale à l'onde de choc : -1, σ_1, σ_2. L'axe des abscisses étant parallèle à la vitesse initiale, on calcule

$$(0.14)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= q_1(1-\mu^2)\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\frac{q^{*2}}{q_1},\\ v &= (q_1-u)\sigma_1,\\ w &= (q_1-u)\sigma_2,\\ \varrho &= \rho_1\frac{q_1^2}{q^{*2}(1+\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\mu^2 q_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)},\\ p &= p_1\frac{q_1^2\{1+\mu^4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\}-\mu^2 q^{*2}(1+\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{(q^{*2}-\mu^2 q_1^2)(1+\sigma_1^2+\sigma_2^2)}. \end{aligned}\right.$$

ϱ et p représentent ici la densité et la pression sur la face postérieure de l'onde de choc, que nous avions désignées par ϱ_2 et p_2 dans les formules (0.13) pour donner aux notations une forme symétrique.

Second principe de la Thermodynamique. — Aux équations précédentes, il convient de joindre une condition supplémentaire, imposée par le second principe de la Thermodynamique. En vertu de ce principe, l'entropie de chaque élément fluide peut seulement rester constante ou augmenter. Donc, à la traversée d'une onde de choc, la variation d'entropie est positive.

On déduit aisément de ce résultat les propositions suivantes : la vitesse avant le choc est supersonique; à la traversée de l'onde de choc, la densité et la pression augmentent, tandis que la vitesse diminue.

CHAPITRE I.

ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES CONTINUS.

1.1. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE SOLUTIONS EXACTES. — Lorsque le fluide est animé d'un mouvement plan isentropique, les coordonnées polaires de la vitesse sont déterminées par les deux équations (0.10). Nous introduisons les deux fonctions φ et ψ telles que

$$d\varphi = q\,ds, \qquad d\psi = \frac{\varrho q}{\rho_0}\,dn.$$

Elles représentent le potentiel des vitesses et la fonction de courant; elles sont liées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$(1.1)\qquad \begin{cases} q\,dx = \cos\theta\,d\varphi - \sin\theta\,\dfrac{\rho_0}{\rho}\,d\psi, \\ q\,dy = \sin\theta\,d\varphi + \cos\theta\,\dfrac{\rho_0}{\rho}\,d\psi. \end{cases}$$

Lorsque le déterminant fonctionnel des fonctions q et θ par rapport aux variables φ et ψ n'est pas nul, nous permutons, dans les équations du mouvement, le rôle des fonctions et des variables. On retrouve ainsi les équations du mouvement dans le plan de l'hodographe sous la forme indiquée par Tchapliguine [12] :

$$(1.2)\qquad \varphi'_\theta = \frac{\rho_0}{\rho}\psi'_q, \qquad \varphi'_q = -\frac{\rho_0}{\rho q}\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\psi'_\theta.$$

Un certain nombre de solutions exactes de ces équations ont été construites et étudiées par Tchapliguine [12], Taylor, Tollmien [17], Ringleb [19]. Dans ces solutions, la fonction de courant est le produit d'une fonction $\alpha(q)$ par une fonction $\beta(\theta)$, ou encore une somme de tels produits. La fonction $\beta(\theta)$ est nécessairement, soit une fonction linéaire, soit une fonction trigonométrique, soit une fonction exponentielle. Il est possible de satisfaire le système (1.2) d'une façon beaucoup plus générale, en prenant pour fonction de courant une série de la forme suivante :

$$\psi(q, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta^{(2r)}(\theta)\,\alpha_r(q).$$

La fonction $\beta(\theta)$, supposée indéfiniment dérivable, peut être choisie arbitrairement. Chaque terme de la série ne constitue pas une solution du système (1.2), mais la somme vérifie ce système, si les fonctions $\alpha_n(q)$ sont choisies de façon convenable. Elles doivent vérifier le système suivant, qui permet de les déterminer de proche en proche :

$$\alpha_{-1} \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{\rho}\alpha'_r\right) + \frac{1}{\rho q}\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\alpha_{r-1} = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

En désignant par α_0, $\frac{1}{\rho_0}$, $\bar{q}$, $\bar{\alpha}_r$ et $\frac{1}{\rho_r}$ des constantes arbitraires, on peut écrire

$$\alpha_r(q) = \alpha_r + \frac{1}{\rho_r}\int_{\bar{q}}^{q} \frac{\rho}{q}\,dq + \int_{\bar{q}}^{q} \frac{\rho}{q}\left\{\int_{\bar{q}}^{q}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\frac{q}{\rho}\,\alpha_{r-1}\,dq\right\}dq \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sous réserve de la convergence des séries obtenues, nous avons formé une famille de solutions comportant une fonction et une double infinité de

constantes arbitraires. On peut retrouver ainsi les solutions de Tchapliguine, Tollmien et Ringleb comme cas particuliers.

Lorsque la fonction $\beta(\theta)$ est une fonction impaire, l'écoulement admet un axe de symétrie, et la ligne de courant $\psi = 0$ comprend une partie rectiligne.

Si nous choisissons en outre les constantes arbitraires de sorte que toutes les fonctions $\alpha_r(q)$ s'annulent pour la même valeur de la vitesse, le reste de cette ligne de courant est constitué par une courbe sur laquelle la vitesse demeure constante; c'est une ligne de jet. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre, pour chaque valeur de r, $\alpha_r = 0$. Afin de préciser la forme de cette ligne de jet, nous écrirons son équation intrinsèque; comme q et ψ demeurent constants, on obtient, pour tout déplacement tangent à cette courbe,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\rho_0}{\rho}\psi'_q(q, \theta), \qquad \mathcal{R} = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{\rho_r}\frac{\rho}{q}\beta^{(2r)}(\theta).$$

Le rayon de courbure $\mathcal{R}$ est exprimé en fonction de l'angle θ que fait la courbe avec une direction fixe. Il est possible de choisir la fonction $\beta(\theta)$ pour que la ligne de jet soit une courbe donnée à l'avance. Si nous nous plaçons dans le cas où les coefficients $\frac{1}{\rho_r}$ sont nuls à partir d'un certain rang, la fonction $\beta(\theta)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

1.2. Détermination d'une loi de compressibilité transsonique. — Les solutions exactes que l'on a pu déterminer pour le système (1.2) présentent un intérêt essentiellement théorique. Les écoulements correspondants diffèrent des écoulements que l'on rencontre dans la pratique : écoulement autour d'un obstacle donné, écoulement dans une tuyère. Pour satisfaire aux conditions que pose la technique, on a été amené à remplacer ce système par un système plus simple, équivalant, soit à l'équation de Laplace, soit à une équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants du type hyperbolique. Dans ces deux cas, les écoulements obtenus sont entièrement subsoniques ou entièrement supersoniques. Si l'on désire construire des écoulements dans lesquels la vitesse du fluide puisse atteindre et dépasser la célérité du son, il est nécessaire de remplacer le système (1.2), non par une équation de type elliptique ou hyperbolique, mais par une équation de type mixte. La plus simple de ces équations est l'équation qui se présente sous la forme canonique étudiée par Tricomi [14]. Plusieurs auteurs ont ramené l'étude des écoulements transsoniques à l'étude d'une équation de Tricomi, en effectuant des approximations sur les coefficients des diverses équations aux dérivées partielles que l'on rencontre. La justification de cette méthode exige la continuité des solutions par rapport aux coefficients. On peut présenter cette étude d'une façon différente. Nous allons chercher à déterminer une loi de compressibilité telle que,

pour un fluide obéissant à cette loi, le système (1.2) soit équivalent à l'équation de Tricomi.

Si nous permutons le rôle des fonctions et des variables, les équations (1.2) prennent la forme suivante :

$$\frac{\rho q}{\rho^*}\frac{\partial\theta}{\partial\psi}+\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{\partial q}{\partial\varphi}=0, \qquad q\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}-\frac{\rho}{\rho^*}\frac{\partial q}{\partial\psi}=0.$$

Nous avons écrit ρ^*, densité critique, au lieu de ρ_0, densité au repos; cela revient à multiplier la fonction de courant par un facteur constant; au voisinage de la célérité du son, il est plus commode de rapporter les diverses grandeurs à leur valeur critique. En introduisant les deux nouvelles fonctions

$$u=\int_{q^*}^{q}\frac{\rho}{\rho^*}\frac{dq}{q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}(u)=-\frac{\rho^{*2}}{\rho^2}\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right),$$

les équations prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\psi}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\psi}-\mathrm{A}(u)\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0.$$

La fonction $\mathrm{A}(u)$ est déterminée par la loi de compressibilité, et réciproquement la donnée de la fonction $\mathrm{A}(u)$ établit une relation entre la densité et la pression, c'est-à-dire détermine la loi de compressibilité. Lorsque le fluide obéit à la loi adiabatique, on peut écrire le développement en série de la fonction $\mathrm{A}(u)$ au voisinage de la valeur $u=0$:

$$\mathrm{A}(u)=(k+1)u+\ldots.$$

Nous convenons désormais de négliger au second membre les termes non écrits; cela revient à envisager un fluide fictif qui obéira à la loi de compressibilité définie par cette convention. Il est normal d'admettre que le comportement de ce fluide, pour les vitesses voisines de la célérité du son, indique, en première approximation, les phénomènes que l'on doit observer dans les écoulements gazeux réels. Nous faisons ici une nouvelle hypothèse de continuité : nous admettons qu'une légère variation dans la loi de compressibilité entraîne une variation faible pour la solution des équations du mouvement.

Loi de compressibilité. — A partir des relations qui définissent les quantités u et $\mathrm{A}(u)$, on peut écrire, quelle que soit la fonction $\mathrm{A}(u)$,

$$(1.3) \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{q^*}{q}\right)=-\frac{\rho^*q^*}{\rho q}, \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\rho^*q^*}{\rho q}\right)=\mathrm{A}(u)\frac{q^*}{q}.$$

La fonction $\frac{q^*}{q}$ de la variable u est donc la solution de l'équation différentielle

$$\alpha''(u) + A(u)\,\alpha(u) = 0,$$

telle que

$$\alpha(0) = 1, \qquad \alpha'(0) = -1.$$

On calcule ensuite la pression à l'aide de la relation de Bernoulli. On obtient ainsi

$$(1.4) \qquad \frac{q^*}{q} = \alpha(u), \qquad \frac{\rho^*}{\rho} = -\frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)}, \qquad \frac{p}{p^*} = 1 - k\int_0^u \frac{du}{\alpha^2(u)}.$$

Ces dernières formules définissent parfaitement la loi de compressibilité.

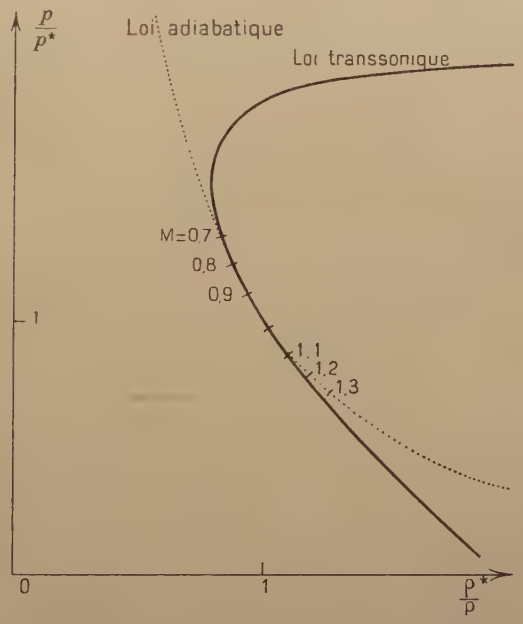


Fig. 2. — Loi de compressibilité transsonique.

En adoptant la valeur $A(u) = (k+1)u$, on obtient

$$(1.5) \qquad \alpha(u) = \frac{(k+1)^{\frac{1}{6}}\sqrt{u}}{3^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)!}\,J_{-\frac{1}{3}}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{k+1}\,u^{\frac{3}{2}}\right\} + \frac{(k+1)^{-\frac{1}{6}}\sqrt{u}}{3^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)!}\,J_{\frac{1}{3}}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{k+1}\,u^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

La fonction $\alpha(u)$ s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel d'indice $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

La relation entre la densité et la pression est représentée sur la figure 2. Sur la figure, cette relation, que nous appellerons loi de compressibilité transsonique,

est comparée à la loi adiabatique. Au voisinage de la valeur $u=0$, les formules (1.4) et (1.5) nous permettent d'écrire

$$\frac{p}{p^*}=1-k\left(\frac{\rho^*}{\rho}-1\right)+\frac{k(k+1)}{2!}\left(\frac{\rho^*}{\rho}-1\right)^2+\dots.$$

Il en résulte que, dans le diagramme $\left(p,\frac{1}{\rho}\right)$, les courbes qui représentent la loi de compressibilité adiabatique et la loi de compressibilité transsonique sont osculatrices au point sonique. Par conséquent, si nous adoptons désormais cette dernière loi, les phénomènes réels seront représentés avec une bonne approximation au voisinage de la célérité du son.

1.3. Étude des écoulements gazeux au voisinage de la célérité du son. — La nouvelle loi de compressibilité est particulièrement commode pour étudier les écoulements gazeux dans les tuyères. Pour de tels écoulements, la fonction de courant n'est pas une fonction uniforme des variables hodographiques; à chaque couple de valeurs de q et θ, correspond une ou trois valeurs réelles de ψ. Il est donc intéressant de former, pour l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction de courant, des solutions exactes multivalentes. Dans le cas d'une compression adiabatique, on ne connaît pas, à l'heure actuelle, de telles solutions; mais il est possible d'en obtenir en adoptant, pour le fluide, la loi de compressibilité transsonique définie précédemment. En effet, les équations du mouvement ont la forme simple suivante :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=\frac{\partial q_1}{\partial\psi_1},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial\psi_1}=q_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi}, \tag{1.6}$$

où $\psi_1=\tau\psi$ et $q_1=\tau u$, avec $\tau^3=k+1$. Revenant à la forme initiale dans laquelle le potentiel des vitesses et la fonction de courant jouent le rôle de fonctions inconnues, nous formons la nouvelle équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction de courant

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial q_1^2}-q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}=0. \tag{1.7}$$

Cette équation est équivalente au système (1.6), tant que le déterminant fonctionnel des fonctions φ et ψ_1 par rapport aux variables q et θ reste différent de zéro; elle a été étudiée par Tricomi [14]. A toute solution particulière, correspond un mouvement possible pour le fluide.

Nous nous proposons de former des solutions particulières pour lesquelles la fonction ψ_1 admette plusieurs déterminations. Dans ce but, nous cherchons à vérifier le système (1.6) à l'aide d'une série

$$q_1=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_1^n a_n(\varphi).$$

Les fonctions $a_n(\varphi)$ doivent satisfaire une suite infinie d'équations différentielles

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} = \frac{d^2}{d\varphi^2}\sum_{r=0}^{n}\frac{a_r a_{n-r}}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La valeur correspondante de la fonction $\theta(\psi_1, \varphi)$ est la suivante :

$$\theta = \int a_1\,d\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\psi_1\frac{a_0^2}{2} + \frac{\psi_1^2}{2}a_0 a_1 + \ldots\right\}.$$

La solution ainsi formée comporte deux fonctions arbitraires : $a_0(\varphi)$ et $a_1(\varphi)$. Ces fonctions sont supposées indéfiniment dérivables; en outre, nous nous plaçons dans le cas où les séries envisagées sont convergentes. Considérons, pour fixer les idées, un cas particulier simple : $a_0 = \varphi$, $a_1 = 0$. On obtient

$$q_1 = \varphi + \frac{\psi_1^2}{2}, \qquad \theta = \psi_1\varphi + \frac{\psi_1^3}{6}.$$

L'élimination du potentiel des vitesses permet d'expliciter la fonction de courant

$$\psi_1^3 - 3\,q_1\psi_1 + 3\,\theta = 0. \tag{1.8}$$

Il est aisé de vérifier que cette fonction est bien une solution pour l'équation de Tricomi. Elle possède trois déterminations réelles lorsque la quantité $4\,q_1^3 - 9\,\theta^2$ est positive, et une seule détermination réelle lorsque cette même quantité est négative. Dans le plan de coordonnées rectangulaires (θ, q_1), l'équation (1.8) représente les droites tangentes à la cubique $4\,q_1^3 - 9\,\theta^2 = 0$. Cette cubique partage le plan en deux régions; par les points de l'une de ces régions, on peut mener une seule tangente à la courbe; par les points de l'autre région, on peut mener trois tangentes.

Seconde méthode. — Une autre méthode permet d'obtenir, pour l'équation de Tricomi, des solutions multivalentes. La fonction $\psi_1(q_1, \theta)$ vérifiant l'équation (1.7), ses dérivées partielles λ et μ par rapport aux variables θ et q_1 vérifient le système

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q_1} = \frac{\partial\mu}{\partial\theta}, \qquad q_1\frac{\partial\lambda}{\partial\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial q_1}.$$

Intervertissant encore le rôle des fonctions et des variables, nous obtenons le nouveau système

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mu} = \frac{\partial q_1}{\partial\lambda}, \qquad q_1\frac{\partial q_1}{\partial\mu} = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}, \qquad d\psi_1 = \lambda\,d\theta + \mu\,dq_1.$$

Ce système est équivalent à l'équation de Tricomi. Il diffère du système (1.6) par le choix des variables. Dans le système (1.6), les variables sont constituées par la fonction ψ_1 et une seconde fonction convenablement associée; dans le

cas présent, les variables sont les dérivées partielles de la fonction inconnue. Nous construisons d'une façon analogue des solutions dépendant de deux fonctions arbitraires. La plus simple est la suivante :

$$q_1 = \mu + \frac{\lambda^2}{2}, \qquad \theta = \lambda\mu + \frac{\lambda^3}{6}, \qquad \psi_1 = \frac{\mu^2}{2} + \mu\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{8}.$$

La surface représentée a pour équation implicite

$$\psi_1^3 + \mathrm{P}(q_1, \theta)\,\psi_1 + \mathrm{Q}(q_1, \theta) = 0,$$

avec

$$16\,\mathrm{P} = -3\,q_1(q_1^2 + 18\,\theta^2) \quad \text{et} \quad 64\,\mathrm{Q} = -2\,q_1^6 + 90\,q_1^2\theta^2 + 81\,\theta^4.$$

La fonction $\psi_1(q_1, \theta)$ possède encore une ou trois déterminations réelles, suivant que la quantité $4\,q_1^3 - 9\theta^2$ est négative ou positive. La courbe d'équation $4q_1^3 - 9\theta^2 = 0$ constitue une arête de rebroussement sur la surface $\psi_1 = \psi_1(q_1, \theta)$.

Dans les deux exemples indiqués, la courbe qui sépare les régions dans lesquelles la fonction ψ_1 possède une ou trois déterminations réelles est une caractéristique pour l'équation de Tricomi. Ce résultat est général; si la surface solution d'une équation aux dérivées partielles possède une arête de rebroussement, cette ligne est une caractéristique pour l'équation proposée, car, sur l'arête de rebroussement, la donnée du plan tangent ne détermine pas la surface de façon unique.

Écoulement dans une tuyère. — Nous nous proposons de construire l'écoulement défini par la solution élémentaire

$$q_1 = \varphi + \frac{\psi_1^2}{2}, \qquad \theta = \psi_1\varphi + \frac{\psi_1^3}{6}.$$

Cet écoulement étant intéressant pour les nombres de Mach voisins de l'unité, nous construisons en premier lieu la ligne sonique. La correspondance entre le plan de l'hodographe et le plan de l'écoulement est la suivante :

$$\frac{dx}{\mathrm{L}} = \frac{q^*}{q}\left\{\cos\theta\,d\varphi - \frac{\rho^*}{\rho}\sin\theta\,d\psi\right\}, \qquad \frac{dy}{\mathrm{L}} = \frac{q^*}{q}\left\{\sin\theta\,d\varphi + \frac{\rho^*}{\rho}\cos\theta\,d\psi\right\}.$$

Elle permet de déterminer les équations paramétriques de la ligne sonique :

$$\frac{dx}{\mathrm{L}} = \left\{-\psi_1\cos\frac{\psi_1^3}{3} + \frac{1}{\tau}\sin\frac{\psi_1^3}{3}\right\}d\psi_1, \qquad \frac{dy}{\mathrm{L}} = \left\{\psi_1\sin\frac{\psi_1^3}{3} + \frac{1}{\tau}\cos\frac{\psi_1^3}{3}\right\}d\psi_1.$$

L est un paramètre arbitraire ayant les dimensions d'une longueur. Nous construisons ensuite les lignes de courant $\psi_1 = \text{const}$. Sur ces lignes, l'abscisse curviligne s et l'angle θ que fait la tangente avec l'axe des abscisses s'expriment en fonction du paramètre q_1 par les relations suivantes :

$$\frac{s}{\mathrm{L}} = \tau\int_0^u \alpha(u)\,du,$$

$$\theta = q_1\psi_1 - \frac{\psi_1^3}{3}.$$

La première relation est indépendante de la ligne de courant envisagée. Sur une ligne de courant donnée, les variations de θ et de q_1 sont proportionnelles. On peut énoncer les deux théorèmes suivants :

1. *Les courbes d'égale vitesse découpent sur les diverses lignes de courant des arcs égaux.*

2. *Le rayon de courbure d'une ligne de courant a pour valeur*

$$\mathcal{R} = \frac{f(s)}{\psi_1},$$

la fonction $f(s)$ ne dépendant pas du paramètre ψ_1.

Il est intéressant d'étudier la variation de l'angle θ sur les lignes d'égale

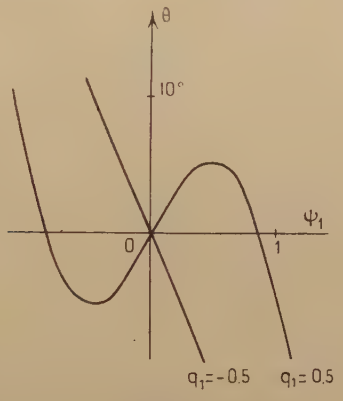


Fig. 3.

vitesse. Dans le domaine subsonique, cette variation est monotone; dans le domaine supersonique, il peut exister trois points en lesquels θ possède la même valeur. Le réseau des courbes

$$\theta = q_1\psi_1 - \frac{\psi_1^3}{3}$$

est indiqué sur la figure 3.

Lorsque q_1 est positif (domaine supersonique), il peut exister trois points ayant même vecteur-vitesse; il suffit que θ soit compris entre les extremums de la courbe correspondante. Ces extremums, atteints pour $\psi_1 = \pm\sqrt{q_1}$, ont pour valeur $\theta = \pm\frac{2}{3}q_1^{\frac{3}{2}}$. Le lieu des points correspondants dans le plan de l'écoulement s'appelle la ligne de branchement; si l'on convient d'uniformiser la fonction de courant dans le plan de l'hodographe, les divers feuillets de la surface de Riemann introduite se raccordent le long de cette ligne. Les équations paramétriques de la ligne de branchement sont définies par les relations

$$\frac{dx}{L} = \frac{1}{2\sqrt{q_1}}\,d\left(\frac{q^*}{q}\sin\theta\right), \qquad \frac{dy}{L} = \frac{1}{2\sqrt{q_1}}\,d\left(\frac{q^*}{q}\cos\theta\right).$$

Sur deux lignes voisines de la ligne sonique, par exemple les lignes d'égale vitesse sur lesquelles le nombre de Mach a pour valeur 0,8 et 1,2, l'état du fluide est connu. Dans la région supersonique, on peut poursuivre la détermination de l'écoulement par la méthode des caractéristiques, en adoptant la loi de compressibilité adiabatique. Dans la région subsonique, on peut aussi déterminer l'écoulement au voisinage de la ligne $M = 0,8$; cependant la fonction de courant que l'on détermine ainsi doit satisfaire, sur une courbe, à des données de Cauchy, et vérifier une équation de type elliptique. Les conditions aux limites étant surabondantes, on doit s'attendre, dès que l'on quittera le voisinage de la ligne $M = 0,8$, à rencontrer des singularités dans la solution. Pour

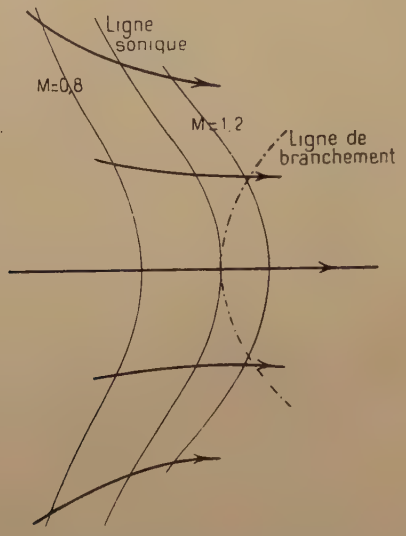


Fig. 4. — Écoulement transsonique dans une tuyère.

les nombres de Mach compris entre 0,8 et 1,2, l écoulement est représenté sur la figure 4.

Généralisation. — Le succès de la méthode utilisée pour obtenir des solutions multivalentes de l'équation de Tricomi est dû à la forme simple de cette équation. Or la fonction de courant $\psi(u, \theta)$ doit satisfaire l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - A(u) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{1.9}$$

La fonction $A(u)$ a été explicitée au début de ce chapitre. Dans le cas d'une compression adiabatique, la courbe représentative offre l'aspect d'une hyperbole; les asymptotes sont les droites

$$A = A_m = -0,4019, \qquad u = u_M = 0,4046.$$

L'adoption de la loi de compressibilité transsonique revenait à confondre à l'origine, la courbe et sa tangente. Il est préférable de remplacer la fonction $A(u)$ par une fonction homographique

$$A^*(u) = (k+1)\frac{u}{1-\lambda u}.$$

Les deux courbes représentatives sont tangentes à l'origine et, en outre, possèdent la même allure générale. On dispose du paramètre λ pour faire coïncider l'une des asymptotes de l'hyperbole avec l'une ou l'autre des asymptotes de la courbe $A(u)$.

1° Si l'on désire une loi qui soit bonne pour les vitesses subsoniques, on prendra

$$\lambda = -\frac{k+1}{A_m} = 5{,}97.$$

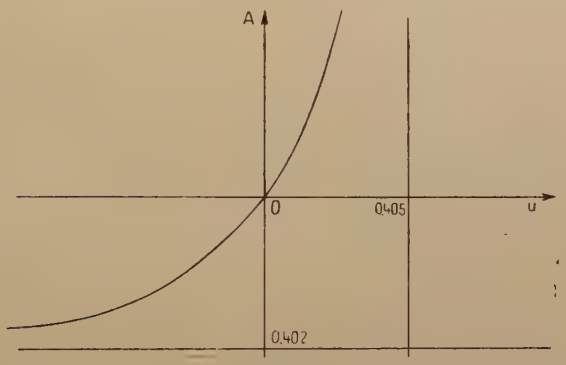


Fig. 5.

2° Si l'on désire une loi satisfaisante pour les vitesses supersoniques, on adoptera

$$\lambda = \frac{1}{u_M} = 2{,}47.$$

Dans les deux cas, les phénomènes critiques seront représentés avec une approximation convenable.

Le problème qui se pose est celui de la formation de solutions multivalentes pour l'équation (1.9). La méthode utilisée dans le cas de l'équation de Tricomi étant en défaut, nous aborderons cette question par une méthode différente. Les solutions explicitées au cours des paragraphes précédents sont de la forme

$$\psi^3 + Y(u, \theta)\psi + X(u, \theta) = 0. \tag{1.10}$$

Il est naturel de chercher si, à l'aide de fonctions $\psi(u, \theta)$ ainsi définies, il est possible de vérifier l'équation (1.9).

La réponse est affirmative. En dérivant, on obtient en effet

$$(3\psi^2+Y)^3\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}=(3\psi^2-Y)\left\{3X\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2}-2\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}Y\right\}$$
$$+\psi\left\{9X\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}-6\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2-4Y^2\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2}+2Y\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\right\}.$$

On obtient un résultat analogue avec la seconde variable. Ainsi, pour que la fonction $\psi(u,\theta)$, définie implicitement par l'équation (1.10), vérifie l'équation (1.9), il suffit que les deux fonctions $X(u,\theta)$ et $Y(u,\theta)$ vérifient le système suivant :

$$(1.11)\quad\begin{cases}9X\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}-6\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\right)^2-4Y^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial u^2}+2Y\left(\dfrac{\partial Y}{\partial u}\right)^2\\ \quad -A(u)\left\{9X\dfrac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}-6\left(\dfrac{\partial X}{\partial\theta}\right)^2-4Y^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+2Y\left(\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)^2\right\}=0,\\ 3X\dfrac{\partial^2 Y}{\partial u^2}-2\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial Y}{\partial u}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}Y-A(u)\left\{3X\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}-2\dfrac{\partial X}{\partial\theta}\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}Y\right\}=0.\end{cases}$$

C'est un système de deux équations aux dérivées partielles, comportant deux fonctions inconnues. A toute solution particulière de ce système, correspondra une solution particulière de l'équation (1.9). Cette solution sera une fonction multivalente des variables u et θ, si les fonctions X et Y sont des fonctions uniformes.

La méthode peut encore être généralisée. Si nous définissons une fonction $\psi(u,\theta)$ par l'équation

$$\psi^n+X_1(u,\theta)\psi^{n-1}+\ldots+X_n(u,\theta)=0,$$

les dérivées partielles de la fonction ψ s'expriment sous la forme $\frac{P}{Q}$ dans laquelle P et Q désignent deux polynômes en ψ de degré $n-1$; le polynôme Q est le même pour toutes les dérivées que l'on peut envisager. Il suffira donc, pour que la fonction ψ ainsi définie satisfasse l'équation (1.9), que les n fonctions inconnues $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satisfassent un système de n équations aux dérivées partielles obtenues en annulant dans cette équation les coefficients des diverses puissances de ψ, après que les dérivées secondes auront été remplacées par leurs expressions $\frac{P}{Q}$. L'équation (1.9) peut être remplacée par l'équation plus générale

$$a\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+2b\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial\theta}+c\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+d\frac{\partial\psi}{\partial u}+e\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\Pi(\psi,u,\theta).$$

$a, b, c, \ldots$ sont des fonctions des seules variables u et θ, tandis que le second membre est un polynôme en ψ (1).

(1) Une solution multivalente a été obtenue par P. Germain lorsque $A(u)=-u:(1+u)$. La solution de Germain est la suivante : $\psi=\theta+(1+u)\operatorname{tg}\psi$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1811-1813).

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES ONDES DE CHOC CONSERVANT L'EXISTENCE D'UN POTENTIEL DES VITESSES.

Nous avons étudié, au cours du chapitre précédent, les propriétés des écoulements transsoniques pour lesquels le champ des vitesses ne subit pas de discontinuité. Cependant l'existence de points de rebroussement sur certaines trajectoires des molécules fluides ne permet pas leur réalisation. Dans des cas analogues, l'expérience indique que des phénomènes de choc apparaissent dans le fluide. Comme nous l'avons déjà signalé, la vitesse avant un choc est toujours supersonique; la vitesse postérieure peut être soit subsonique, soit supersonique.

Dans un choc, l'entropie subit une discontinuité, et, en vertu du second principe de la Thermodynamique, la variation d'entropie est positive. Lorsque l'écoulement avant le choc est isentropique, l'écoulement postérieur ne possède pas cette propriété, à moins que l'on ne se trouve dans le cas particulier pour lequel tous les éléments fluides subissent la même variation d'entropie. Il en est ainsi lorsque la position de l'onde de choc satisfait à certaines conditions que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous dirons dans ce cas que nous nous trouvons en présence d'un écoulement isentropique discontinu.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES. — Lorsqu'un courant rectiligne uniforme de vitesse supersonique subit un choc suivant une onde plane, l'écoulement postérieur est encore un courant rectiligne uniforme. Nous trouvons ainsi un premier exemple d'écoulement isentropique discontinu. Dans le cas d'un courant initial uniforme, seule une onde de choc plane transforme cet écoulement en un écoulement isentropique. Dans le cas général d'un écoulement isentropique discontinu, l'onde de choc est déterminée par la condition que la variation d'entropie ΔS ait la même valeur positive en tous les points de discontinuité. Pour un gaz parfait, nous avons rappelé la relation

$$S = \frac{R^*}{(k-1)J} \operatorname{Log} \frac{p}{\rho^k} + S_0.$$

Il en résulte que la variation d'entropie ΔS dépend seulement du rapport $\frac{p_2}{p_1}$ des pressions après et avant le choc, ainsi que du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ des densités. En vertu des équations du choc, ces deux rapports sont fonction eux-mêmes du seul quotient des vitesses normales. En conséquence, le caractère isentropique d'un écoulement se trouvera conservé à la traversée d'une onde de choc, si le rap-

port des vitesses normales après et avant le choc conserve la même valeur en tous les points de cette onde. Il est commode de transformer ce résultat, afin de donner une condition dans laquelle intervienne seulement l'état initial du fluide. Nous avons écrit dans les préliminaires la relation

$$w_{n_1} w_{n_2} = q^{*2} - \mu^2 (w_{t_1}^2 + w_{\tau_1}^2).$$

Nous en déduisons, en écrivant que le rapport des vitesses normales $\frac{w_{n_2}}{w_{n_1}}$ possède la valeur constante λ^2,

$$\frac{w_{n_1}^2}{q^2} + \frac{w_{t_1}^2 + w_{\tau_1}^2}{q_m^2} = 1, \tag{2.1}$$

$$\frac{\frac{w_{n_2}^2}{q^{*2}}}{\frac{q^2}{q^2}} + \frac{w_{t_2}^2 + w_{\tau_2}^2}{q_m^2} = 1 \tag{2.2}$$

$\bar{q}$ désigne la vitesse constante $\frac{q^*}{\lambda}$, et q_m la vitesse maximum; $q^* < \bar{q} \leq q_m$. La connaissance des ellipsoïdes de révolution représentés par la première de ces équations et des ellipsoïdes correspondants représentés par la seconde permet de construire graphiquement la vitesse après le choc, connaissant la vitesse avant le choc. L'équation (2.1) détermine la position de l'onde de choc lorsque l'écoulement antérieur est connu. En introduisant la célérité locale du son, nous pouvons écrire

$$w_{n_1}^2 = a_1^2 \frac{2\bar{q}^2}{(k+1)q^{*2} - (k-1)\bar{q}^2},$$

$$w_{n_2}^2 = a_2^2 \frac{2q^{*2}}{(k+1)\bar{q}^2 - (k-1)q^{*2}}.$$

a_1 et a_2 désignent la célérité du son sur chacune des deux faces de l'onde de choc. Comme $\bar{q}$ est une constante comprise entre la vitesse critique et la vitesse limite, les coefficients écrits au second membre sont l'un supérieur à l'unité, l'autre inférieur. On peut donc énoncer le théorème suivant :

En tous les points d'une onde de choc conservant le caractère isentropique d'un écoulement, le rapport de la vitesse normale à la célérité locale du son est une constante de chaque côté de la surface d'onde. Ce rapport est supérieur à l'unité avant le choc, inférieur à l'unité après le choc.

Tracé des ondes de choc dans les écoulements considérés. — Nous supposons le mouvement plan. Dans ce cas, tout écoulement isentropique est un écoulement irrotationnel, donc les écoulements isentropiques discontinus que nous allons maintenant envisager seront irrotationnels de part et d'autre de l'onde de choc.

Nous déterminerons la position de l'onde de choc.

Plan de l'écoulement. — L'écoulement antérieur est supposé connu; la fonction de courant ψ, le potentiel des vitesses φ, les coordonnées cartésiennes x et y sont des fonctions des composantes polaires de la vitesse telles que

$$dx + i\,dy = \frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right).$$

Représentant l'onde de choc par son équation cartésienne $y = y(x)$, nous désignons par $dy = y'\,dx$ et $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ les accroissements d'ordonnée et d'arc correspondant à un accroissement dx de l'abscisse lorsqu'on se déplace sur l'onde de choc. Le théorème énoncé au paragraphe précédent se traduit par l'équation

$$\lambda^2\frac{a^2}{q^2}d\varphi^2 = \left(1 - \lambda^2\frac{a^2}{q^2}\right)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}d\psi^2 \qquad (\lambda > 1). \tag{2.3}$$

Cette équation différentielle détermine les ondes de choc correspondant à la valeur λ du rapport $\frac{w_{n_1}}{a}$. Comme φ et ψ sont des fonctions connues, c'est une équation différentielle entre q et θ. Traitons l'exemple simple d'un écoulement par source

$$\psi = A_1\theta,$$

$$x = \frac{A_1\rho_0}{\rho q}\cos\theta, \qquad y = \frac{A_1\rho_0}{\rho q}\sin\theta.$$

L'équation différentielle (2.3) prend la forme

$$d\theta = \frac{\pm\lambda a}{\sqrt{q^2 - \lambda^2 a^2}}\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\frac{dq}{q}.$$

q augmente à partir d'une certaine valeur $\bar{q}$ pour laquelle le nombre de Mach est égal à λ, jusqu'à la valeur maximum. L'intégrale du second membre est convergente pour ces limites; on peut donc écrire

$$\theta = \int_{\bar{q}}^{q}\frac{\pm\lambda a}{\sqrt{q^2 - \lambda^2 a^2}}\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\frac{dq}{q}.$$

Lorsque q tend vers la vitesse limite, x et y augmentent indéfiniment, tandis que θ possède une valeur limite; l'onde de choc est asymptote au rayon vecteur correspondant. Afin de préciser l'écoulement postérieur, nous calculons l'accélération du fluide au sommet A de l'onde de choc. La seconde des équations intrinsèques du mouvement résout le problème :

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = -\frac{q'(s)}{q}\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right) = -\frac{\partial\,\mathrm{Log}\rho q}{\partial s}.$$

Au sommet A de l'onde de choc, l'angle polaire, dans l'écoulement initial, est nul : $\theta_1 = 0$. En un point B de l'onde de choc, voisin de A, nous détermi-

nons l'angle θ_2 de la vitesse postérieure avec l'axe des abscisses; $AB = \delta n$. L'angle β que fait l'onde de choc avec le rayon vecteur est tel que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r\,d\theta_1}{dr}, \qquad r = \frac{A_1\rho_0}{\rho q}.$$

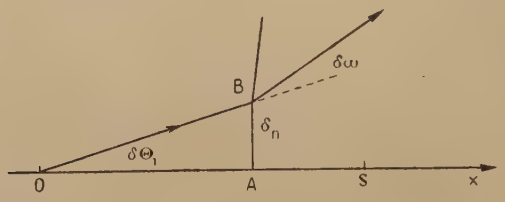


Fig. 6.

Ainsi

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda a}{\sqrt{q^2 - \lambda^2 a^2}}.$$

Lorsqu'on passe de A à B, on calcule, au premier ordre près,

$$\delta q_1 = 0, \qquad \delta\beta = \frac{q^{*2}}{q^{*2} - q_1^2}\,\delta\theta_1.$$

Donc, en vertu des équations du choc, la déviation de la vitesse au point B a pour valeur $\delta\omega = \delta\theta$, d'où l'on déduit

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = -\frac{1}{\rho q}\frac{\partial(\rho q)}{\partial s} = \frac{2}{OA}.$$

L'accélération au point A après le choc est négative. Si nous admettons que

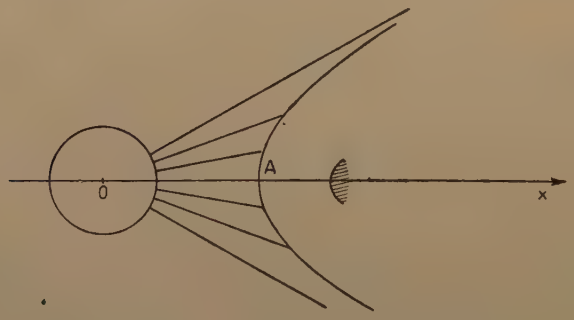


Fig. 7.

cette accélération demeure négative sur l'axe de symétrie OA, il existe dans le fluide un point de stagnation S. En supposant que, sur le segment AS, le débit est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne, on obtient

$$AS = \frac{OA}{2}.$$

Le fluide contournera donc un obstacle; nous nous trouvons en présence d'un problème d'onde de choc détachée, dont l'étude fera l'objet du prochain chapitre. L'onde de choc possède la forme indiquée sur la figure 7.

L'écoulement postérieur admet un potentiel des vitesses, mais n'est pas un écoulement par source.

Plan de l'hodographe. — Dans le plan de l'hodographe, la connaissance de l'une des faces de l'onde de choc détermine parfaitement l'autre face, lorsque

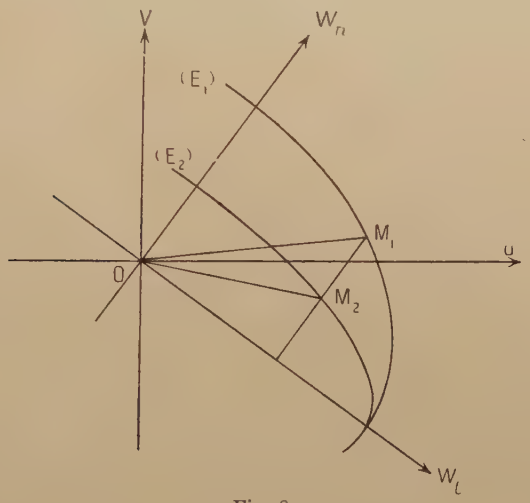


Fig. 8.

la variation d'entropie est connue. Dans le plan (Ou, Ov), nous traçons deux axes perpendiculaires Ow_t, Ow_n et les demi-ellipses (E_1) et (E_2) :

$$(E_1) \qquad \frac{w_n^2}{\bar{q}^2} + \frac{w_{t_1}^2}{q_m^2} = 1 \qquad (w_n > 0),$$

$$(E_2) \qquad \frac{w_n^2}{\frac{q^{*2}}{\bar{q}^2}} + \frac{w_t^2}{q_m^2} = 1 \qquad (w_n > 0).$$

La variation d'entropie est liée à la constante $\bar{q}$ par la relation

$$\Delta S = \frac{R^*}{k-1} \operatorname{Log} \frac{\bar{q}^2 - \mu^2 q^{*2}}{q^{*2} - \mu^2 \bar{q}^2} \left(\frac{q^{*2}}{\bar{q}^2} \right)^k.$$

Un point M_1 de la première face de l'onde de choc doit être sur la demi-ellipse (E_1); on fera donc tourner les axes (Ow_t, Ow_n) de façon qu'il en soit ainsi; dans ces conditions, le point M_2 correspondant sur la seconde face de l'onde de choc appartient d'une part à la demi-ellipse (E_2), d'autre part à la parallèle à Ow_n issue de M_1. Ce point est donc connu.

Dans le cas particulier d'un écoulement initial par ondes simples, l'image de la face antérieure de l'onde de choc est une caractéristique; l'image de la face postérieure est alors la courbe représentée sur la figure 9 (on a pris $\lambda = 2$). Les deux courbes sont en correspondance ponctuelle; l'écoulement postérieur peut être subsonique. Dans le cas particulier d'une onde de choc rectiligne, les composantes normale et tangentielle de la vitesse coïncident avec les composantes cartésiennes; donc les images de l'onde de choc dans le plan de l'hodographe sont deux ellipses,

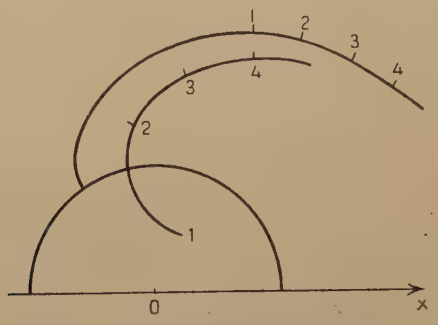


Fig. 9. — Cas d'un écoulement initial par ondes simples.

Étude des écoulements spiraliformes. — La théorie précédente permet d'obtenir des résultats intéressants relatifs aux écoulements spiraliformes étudiés par Tollmien [17]. Dans ces écoulements, la fonction de courant est de la forme

$$\psi_1(q, \theta) = e^{n\theta} A_1(q).$$

La fonction $A_1(q)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène; en négligeant les similitudes, nous pouvons poser

$$\frac{n}{q}\frac{A_1(q)}{A_1'(q)} = \operatorname{tg}\alpha_1(q).$$

La nouvelle fonction $\alpha_1(q)$ est alors déterminée par une équation de Ricatti

$$q\frac{d}{dq}\operatorname{cotg}\alpha + n\operatorname{cotg}^2\alpha + \frac{q^2}{a^2}\operatorname{cotg}\alpha + n\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Nous avons représenté deux solutions de cette équation sur la figure 10 (pour $n = -1$); toutes les courbes représentatives des solutions de l'équation (2.4) concourent au point $q = q_m$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}$.

Le champ des vitesses, dans le plan de l'écoulement, est défini par la relation

$$x + iy = \frac{e^{(n+i)\theta}}{n+i}\frac{\rho_1}{\rho}\frac{A_1'}{\cos\alpha_1}e^{i\alpha_1(q)}.$$

On en déduit, en rapportant ce plan aux coordonnées polaires r, ω telles que

$x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, que les lignes d'égale vitesse sont les spirales logarithmiques

$$r = f_1(q)\, e^{n\omega}, \qquad f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \frac{\rho_1}{\rho} \frac{A'_1}{\cos\alpha_1} e^{n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - n\alpha_1}.$$

L'angle polaire ω a pour valeur $\theta + \alpha_1(q) - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n}$. En conséquence, chacune de ces spirales coupe toutes les lignes de courant sous le même angle $\alpha_1(q)$. La connaissance des fonctions $\alpha_1(q)$ et $f_1(q)$ permet une construction simple des

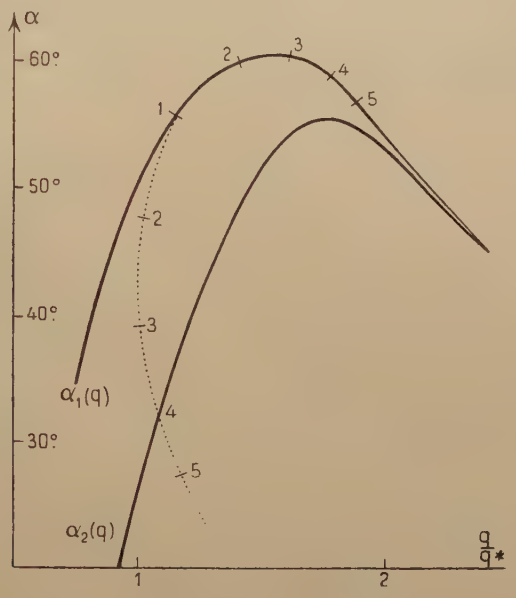


Fig. 10. — Courbes représentatives des fonctions $\alpha_1(q)$.

écoulements. L'un d'entre eux est représenté sur la figure 11_A. La fonction $f_1(q)$ présente un minimum pour une valeur supersonique q_1^0 de la vitesse. A chaque valeur possible de la fonction f_1, correspondent deux valeurs de la vitesse, l'une supérieure à q_1^0, l'autre inférieure à q_1^0. Dans le plan de l'écoulement, les deux régions $q > q_1^0$ et $q < q_1^0$ sont superposées. La spirale logarithmique correspondant à la valeur q_1^0 de la vitesse limite les régions recouvertes par le fluide ; elle constitue une ligne limite, L_1 ; sur cette courbe, les lignes de courant admettent des points de rebroussement. Il existe deux types d'écoulements possibles : les écoulements de première espèce pour lesquels $q > q_1^0$, et les écoulements de seconde espèce pour lesquels $q < q_1^0$. Naturellement, à chaque solution $\alpha_1(q)$ de l'équation de Ricatti (2.4), correspond une valeur différente de q_1^0.

Lorsqu'on remplace la fonction $\alpha_1(q)$ par la fonction $\pi + \alpha_1(q)$, l'équation (2.4) est toujours vérifiée ; si nous effectuons simultanément, dans le plan de l'écoulement, l'homothétie de centre O et de rapport $-e^{-n\pi}$, les lignes

d'égale vitesse ne sont pas modifiées, mais elles coupent les lignes de courant sous le nouvel angle $\alpha_1(q)+\pi$. Les deux écoulements correspondants possèdent donc les mêmes lignes de courant et les mêmes lignes d'égale vitesse; ils diffèrent seulement par le sens de déplacement des molécules gazeuses. Dans un cas, la vitesse du fluide est croissante; dans l'autre, cette vitesse est décroissante.

Nous convenons maintenant de placer une onde de choc sur une des spirales logarithmiques précédentes; nous appelons q_1 la valeur correspondante de la vitesse. Sur cette onde de choc, la vitesse normale et la célérité du son demeurent constantes, donc la variation d'entropie possède une valeur fixe; cette valeur sera positive si la vitesse normale est supersonique, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{q_1 \sin\alpha_1}{a_1} > 1.$$

Le premier membre étant une fonction croissante de la vitesse, égale à l'unité sur la ligne limite, il est nécessaire de prendre q_1 supérieur à q_1^0. Donc, seul un écoulement de première espèce peut subir un choc du type envisagé. Nous supposerons qu'il en est ainsi. L'écoulement postérieur sera un écoulement isentropique; ce sera un nouvel écoulement spiraliforme. En effet, sur la face postérieure de l'onde de choc, la vitesse possède une grandeur constante q_2 et fait avec cette onde un angle constant α_2. Dans ces conditions, il existe un nouvel écoulement spiraliforme

$$\psi_2(q, \theta) = e^{n\theta} A_2(q)$$

qui admettra, sur cette onde de choc, les mêmes vecteurs vitesse, si les valeurs $A_2(q_2)$ et $A_2'(q_2)$ sont convenablement choisies. La fonction $A_2(q)$ se trouve ainsi déterminée à l'aide de deux des équations du choc; les deux autres équations du choc déterminent la densité et la pression dans l'écoulement postérieur.

Étudions le phénomène dans le plan (α, q); nous envisageons l'écoulement défini par la fonction $\alpha_1(q)$; lorsque le fluide subit un choc le long d'une courbe d'égale vitesse, nous connaissons, sur la face postérieure de l'onde de choc, les valeurs de l'angle α et de la vitesse q, soit $\bar{\alpha}$ et $\bar{q}$. La courbe $\alpha = \bar{\alpha}$, $q = \bar{q}$ indique les états possibles du fluide après que l'écoulement précédent a subi un choc le long d'une courbe d'égale vitesse. Cette courbe est figurée en pointillé sur la figure 10. Par l'un quelconque des points $(\bar{\alpha}, \bar{q})$, passe une nouvelle courbe $\alpha_2(q)$, solution de l'équation de Ricatti (2.4). Cette fonction $\alpha_2(q)$ définit le nouvel écoulement postérieur au choc.

Étant donné deux écoulements spiraliformes correspondant à la même valeur

du paramètre n, on peut toujours passer de l'un à l'autre par choc le long d'une courbe d'égale vitesse.

Après le choc, la vitesse normale est subsonique, donc l'écoulement engendré est un écoulement de seconde espèce; $q_2 < q_2^0$. Sur l'onde de choc, la concavité change de sens, et l'accélération tangentielle change de signe. Dans le cas représenté sur la figure 11_B, la vitesse avant le choc est décroissante, donc la vitesse après le choc est croissante, et l'écoulement possède une nouvelle ligne limite : L_2. Cette ligne se trouve en deçà de la ligne limite L_1

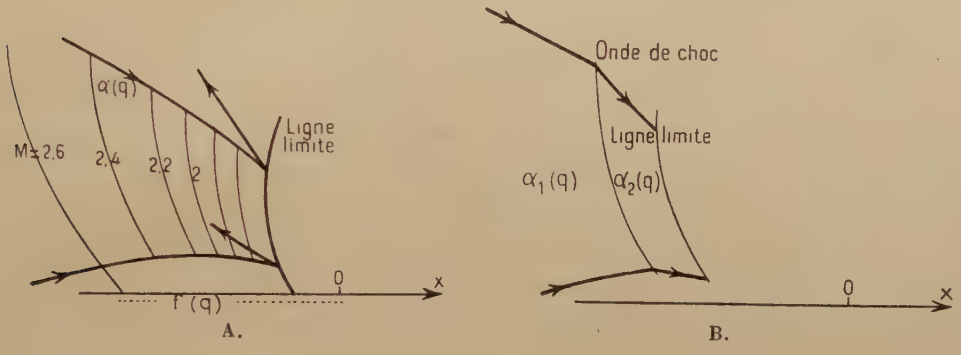


Fig. 11. — Choc dans un écoulement spiraliforme.

du premier écoulement, donc l'introduction d'un tel choc ne permet pas de prolonger un écoulement spiraliforme au delà de sa ligne limite.

CHAPITRE III.

Étude de l'onde de choc détachée au voisinage de son sommet.

Nous nous proposons d'aborder le problème général du mouvement d'un solide dans un fluide compressible. Nous nous plaçons dans l'espace. Lorsque la vitesse est supersonique, il se forme en avant du solide une onde de choc qui limite la région dans laquelle le fluide est au repos. Nous envisageons ici de déterminer la position et la forme de cette onde, connaissant la vitesse et la forme du solide. Le problème mathématique pris dans toute sa généralité n'a pas encore reçu de solution. Si l'on suppose connue la surface de l'onde de choc, il est possible de construire numériquement l'écoulement au delà de celle-ci; c'est là un problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles. Les calculs sont valables aussi longtemps que l'on peut

assurer la convergence des développements effectués. Cependant cette méthode présente un inconvénient fondamental : on obtient l'obstacle en dernière analyse. Il serait théoriquement possible de modifier progressivement la forme de l'onde de choc de façon à obtenir, pour l'obstacle, une forme fixée à l'avance. La longueur des calculs ne permet pas de considérer une telle méthode comme satisfaisante. Mais il est possible de l'adapter pour obtenir rapidement une solution approchée du problème posé.

Nous considérons d'abord la forme de l'onde de choc comme connue; nous limitons cette connaissance à celle des rayons de courbure principaux R_1 et R_2 au point où le plan tangent est perpendiculaire à la vitesse de l'obstacle, que nous supposons animé d'une translation uniforme. A l'aide des équations du choc, nous déterminons l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde de choc; puis, à l'aide des équations du mouvement, l'état du fluide derrière l'onde. Nous formons l'équation de la surface de courant décomposée; elle constitue l'obstacle. Tous les calculs précédents étant faits à l'aide de développements limités, nous obtenons dans cette approximation les expressions des rayons de courbure principaux de l'obstacle en son sommet (point où le plan tangent est perpendiculaire à la vitesse) $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Dans les formules obtenues, nous considérons alors ces quantités comme des données, et les courbures de l'onde de choc comme des inconnues. Nous déterminons d'une façon analogue la distance qui sépare le sommet de l'obstacle du sommet de l'onde de choc.

Afin de simplifier le langage, nous supposons le solide fixe, et le fluide animé, avant l'onde de choc, de la vitesse $\vec{q}_1$. Nous prenons la direction $\vec{q}_1$ pour direction des abscisses, et les directions principales de l'obstacle en son sommet N pour directions des ordonnées et des cotes. Au voisinage du sommet, l'équation cartésienne de l'obstacle est la suivante :

$$x = \frac{y^2}{2\mathcal{R}_1} + \frac{z^2}{2\mathcal{R}_2} + \dots.$$

En première approximation, nous remplacerons le second membre par ses deux premiers termes. Dès lors, la symétrie des données engendre la symétrie de l'écoulement, le point O en lequel l'onde de choc coupe l'axe des abscisses Nx constitue le sommet de cette onde et, l'origine étant placée en ce point, l'onde de choc a pour équation

$$x = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2} + \dots.$$

3.1. Détermination de l'écoulement a partir de l'onde de choc. — Dans l'approximation que nous avons adoptée, l'axe des abscisses est un axe de symétrie pour l'écoulement; chacun des deux plans de coordonnées xOy et xOz

est un plan de symétrie. Il s'agit de déterminer les cinq fonctions inconnues u, v, w, ρ, p des trois variables x, y, z. Ces fonctions sont les composantes cartésiennes de la vitesse, la densité et la pression. Au voisinage de l'axe de symétrie, nous effectuons un développement en série double suivant les puissances croissantes de y et z; les coefficients sont des fonctions de x. Nous nous limitons aux termes du second ordre. En vertu de la symétrie, nous posons

$$(3.1)\qquad \begin{cases} u = u_0(x) + y^2 u_1(x) + z^2 u_2(x) + \dots, \\ v = y\lambda_1(x) + \dots, \\ w = z\lambda_2(x) + \dots, \\ \rho = \rho_1\{\alpha(x) + y^2\alpha_1(x) + z^2\alpha_2(x) + \dots\}, \\ p = p_1\{A(x) + y^2 A_1(x) + z^2 A_2(x) + \dots\}. \end{cases}$$

La connaissance des onze fonctions inconnues de x introduites par ces formules détermine, au voisinage de l'axe des abscisses, l'état du fluide au troisième ordre près. Nous écrivons que les équations du choc sont vérifiées; comme l'écoulement initial est un courant uniforme de vitesse $q_1 = q^*\xi$, de densité et de pression ρ_1 et p_1, nous écrivons les équations du choc sous la forme (0.14), où

$$\sigma_1 = \frac{y}{R_1} + \dots, \qquad \sigma_2 = \frac{z}{R_2} + \dots.$$

On obtient ainsi, pour $x = 0$, les onze équations algébriques suivantes :

$$(3.2)\qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{q^*}{\xi}, \\ u_i = \dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{\xi^2(1-\mu^2)}{R_i} - \dfrac{u_0'}{2R_i}, \\ \lambda_i = \dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{\xi^2-1}{R_i}, \\ \alpha = \xi^2, \\ \alpha_i = -\dfrac{\xi^2}{R_i}(1-\mu^2\xi^2) - \dfrac{\alpha'}{2R_i}, \\ A = \dfrac{\xi^2-\mu^2}{1-\mu^2\xi^2}, \\ A_i = -\dfrac{\xi^2}{R_i^2}\dfrac{1-\mu^4}{1-\mu^2\xi^2} - \dfrac{A'}{2R_i}. \end{cases}$$

L'indice i possède les valeurs 1 et 2; on a $\mu^2 = \dfrac{(k-1)}{(k+1)}$, k étant le rapport des chaleurs spécifiques du fluide.

Nous écrivons ensuite les équations du mouvement : équation fondamentale de la dynamique, conservation de la masse, équation des transformations adiabatiques. Ces équations étant vérifiées au troisième ordre près, nous obtenons

un système de neuf équations différentielles vérifiées par les onze fonctions inconnues de x :

$$(3.3)\qquad \begin{cases} u_0 u_0' + \dfrac{p_1}{\rho_1}\dfrac{A'}{\alpha} = 0, \\ (u_0 u_i)' + 2u_i\lambda_i + \dfrac{p_1}{\rho_1}\left(\dfrac{A_i'}{\alpha} - \dfrac{A'\alpha_i}{\alpha^2}\right) = 0, \\ u_0\lambda_i' + \lambda_i^2 + \dfrac{p_1}{\rho_1}2\dfrac{A_i}{\alpha} = 0, \\ (u_0\alpha)' + (\lambda_1+\lambda_2)\alpha = 0, \\ (A\alpha^{-k})' = 0, \\ u_0\left\{\dfrac{A_i}{A} - k\dfrac{\alpha_i}{\alpha}\right\}' + 2\lambda_i\left\{\dfrac{A_i}{A} - k\dfrac{\alpha_i}{\alpha}\right\} = 0. \end{cases}$$

Les équations différentielles (3.3), auxquelles nous joignons les conditions initiales (3.2), résolvent le problème de l'onde de choc détachée. Il suffit d'expliciter les résultats. Ces équations déterminent en effet, pour $x=0$, les valeurs des onze fonctions inconnues, les valeurs de la dérivée première des fonctions u_0, λ_i, α et A, et enfin les valeurs de la dérivée seconde des fonctions u_0, α et A. Le tableau suivant contient les résultats relatifs au champ des vitesses :

$$(3.4)\qquad \begin{cases} u_0' = -\dfrac{q^*}{\xi}(\xi^2-\mu^2)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right), \\ u_0'' = \dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{\xi^2-\mu^2}{\xi^2-1}\{(\xi^2-1)^2-2(1-\mu^2)\xi^2\}\left(\dfrac{1}{R_1^2}+\dfrac{1}{R_2^2}\right) \\ \qquad -\dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{\xi^2-\mu^2}{\xi^2-1}\{\xi^2-\mu^2-2(1-\mu^2)\xi^2\}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)^2, \\ u_i = \dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{\xi^2(1-\mu^2)}{R_i^2} + \dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{\xi^2-\mu^2}{2R_i}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right), \\ \lambda_i' = -\dfrac{q^*}{\xi}\dfrac{(\xi^2-1)^2-2(1-\mu^2)\xi^2}{R_i^2} + \dfrac{q^*}{\xi}(\xi^2-\mu^2)\dfrac{1}{R_i}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right). \end{cases}$$

L'onde de choc étant connue, les valeurs de R_1 et R_2 sont des données; l'écoulement se trouve déterminé au troisième ordre près, au voisinage du sommet de l'onde de choc. La poursuite de notre étude exige que l'on se trouve toujours au voisinage de ce sommet, c'est-à-dire en particulier que la distance de l'obstacle à l'onde de choc soit faible vis-à-vis des rayons de courbure. Cela se produit pour les vitesses élevées. Nous supposerons qu'il en est ainsi.

3.2 Détermination de l'obstacle a partir de l'écoulement. — *Position de l'obstacle.* — La position de l'obstacle est déterminée par l'abscisse h de son sommet. En ce point, la vitesse et le débit sont nuls. En toute rigueur, il est équivalent d'écrire que l'une ou l'autre de ces quantités est nulle; comme nous effectuons des développements limités aux trois premiers termes, les valeurs de h obtenues par l'une et l'autre méthode diffèrent. Dans l'hypothèse de la

convergence des calculs, cette différence sera faible, et nous pouvons indifféremment employer l'une ou l'autre méthode, puisqu'il s'agit de calculs approchés. Sur l'axe des abscisses, le débit a pour valeur

$$\rho q = \rho_1 q_1 (1 + ax + bx^2 + \dots).$$

Le second membre est le développement en série, au voisinage du sommet de l'onde de choc, de la fonction $\rho_1 \alpha(x) u_0(x)$, et les calculs du paragraphe précédent déterminent la valeur des coefficients a et b.

$$(3.5) \qquad \begin{cases} a = -(\xi^2 - 1)\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right), \\ 2b = \left\{(\xi^2 - 1)^2 - 2(1 - \mu^2)\xi^2\right\}\left(\dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2}\right) \\ \qquad - \left\{\xi^2 - 1 + (1 - \mu^2)\xi^2\right\}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)^2. \end{cases}$$

Dans l'approximation linéaire, nous remplaçons la fonction ρq par les deux premiers termes de son développement en série; h est alors racine de l'équation du premier degré

$$0 = 1 + ax.$$

Dans l'approximation parabolique, nous remplaçons cette même fonction par les trois premiers termes de son développement en série; dans cette nouvelle approximation, h est la première racine positive de l'équation du second degré

$$0 = 1 + ax + bx^2.$$

Nous adopterons l'approximation parabolique, afin d'utiliser toutes les quantités connues à partir des courbures principales de l'onde de choc en son sommet.

Forme de l'obstacle. — La forme de l'obstacle est déterminée, dans l'approximation que nous avons adoptée, par la connaissance des rayons de courbure principaux de sa surface en son sommet N. L'obstacle est constitué par une nappe de la surface de courant décomposée; l'autre nappe est dégénérée, elle est constituée par l'axe des abscisses. En raison de la symétrie de l'écoulement chacun des plans de coordonnées xOy et xOz contient des lignes de courant. L'équation différentielle des lignes de courant situées dans le premier de ces plans est la suivante :

$$\frac{dx}{u(x, y, 0)} = \frac{dy}{v(x, y, 0)}.$$

Cette équation permet de calculer, en chaque point du plan, la courbure de la ligne de courant qui passe par ce point. Pour la ligne de courant appartenant à l'obstacle, on a

$$(3.6) \qquad x = h + \frac{y^2}{2\mathcal{R}_1} + \dots.$$

Comme la fonction $u_0(x)$ doit être nulle au point $x = h$, nous pouvons écrire, sur l'obstacle, au voisinage de son sommet,

$$u = y^2 \left\{ \frac{u_0'(h)}{2\mathcal{R}_1} + u_1(h) \right\} + \ldots, \qquad v = y\lambda_1(h) + \ldots.$$

Remplaçant u et v par leurs valeurs dans l'équation différentielle des lignes de courant du plan xOy, on obtient

$$\mathcal{R}_1 = \frac{2\lambda_1(h) - u_0'(h)}{2u_1(h)}. \tag{3.7}$$

Une formule analogue donne la valeur du second rayon de courbure principal de l'obstacle en son sommet, soit $\mathcal{R}_2$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2\lambda_2(h) - u_0'(h)}{2u_2(h)}. \tag{3.8}$$

Afin d'évaluer le numérateur et le dénominateur, nous effectuons les développements limités possibles. Les fonctions du numérateur s'écrivent

$$\lambda_i(h) = \lambda_i(0) + h\lambda_i'(0), \qquad u_0'(h) = u_0'(0) + h u_0''(0).$$

Pour le dénominateur, on écrira

$$u_i(h) = u_i(0).$$

Si l'obstacle admettait en son sommet un point singulier, il conviendrait de remplacer l'équation (3.6) par la suivante :

$$x = h + my + \ldots. \tag{3.9}$$

On en déduit la relation nécessaire $\lambda_1(h) = u_0'(h)$. D'une façon analogue, les fonctions λ_2 et u_0' possèdent la même valeur au point $x = h$. En vertu de la quatrième des équations différentielles du mouvement écrites sous la forme (3.3), les quantités $u_0'(h)$, $\lambda_1(h)$ et $\lambda_2(h)$ ont une somme nulle; donc chacune d'elles est égale à zéro. Il en résulte que, lorsque l'obstacle est terminé par une pointe, la dérivée première de la fonction $u_0(x)$ qui représente la répartition des vitesses sur l'axe de symétrie, s'annule au sommet de l'obstacle; on a $u_0'(h) = 0$. Nous laisserons ce cas de côté et nous envisagerons seulement des obstacles qui ne présentent pas en leur sommet de point singulier.

3.3. Détermination de l'onde de choc a partir de l'obstacle. — Dans la pratique, l'obstacle seul est connu; il convient donc, afin de déterminer l'onde de choc, de résoudre les équations précédentes (3.7) et (3.8) en considérant R_1 et R_2 comme inconnues. La méthode la plus rapide consiste à construire des graphiques. Pour diverses valeurs du nombre de Mach M de l'écoulement initial, nous avons calculé, en fonction des courbures principales de l'onde de choc, les quantités h, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Les courbes représentatives correspondantes permettent alors, par simple lecture, de connaître la forme (courbures principales au sommet) et la position de l'onde de choc, lorsque la vitesse et la forme de l'obstacle sont connues. Les résultats numériques sont indiqués dans les tables suivantes :

Solution du problème de l'onde de choc détachée : résultats numériques (1).

M, nombre de Mach initial;
$\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, rayons de courbure principaux de l'obstacle;
h, distance qui sépare les sommets de l'obstacle et de l'onde de choc;
R_1 et R_2, rayons de courbure principaux de l'onde de choc.

$\frac{R_2}{R_1}$.	$\frac{h}{\mathcal{R}_1}$.	$\frac{R_1}{\mathcal{R}_1}$.	$\frac{R_2}{\mathcal{R}_2}$.	$\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1}$.
		M = 4.		
1	0,1476	1,2258	1,2258	1,000
1,5	0,1777	1,2261	1,2497	1,472
2	0,2001	1,2369	1,2847	1,925
2,5	0,2175	1,2489	1,3233	2,359
3	0,2316	1,2610	1,3622	2,777
3,5	0,2433	1,2718	1,4004	3,178
4	0,2531	1,2813	1,4374	3,566
∞	0,3661	1,4140	2,5335	∞
		M = 5.		
1	0,1417	1,2711	1,2711	1,000
1,5	0,1722	1,2819	1,2923	1,489
2	0,1958	1,3034	1,3284	1,962
2,5	0,2146	1,3254	1,3716	2,416
3	0,2301	1,3457	1,4168	2,849
3,5	0,2434	1,3643	1,4624	3,265
4	0,2545	1,3808	1,5073	3,664
∞	0,3994	1,6220	3,1979	∞
		M = 6.		
1	0,1384	1,2982	1,2982	1,000
1,5	0,1691	1,3158	1,3160	1,499
2	0,1933	1,3443	1,3543	1,985
2,5	0,2131	1,3724	1,4006	2,468
3	0,2297	1,3996	1,4503	2,895
3,5	0,2437	1,4233	1,5006	3,319
4	0,2559	1,4448	1,5508	3,726
∞	0,4262	1,7787	3,7921	∞
		M = ∞.		
1	0,1305	1,3681	1,3681	1,000
1,5	0,1618	1,4048	1,3797	1,527
2	0,1876	1,4534	1,4211	2,045
2,5	0,2101	1,5031	1,4767	2,544
3	0,2296	1,5494	1,5382	3,022
3,5	0,2464	1,5908	1,6021	3,475
4	0,2617	1,6297	1,6680	3,908
∞	0,5075	2,2519	7,3529	∞

(1) Ces tables ainsi que les résultats numériques donnés dans le chapitre IV ont été calculés par M. Michel.

Lorsque $\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = 1$, l'écoulement est un écoulement de révolution; lorsque ce rapport est infini, l'écoulement est un écoulement plan. Nous ne devons pas oublier l'hypothèse fondamentale que nous avons faite au début de ce chapitre, à savoir que $\frac{h}{R}$ reste petit. Nous nous sommes limités aux nombres de Mach supérieurs à 4; dans ces conditions, l'hypothèse de départ paraît sensiblement vérifiée. Lorsque le nombre de Mach M de l'écoulement initial est voisin de l'unité, l'onde de choc doit se trouver à l'infini amont et posséder un rayon de courbure infini. Les calculs que nous avons faits ne permettent pas de retrouver ces résultats; donc, pour les vitesses faiblement supersoniques, l'approximation du second ordre est insuffisante. Il convient de remarquer la différence qui apparaît entre les écoulements de révolution et les écoulements plans. Dans les premiers, l'onde de choc s'approche de l'obstacle lorsque la

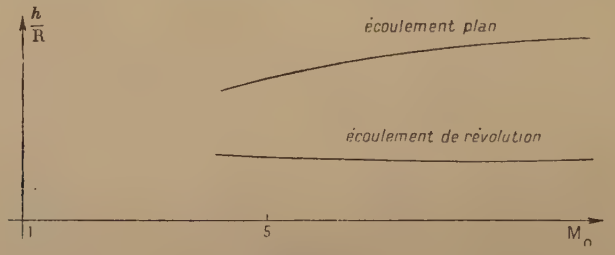


Fig. 12.

vitesse amont augmente; dans les seconds, au contraire, l'onde de choc s'éloigne de l'obstacle dans les mêmes conditions. Ces résultats supposent naturellement que le nombre de Mach amont soit suffisamment élevé.

Exemple. — Un solide constitué par un ellipsoïde dont les axes ont pour longueur 3, 4 et 5 cm est animé d'un mouvement de translation uniforme parallèlement à son grand axe. Ce solide se déplace dans un fluide compressible, à une vitesse égale à quatre fois la célérité du son. On demande de déterminer l'onde de choc, le mouvement du fluide, la densité et la pression.

Les données sont les suivantes :

$$M = 4, \qquad \mathcal{R}_1 = 1{,}80 \text{ cm}, \qquad \mathcal{R}_2 = 3{,}20 \text{ cm}.$$

Le rapport $\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1}$ a pour valeur 1,77; les tables précédentes donnent les résultats demandés concernant l'onde de choc. La distance h du sommet de l'obstacle au sommet de l'onde de choc a pour valeur 0,34 cm. Les rayons de courbure principaux de l'onde de choc en son sommet ont pour valeur :

$$R_1 = 2{,}22 \text{ cm}, \qquad R_2 = 4{,}03 \text{ cm}.$$

L'onde de choc étant connue, nous pouvons déterminer l'état du fluide :

$$u = q^*(0,467 - 1,49x + 0,85x^2 + 0,69y^2 + 0,30z^2 + \ldots),$$
$$v = q^*(0,75y + 0,15xy + \ldots),$$
$$w = q^*(0,41z + 0,21xz + \ldots).$$
$$\rho = \rho_1(4,57 + 2,66x - 4,85x^2 - 0,82y^2 - 0,40z^2 + \ldots),$$
$$p = p_1(18,3 + 15,0x - 26,1x^2 - 7,12y^2 - 2,06z^2 + \ldots).$$

x, y, z sont exprimées en centimètres. Dans l'approximation adoptée, le domaine subsonique se trouve limité, dans le fluide, par une quadrique d'équation

$$3,16(x - 0,23)^2 + 1,25y^2 + 0,48z^2 = 1 \quad (1).$$

3.4. Construction numérique d'une solution exacte. — Dans les paragraphes précédents, nous avons résolu le problème de l'onde de choc détachée en utilisant l'approximation du second ordre. Il est possible d'obtenir une précision supérieure; le calcul numérique nous permet de déterminer, à partir de l'onde de choc, l'écoulement et l'obstacle avec autant de précision que l'on veut. Nous allons, à titre d'exemple, traiter un cas particulier.

L'écoulement avant le choc est un courant uniforme ayant pour nombre de Mach $M = 2$, pour pression p_1. L'onde de choc est une surface de révolution dont l'axe Ox est parallèle à la vitesse amont; sa méridienne est une parabole d'axe Ox; elle est déterminée par le rayon de courbure R en son sommet. A l'infini, le choc s'annule, donc la direction de l'onde de choc se confond avec l'une des directions de Mach de l'écoulement initial. La parabole précédente ne possède pas cette propriété; cependant, comme nous nous limitons au voisinage du sommet, ce fait ne présente pas d'inconvénient. Nous déterminons d'abord l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde de choc; nous déterminons ensuite l'écoulement, puis l'obstacle, en utilisant les équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques. Nous effectuons simultanément des calculs numériques et des constructions graphiques dans un demi-plan méridien.

1° Dans la région $\frac{r}{R} > 0,2$, nous avons déterminé le champ des vitesses en effectuant des déplacements élémentaires le long des lignes de courant et de leurs trajectoires orthogonales.

2° Dans la région $\frac{r}{R} < 0,2$, nous avons construit les lignes de courant en considérant que le débit demeure constant entre deux telles lignes.

---

(1) Nous avons repris au cours de l'année 1951 l'étude du problème de l'onde de choc détachée dans le cas des écoulements de révolution en adoptant l'approximation du quatrième ordre : O. N. E. R. A., Note technique n° 5 et *C. R. Acad. Sc.*, 232, 1951, p. 686-687. Il est ainsi possible d'atteindre le cas d'un obstacle constitué par une surface creuse : une entrée de réacteur par exemple.

3° Sur l'axe de révolution, nous avons effectué un développement limité au voisinage du sommet de l'onde.

Nous avons adopté $k = 1,40$.

Les équations du mouvement (0.7) et (0.8) permettent, à partir des données sur l'onde de choc, de construire l'écoulement au delà de celle-ci. En deux

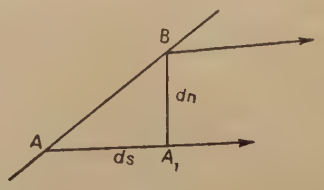


Fig. 13.

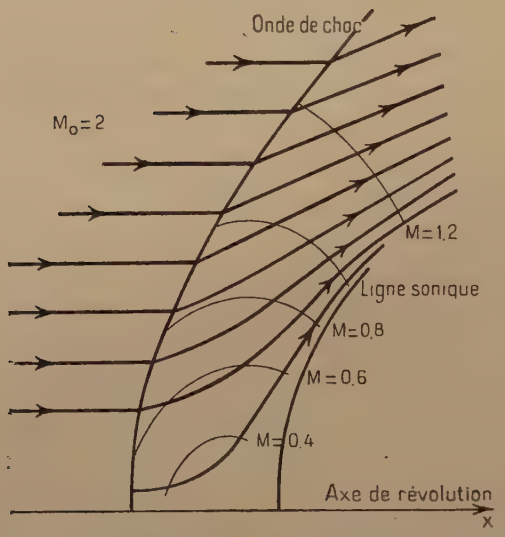


Fig. 14. — Écoulement de révolution avec onde de choc détachée.

points voisins A et B situés sur l'onde de choc, on connaît la vitesse et la pression au repos, c'est-à-dire q, θ, p_0. On connaît aussi les composantes intrinsèques ds et dn du déplacement élémentaire qui permet de passer de A à B. Cela permet d'écrire deux nouvelles équations

$$dq = \frac{\partial q}{\partial s}\,ds + \frac{\partial q}{\partial n}\,dn, \qquad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial s}\,ds + \frac{\partial \theta}{\partial n}\,dn.$$

Les quatre inconnues $\frac{\partial q}{\partial s}$, $\frac{\partial q}{\partial n}$, $\frac{\partial \theta}{\partial s}$, $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ se trouvent déterminées. On en déduit la valeur de la vitesse au point A_1 voisin de A. L'état du fluide est donc connu sur une nouvelle courbe voisine de l'onde de choc. On recommence les mêmes calculs à partir de cette courbe. L'écoulement est représenté sur la figure 14;

nous avons tracé les lignes sur lesquelles la grandeur de la vitesse est constante.

Pour préciser la répartition des vitesses sur l'axe de symétrie, nous avons calculé les coefficients des premiers termes du développement en série de la vitesse et du débit au voisinage du sommet de l'onde de choc :

$$q = q^* \, 0{,}613 \left\{ 1 - 5\frac{s}{R} + \frac{10}{3}\frac{s^2}{R^2} + \dots \right\},$$

$$\rho q = \rho_1 q_1 \left\{ 1 - \frac{10}{3}\frac{s}{R} - \frac{85}{9}\frac{s^2}{R^2} + \dots \right\}.$$

L'examen des résultats semble indiquer que l'écoulement ne présente pas de singularité dans la région que nous avons envisagée; en outre, nous obtenons un tracé d'obstacle satisfaisant.

3.5. Indications relatives a une méthode différente. — Nous nous plaçons de nouveau dans le cas général des écoulements à trois dimensions, et nous admettrons, pour simplifier, que l'écoulement possède un axe de symétrie Ox. On peut établir une nouvelle solution approchée du problème de l'onde de choc détachée en raisonnant de la façon suivante. Entre les sommets O et N de l'obstacle et de l'onde de choc, la vitesse du fluide est subsonique (le nombre de Mach est inférieur à 0,5, si $M_0 > 2{,}64$); en outre, sur la ligne de courant constituée par l'axe ONx, l'entropie est maximum, donc, lorsqu'on se déplace au voisinage du segment ON, la variation d'entropie est faible. Il est par suite possible d'assimiler, dans ce voisinage, l'écoulement à un écoulement irrotationnel incompressible. L'obstacle étant donné, cet écoulement peut être considéré comme connu; il comporte certains paramètres arbitraires dont nous pourrons disposer par la suite; pour des obstacles de forme simple, le potentiel des vitesses a pu être explicité à l'aide de fonctions élémentaires.

Nous nous proposons alors de déterminer dans l'espace une certaine surface (Σ) ayant la propriété suivante : sur la face aval de cette surface, le champ des vitesses dans l'écoulement incompressible précédent et le champ des vitesses dans l'écoulement issu du choc coïncident avec la meilleure approximation possible. Nous développerons les calculs dans le cas où l'obstacle est l'ellipsoïde d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{b_2^2} - 1 = 0.$$

L'écoulement irrotationnel, incompressible, régulier à l'infini qui contourne un tel obstacle admet pour potentiel des vitesses la fonction $\Phi(x, y, z)$:

$$\Phi(x, y, z) = A\,x \left\{ 1 - \frac{ab_1b_2}{2 - \alpha_0} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\,\Delta(\lambda)} \right\},$$

avec

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b_1^2+\lambda}+\frac{z^2}{b_2^2+\lambda}-1=0,$$

$$\Delta(\lambda)=\{(a^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(b_2^2+\lambda)\}^{\frac{1}{2}}.$$

α_0 désigne la constante $ab_1b_2\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta(\lambda)}$; le facteur A est arbitraire. On se reportera à l'ouvrage de Lamb [3] pour la démonstration de ces résultats. Au voisinage de l'axe des abscisses, on peut donc effectuer un développement suivant les puissances croissantes des variables y et z

$$\Phi(x, y, z)=\Phi_0(x)+y^2\Phi_1(x)+z^2\Phi_2(x)+\dots.$$

On calcule

$$\Phi_0(x)=Ax\left\{1-\frac{ab_1b_2}{2-\alpha_0}\int_{x^2-a^2}^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta(\lambda)}\right\},$$

$$\Phi_i(x)=\frac{A}{x}\frac{ab_1b_2}{2-\alpha_0}\frac{1}{(x^2-a^2+b_i^2)\Delta(x^2-a^2)} \qquad (i=1, 2).$$

Nous envisageons la surface (Σ) sur laquelle nous placerons une onde de choc; h désignant toujours la distance qui sépare les sommets de l'onde de choc et de l'obstacle, on peut représenter, au voisinage de l'axe des abscisses, l'onde de choc par l'équation suivante :

$$x=-a-h+\frac{y^2}{2R_1}+\frac{z^2}{2R_2}+\dots.$$

1° Dans l'écoulement incompressible, le champ des vitesses est défini au troisième ordre près, au voisinage de l'axe des abscisses, par les formules

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\Phi_0'(x)+y^2\Phi_1'(x)+z^2\Phi_2'(x)+\dots,$$

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2y\Phi_1(x)+\dots,$$

$$w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=2z\Phi_2(x)+\dots.$$

On en déduit, avec la même approximation, les valeurs de la vitesse sur la surface (Σ).

2° Dans l'écoulement engendré par choc sur la surface (Σ) à partir d'un courant uniforme de vitesse supersonique q_1 parallèle à Ox, les valeurs de la vitesse sur la face postérieure de la surface (Σ) sont données par les formules (0.14). On obtient

$$u=\frac{q^{*2}}{q_1}+(1-\mu^2)q_1\frac{y^2}{R_1^2}+(1-\mu^2)q_1\frac{z^2}{R_2^2}+\dots,$$

$$v=\left(q_1-\frac{q^{*2}}{q_1}\right)\frac{y}{R_1}+\dots,$$

$$w=\left(q_1-\frac{q^{*2}}{q_1}\right)\frac{z}{R_2}+\dots.$$

Nous faisons coïncider, sur la surface (Σ), les champs des vitesses dans chacun de ces deux écoulements. Au premier ordre près, on obtient une seule équation

$$\Phi'_0(-a-h)=\frac{q^{*2}}{q_1}. \tag{3.13}$$

Cette équation est une relation entre les quantités A et h. Dans l'approximation du second ordre, il convient de joindre à l'équation (3.13) les deux équations suivantes

$$2\Phi_i(-a-h)=\left(q_1-\frac{q^{*2}}{q_1}\right)\frac{1}{R_i} \qquad (i=1,2). \tag{3.14}$$

Enfin, dans l'approximation du troisième ordre, on devra encore écrire deux nouvelles équations

$$\Phi''_0(-a-h)\frac{1}{2R_i}+\Phi'_i(-a-h)=\frac{q_1(1-\mu^2)}{R_i^2}. \tag{3.15}$$

Nous avons donc été amenés à écrire cinq équations; les inconnues sont au nombre de quatre : A, a, R_1 et R_2. Il sera donc en général impossible de faire coïncider les deux champs de vitesses au troisième ordre près. Il y a exception pour les écoulements de révolution et pour les écoulements plans, car le nombre des équations se réduit à trois et, dans ces deux cas, le nombre des inconnues est égal au nombre des équations. Ces deux cas étant mis à part, nous écrirons seulement les équations (3.13) et (3.14); nous disposons alors d'un paramètre arbitraire, A par exemple; nous déterminerons cette quantité par la condition que l'équation (3.16), obtenue par addition membre à membre des deux équations (3.15), soit vérifiée. Ainsi l'on essaie de satisfaire autant que possible aux conditions de l'approximation du troisième ordre.

Afin d'achever la solution du problème, il convient de construire des tables numériques donnant, pour diverses valeurs des rapports $\frac{b_1}{a}$ et $\frac{b_2}{a}$, les variations en fonction du nombre de Mach initial des trois quantités suivantes :

$$\frac{h}{a}, \quad \frac{R_1}{a}, \quad \frac{R_2}{a}.$$

On calculera ces valeurs en résolvant les quatre équations (3.13), (3.14), et (3.16).

Mouvements de révolution. — L'écoulement étant un écoulement de révolution autour de Ox, nous considérons le cas d'un obstacle constitué par une sphère. La fonction $\Phi(x, y, z)$ est la suivante :

$$\Phi=Ax\left\{1+\frac{a^3}{2r^3}\right\}, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Il nous est possible de faire coïncider au troisième ordre près les champs des vitesses dans l'écoulement incompressible et dans l'écoulement issu du choc. On doit résoudre les trois équations suivantes :

$$\text{(3.13')} \qquad A\left\{1-\frac{a^3}{(a+h)^3}\right\}=\frac{q^{*2}}{q_1},$$

$$\text{(3.14')} \qquad \frac{3A}{2}\frac{a^3}{(a+h)^4}=\left(q_1-\frac{q^{*2}}{q_1}\right)\frac{1}{R},$$

$$\text{(3.15')} \qquad \frac{3Aa^3}{(a+h)^5}-\frac{3A}{R}\frac{a^3}{(a+h)^4}=\frac{(1-\mu^2)q_1}{R^2}.$$

On en déduit les deux équations qui résolvent explicitement, avec les hypothèses faites, le problème de l'onde de choc détachée :

$$\text{(3.17)} \qquad \begin{cases} \dfrac{(a+h)^3}{a^3}-1=\dfrac{3q^{*2}}{4}\dfrac{(3-\mu^2)q_1^2-2q^{*2}}{(q_1^2-q^{*2})^2}, \\ \dfrac{R}{a+h}=\dfrac{(3-\mu^2)q_1^2-2q^{*2}}{2(q_1^2-q^{*2})}. \end{cases}$$

Les deux quotients $\frac{h}{a}$ et $\frac{R}{a}$ sont des fonctions du seul nombre de Mach amont M

$$h=af_1(M), \qquad R=af_2(M).$$

Mouvements plans. — L'écoulement étant un écoulement plan, nous considérons le cas d'un obstacle constitué par un cercle. La fonction $\Phi(x, y)$ est la suivante :

$$\Phi=Ax\left\{1+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right\}.$$

Nous formons les trois équations du problème :

$$\text{(3.13'')} \qquad A\left\{1-\frac{a^2}{(a+h)^2}\right\}=\frac{q^{*2}}{q_1},$$

$$\text{(3.14'')} \qquad 2A\frac{a^2}{(a+h)^3}=\frac{q_1-\dfrac{q^{*2}}{q_1}}{R},$$

$$\text{(3.15'')} \qquad \frac{3Aa^2}{(a+h)^4}-\frac{Aa^2}{R(a+h)^3}=\frac{(1-\mu^2)q_1}{R^2}.$$

On en déduit encore les deux équations qui résolvent explicitement, avec les hypothèses faites, le problème de l'onde de choc détachée :

$$\text{(3.18)} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{a+h}{a}\right)^2-1=\dfrac{2q^{*2}}{3}\dfrac{(3-2\mu^2)q_1^2-q^{*2}}{(q_1^2-q^{*2})^2}, \\ \dfrac{R}{a+h}=\dfrac{(3-2\mu^2)q_1^2-q^{*2}}{3(q_1^2-q^{*2})}. \end{cases}$$

Les deux quotients $\frac{h}{a}$ et $\frac{R}{a}$ sont des fonctions du seul nombre de Mach amont M

$$h = a g_1(M), \qquad R = a g_2(M).$$

M.	f_1.	g_1.	f_2.	g_2.
1.....	∞	∞	∞	∞
2.....	0,358	0,57	2,26	1,92
3.....	0,220	0,32	1,90	1,43
4.....	0,180	0,26	1,81	1,31
5.....	0,163	0,23	1,77	1,25
6.....	0,152	0,22	1,74	1,23
10.....	0,139	0,20	1,71	1,20
∞.....	0,132	0,18	1,70	1,18

Comparaison des deux méthodes. — Nous avons donné deux solutions approchées du problème de l'onde de choc détachée. Dans la première méthode, nous avons effectué un développement limité au voisinage du sommet de l'onde de choc; dans la seconde méthode, nous avons négligé la compressibilité du fluide dans l'écoulement aval.

La concordance n'est pas bonne. Certaines valeurs numériques diffèrent du simple au double; en outre, les sens de variation de trois des quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 sont différents suivant la méthode utilisée. Les résultats obtenus en négligeant la compressibilité dans l'écoulement aval semblent plus conformes à l'idée intuitive que l'on peut avoir du problème de l'onde de choc détachée; en effet, avec cette approximation, on trouve que l'onde de choc se rapproche de l'obstacle et que son rayon de courbure au sommet diminue à mesure que la vitesse amont augmente, pour les écoulements plans comme pour les écoulements de révolution. Il y a une série de résultats pour lesquels la concordance est satisfaisante; ce sont les valeurs numériques du quotient $\frac{h}{a}$ dans le cas des écoulements de révolution. Ces valeurs numériques, calculées par l'une ou l'autre des deux méthodes, diffèrent peu; en outre, les deux courbes représentant la variation de ce rapport en fonction du nombre de Mach M de l'écoulement initial présentent la même allure générale. Il est naturel que ces résultats relatifs au cas des écoulements de révolution soient meilleurs que ceux qu'on obtient dans le cas des écoulements plans; dans les écoulements plans, le quotient $\frac{h}{a}$ possède, pour chaque valeur de M, une valeur supérieure à celle qu'il possède dans un écoulement de révolution; les développements limités donnent donc des résultats moins précis. Il serait prématuré de conclure que la méthode des développements limités n'est pas satisfaisante en dehors du calcul de $\frac{h}{a}$ dans les écoulements de révolution. Nous nous sommes bornés en effet à l'approximation du second

ordre; d'autre part, l'intuition peut être trompeuse. Pour essayer de trancher la question, il sera nécessaire d'envisager les résultats que l'on obtiendrait en utilisant des développements limités au troisième ou au quatrième ordre près. Cela ne présente aucune difficulté théorique, la seule difficulté réside dans la longueur des calculs. Enfin, quels que soient les résultats que l'on pourra obtenir par la suite, il sera en dernier ressort nécessaire de faire appel à l'expérience qui, seule, peut donner une consécration définitive à une théorie qui se propose précisément d'en prévoir les résultats. Les vitesses que nous avons envisagées sont très grandes, et il ne peut être question, à l'heure actuelle, d'obtenir des vérifications expérimentales.

CHAPITRE IV.

Étude de l'onde de choc attachée au voisinage de son sommet. (1)

Nous envisageons le mouvement d'un fluide compressible autour d'un obstacle présentant une pointe; nous considérerons seulement le cas des écoulements plans symétriques. La vitesse à l'infini étant supersonique, il se forme une onde de choc; celle-ci est détachée pour des vitesses faiblement supersoniques. Si l'angle que font les deux tangentes au sommet de la pointe n'est pas trop grand, ce que nous supposerons, l'onde de choc s'attache à la pointe quand la vitesse amont devient supérieure à un certain minimum. La vitesse d'attachement est déterminée par les équations du choc; pour des vitesses légèrement supérieures à la vitesse d'attachement, l'écoulement aval comporte une zone subsonique; en outre, l'écoulement présente, au sommet de l'obstacle, une singularité qui affecte les diverses dérivées du vecteur vitesse. Lorsque l'écoulement aval est entièrement supersonique, la singularité a disparu; dans le cas d'un obstacle terminé par un segment rectiligne, la disparition a lieu au moment où la vitesse aval à la pointe devient supersonique. Ces conclusions complètent les résultats obtenus par Crocco [16] et par Guderley [27]. Les écoulements que nous considérons sont des écoulements stationnaires dans lesquels nous ferons varier la valeur M du nombre de Mach amont.

4. 1. Étude de la singularité. — *Tangente à l'onde de choc en son sommet.* — L'écoulement avant le choc est un courant supersonique uniforme de vitesses q_1

(1) Les résultats obtenus dans ce chapitre sont relatifs au cas des mouvements plans. Depuis la rédaction de ce mémoire, j'ai complété les résultats relatifs aux écoulements plans (*cf.* [34] et [35]), et les ai étendus récemment aux écoulements de révolution [39] et [42].

(parallèle à Ox); la densité et la pression du fluide ont pour valeur ρ_1 et p_1. Nous désignons par β l'angle de l'onde de choc avec l'axe des abscisses. Les équations du choc nous permettent de déterminer en fonction du nombre de Mach M (¹) de l'écoulement initial et de l'angle β les valeurs des quantités θ, q, ρ et p; on obtient

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(\beta-\theta) = \dfrac{q^{*2} - \mu^2 q_1^2 \cos^2\beta}{q_1^2 \sin\beta\cos\beta}, \\ q = q_1 \dfrac{\cos\beta}{\cos(\beta-\theta)}, \\ \rho = \rho_1 \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta-\theta)}, \\ p = p_1 \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \mu^2 \operatorname{tg}(\beta-\theta)}{\operatorname{tg}(\beta-\theta) - \mu^2 \operatorname{tg}\beta}. \end{cases}$$

Nous désignons par ψ l'angle que fait, au sommet O de l'obstacle, la tangente à l'obstacle avec l'axe de symétrie Ox. Au point O, on a $\theta = \psi$; la première équation (4.1) détermine donc la valeur de l'angle β. Comme il est bien connu, cette équation se résout graphiquement à l'aide du diagramme des polaires de choc.

Les formules (4.1) nous permettent d'écrire, pour tout déplacement le long de l'onde de choc, les relations suivantes :

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{d\beta} = 1 - 2\mu^2\cos^2(\beta-\theta) - \sin(\beta-\theta)\cos(\beta-\theta)\{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{cotg}\beta\}, \\ \dfrac{dp}{d\beta} = 2(1-\mu^2)\rho q^2 \sin(\beta-\theta)\cos(\beta-\theta). \end{cases}$$

Les seconds membres sont des fonctions des seules variables indépendantes M et θ. Nous poserons

$$(4.3)\qquad \begin{cases} f_0(M, \theta) = \dfrac{d\theta}{d\beta}, \\ g_0(M, \theta) = \dfrac{1}{\rho q^2}\left(1 - \dfrac{q^2}{a^2}\right)\dfrac{dp}{d\beta}. \end{cases}$$

Il est convenu que nous nous plaçons toujours sur la face aval de l'onde de choc. Les fonctions f_0 et g_0 sont continues. Au point O, on a $\theta = \psi$; la valeur $M_0(\psi)$ du nombre de Mach pour laquelle l'onde de choc est détachée est telle que, pour $M = M_0(\psi)$, l'angle θ soit maximum; on peut donc écrire

$$f_0(M_0, \psi) = 0.$$

Comme il est connu, pour $M = M_0(\psi)$, la vitesse après le choc au point O est subsonique; cette vitesse devient supersonique pour une valeur $M = M^*(\psi)$. $M^*(\psi)$ est supérieur à $M_0(\psi)$.

(¹) On a naturellement $M^2 = (1-\mu^2)q_1^2 : (q^{*2} - \mu^2 q_1^2)$.

Courbure de l'onde de choc en son sommet. — Le calcul de la courbure de l'onde de choc en son sommet fut effectué par Crocco [16]. Nous reprenons cette question en utilisant d'une part les équations (4.2), d'autre part les équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques, équations (0.10). Les déplacements élémentaires ds et dn que l'on effectue à partir d'un point A de l'onde de choc sur une ligne de courant et sur une des trajectoires orthogonales aux lignes de courant ont pour valeur

$$ds = d\sigma \cos(\beta - \theta) \qquad \text{et} \qquad dn = d\sigma \sin(\beta - \theta),$$

$d\sigma$ désignant l'abscisse cruviligne sur l'onde de choc. Si, dans les équations (4.2), on fait

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial s}\cos(\beta - \theta)\, d\sigma + \frac{\partial \theta}{\partial n}\sin(\beta - \theta)\, d\sigma,$$
$$dp = \frac{\partial p}{\partial s}\cos(\beta - \theta)\, d\sigma + \frac{\partial p}{\partial n}\sin(\beta - \theta)\, d\sigma,$$

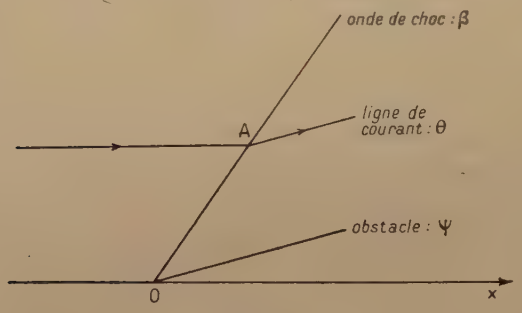


Fig. 15.

on obtient

$$(4.4)\qquad \begin{cases} \left\{1 - \dfrac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta - \theta)\right\}\dfrac{\partial \theta}{\partial s} = f_1(\mathrm{M}, \theta)\dfrac{d\beta}{d\sigma}, \\ \left\{1 - \dfrac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta - \theta)\right\}\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = g_1(\mathrm{M}, \theta)\dfrac{d\beta}{d\sigma}; \end{cases}$$

$$(4.5)\qquad \begin{cases} f_1 = \cos(\beta - \theta) f_0 - \sin(\beta - \theta) g_0, \\ g_1 = \left(1 - \dfrac{q^2}{a^2}\right)\sin(\beta - \theta) f_0 + \cos(\beta - \theta) g_0. \end{cases}$$

Les fonctions $f_1(\mathrm{M}, \theta)$ et $g_1(\mathrm{M}, \theta)$ sont des fonctions continues La première des équations (4.4) détermine en particulier le rapport des rayons de courbure R et $\mathcal{R}$ de l'onde de choc et de l'obstacle au point O

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathcal{R}} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right)_{0=\psi} : \left(\frac{d\beta}{d\sigma}\right)_{0=\psi}.$$

Les valeurs numériques du rapport $\frac{\mathrm{R}}{\mathcal{R}}$ sont représentées sur la figure 16 ($k = 1,4$). Les diverses courbes correspondent à diverses valeurs de l'angle ψ. Le nombre

de Mach M a été porté en abscisse; sur l'axe des ordonnées, $M = 1$. Les courbes $M = M_0(\psi)$ et $M = M^*(\psi)$ ont été indiquées.

Le rapport $\frac{R}{\mathcal{R}}$ possède le même signe que la fonction $f_1(M, \psi)$.

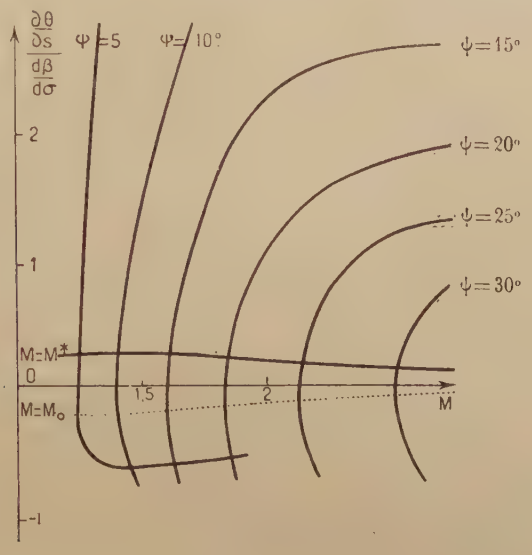


Fig. 16. — Courbure au sommet de l'onde de choc attachée.

Lorsque $M = M_0(\psi)$, cette fonction est négative; elle est positive pour $M = M^*(\psi)$; elle s'annule pour une certaine valeur $M = M_1(\psi)$ définie par l'équation

$$f_1(M_1, \psi) = 0.$$

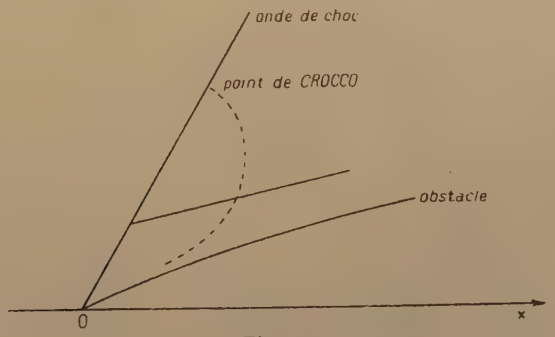


Fig. 17.

Pour les valeurs de M comprises entre $M_0(\psi)$ et $M_1(\psi)$, les sens de concavité de l'obstacle et de l'onde de choc devraient, au point O, être différents. Nous donnerons à ce phénomène qui semble contredit par l'expérience le nom de paradoxe de Crocco. Pour lever cette contradiction, Guderley [27] fut amené à

considérer que l'onde de choc possédait en son sommet un rayon de courbure nul aussi longtemps que l'on a $M < M_1(\psi)$ (1).

L'obstacle étant convexe vers l'amont, il en résulte que l'écoulement après le choc comprend une région dans laquelle les lignes de courant tournent leur concavité vers l'aval; cette région est limitée par le lieu des points d'inflexion des lignes de courant, qui rencontre l'onde de choc en un point appelé point de Crocco. Lorsque $M > M_1(\psi)$, la région précédente a disparu, et la courbure de l'onde de choc au point O est déterminée par la première des équations (4.4). Lorsque le nombre de Mach M est infini, les formules précédentes se simplifient et l'on obtient

$$\operatorname{tg}(\beta - \psi) = \mu^2 \operatorname{tg}\beta,$$

$$\frac{R}{\mathcal{R}} = (1 - \mu^2)(1 + 3\mu^2)\cos^3(\beta - \psi)(1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2\beta).$$

Dérivées successives de la courbure de l'onde de choc en son sommet. — Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être étendus à toutes les dérivées partielles de la fonction θ. On peut différentier les formules (4.4) le long de l'onde de choc. En conservant seulement les termes dans lesquels interviennent des dérivées du second ordre, on obtient

$$(4.6)\qquad \begin{cases} f_1 \dfrac{d^2\beta}{d\sigma^2} = \left\{1 - \dfrac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta - \theta)\right\}\left\{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\dfrac{ds}{d\sigma} + \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial s}\right)\dfrac{dn}{d\sigma}\right\} + \dots, \\ g_1 \dfrac{d^2\beta}{d\sigma^2} = \left\{1 - \dfrac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta - \theta)\right\}\left\{\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial n}\right)\dfrac{ds}{d\sigma} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial n^2}\dfrac{dn}{d\sigma}\right\} + \dots. \end{cases}$$

On dérive ensuite les équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques, en négligeant toujours les dérivées du premier ordre

$$\rho q^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) + \dots,$$

$$\rho q^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial n^2} = \left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \dots.$$

On a par ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right).$$

---

(1) En nous inspirant des idées de Guderley, nous avons montré que le paradoxe de Crocco n'existait pas. L'équation de l'onde de choc contient des termes analytiques et des termes non analytiques; ces derniers sont prépondérants précisément pour $M < M_1(\psi)$; si l'on en tient compte, on trouve que, dans tous les cas, les sens de concavité de l'onde de choc et de l'obstacle au point O sont les mêmes. *Voir* références [34] et [35].

Ces six relations déterminent deux des dérivées partielles du second ordre de la fonction θ

$$(4.7)\qquad \begin{cases} \left\{1-\frac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta-\theta)\right\}^2 \dfrac{\partial^2\theta}{\partial s^2} = f_2(M,\theta)\dfrac{d^2\beta}{d\sigma^2} + P_2(M,\theta), \\ \left\{1-\frac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta-\theta)\right\}^2 \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial s}\right) = g_2(M,\theta)\dfrac{d^2\beta}{d\sigma^2} + Q_2(M,\theta); \end{cases}$$

$$(4.8)\qquad \begin{cases} f_2 = \cos(\beta-\theta) f_1 - \sin(\beta-\theta) g_1, \\ g_2 = \left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\sin(\beta-\theta) f_1 + \cos(\beta-\theta) g_1. \end{cases}$$

Les fonctions $P_2(M,\theta)$ et $Q_2(M,\theta)$ sont connues à partir des dérivées partielles du premier ordre de la fonction θ. En particulier, ces quantités sont nulles au point O si l'obstacle admet en O un point d'inflexion, c'est-à-dire si $\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)_0 = 0$. Les fonctions $f_2(M,\theta)$ et $g_2(M,\theta)$ sont des fonctions continues.

En poursuivant les dérivations, on obtient les formules générales suivantes :

$$(4.9)\qquad \begin{cases} \left\{1-\frac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta-\theta)\right\}^r \dfrac{\partial^r\theta}{\partial s^r} = f_r(M,\theta)\dfrac{d^r\beta}{d\sigma^r} + P_r(M,\theta), \\ \left\{1-\frac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta-\theta)\right\}^r \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\partial^{r-1}\theta}{\partial s^{r-1}}\right) = g_r(M,\theta)\dfrac{d^r\beta}{d\sigma^r} + Q_r(M,\theta); \end{cases}$$

$$(4.10)\qquad \begin{cases} f_r = \cos(\beta-\theta) f_{r-1} - \sin(\beta-\theta) g_{r-1}, \\ g_r = \left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\sin(\beta-\theta) f_{r-1} + \cos(\beta-\theta) g_{r-1}. \end{cases}$$

Les fonctions $P_r(M,\theta)$ et $Q_r(M,\theta)$ sont connues à partir des dérivées partielles d'ordre inférieur à r de la fonction θ. En particulier, ces quantités sont nulles au point O si, en ce point, $\frac{\partial^i\theta}{\partial s^i} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Les fonctions $f_r(M,\theta)$ et $g_r(M,\theta)$ sont des fonctions continues. En introduisant l'angle de Mach α, il est possible d'expliciter les fonctions f_r et g_r (1); on obtient en effet

$$(4.11)\qquad \frac{f_r\cos\alpha - g_r\sin\alpha}{f_0\cos\alpha - g_0\sin\alpha} = \left\{\frac{\sin(\beta-\theta-\alpha)}{\sin\alpha}\right\}^r.$$

Lorsqu'on a $M > M^*(\psi)$, la fonction f_0 est positive, tandis que la fonction g_0 est négative; on en déduit par récurrence que toutes les fonctions f_r sont positives, tandis que toutes les fonctions g_r sont négatives. Lorsque $M = M^*(\psi)$, on obtient

$$(4.12)\qquad \begin{cases} f_r(M^*,\psi) = \cos^r(\beta-\psi) f_0(M^*,\psi), \\ g_r(M^*,\psi) = 0. \end{cases}$$

---

(1) Le cas d'une vitesse subsonique, pour lequel α n'existe pas, a été traité depuis dans la référence [34].

L'étude du cas où $M < M^*(\psi)$ est plus délicate. Pour $M = M_0(\psi)$, on a $f_0 < 0$ et $g_0 > 0$; on en déduit

$$f_1(M_0, \psi) < 0, \qquad g_1(M_0, \psi) > 0.$$

La racine $M_1(\psi)$ de l'équation $f_1(M_1, \psi) = 0$ est donc comprise entre les valeurs $M_0(\psi)$ et $M^*(\psi)$. Les calculs numériques nous ont montré que cette racine était unique. En reprenant le raisonnement précédent, on prouve que l'équation $f_2(M_2, \psi) = 0$ possède une racine comprise entre les valeurs $M_1(\psi)$ et $M^*(\psi)$; nous admettons que cette racine est unique (1). En raisonnant de proche en proche, on établit que l'équation $f_r(M, \psi) = 0$ possède une racine comprise entre les valeurs $M_{r-1}(\psi)$ et $M^*(\psi)$; nous admettons encore que cette racine est unique. Ainsi l'étude des fonctions $f_r(M, \psi)$ permet de mettre en évidence une suite de nombres de Mach $M_r(\psi)$ qui possèdent les deux propriétés suivantes :

1° $$M_0(\psi) < M_1(\psi) < \ldots < M_r(\psi) < \ldots < M^*(\psi),$$

2° $$\lim_{r=\infty} M_r(\psi) = M^*(\psi).$$

La seconde propriété est une conséquence de la relation (4.12) qui exprime la valeur de $f_r(M^*, \psi)$ et de l'hypothèse d'unicité que nous avons faite.

Ces résultats nous permettent de montrer que le paradoxe de Crocco possède un caractère très général. Considérons en effet un obstacle terminé par une pointe O telle qu'en ce point on ait $\frac{\partial^i \theta}{\partial s^i} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Les calculs précédents déterminent la valeur du quotient

$$\left(\frac{\partial^r \theta}{\partial s^r}\right) : \left(\frac{d^r \beta}{d\sigma^r}\right).$$

Ce quotient possède le même signe que la fonction $f_r(M, \psi)$; il est positif pour $M > M_r(\psi)$, tandis que son signe peut varier lorsque $M < M_r(\psi)$. En particulier, lorsque M est légèrement inférieur à $M_r(\psi)$, $f_r(M, \psi)$ est négatif, donc les concavités, au point O, de l'obstacle et de l'onde de choc sont différentes. On peut donc encore refaire l'hypothèse de Guderley : $\frac{d^r \beta}{d\sigma^r}$ est infini au point O aussi longtemps que $M < M_r(\psi)$. Pour $M > M_r(\psi)$, la première formule (4.10) est applicable. Pour un tel obstacle, on obtient donc les résultats suivants :

$$\left(\frac{d^i \beta}{d\sigma^i}\right) = \infty \quad \text{pour} \quad M < M_i(\psi),$$

$$= 0 \quad \text{»} \quad M > M_i(\psi) \quad (i < r).$$

$$\left(\frac{d^r \beta}{d\sigma^r}\right) = \infty \quad \text{»} \quad M \leqq M_r(\psi).$$

(1) Cette hypothèse d'unicité relative au nombre $M_2(\psi)$ et aux nombres analogues $M_r(\psi)$ a été démontrée depuis dans une communication au Congrès de Poitiers [34].

Dans le cas particulier d'un obstacle terminé par un segment rectiligne, on obtient le phénomène suivant : chacune des dérivées de la courbure de l'onde de choc au point O passe de la valeur infinie à la valeur zéro lorsque la valeur du nombre de Mach de l'écoulement amont passe par les valeurs $M_1(\psi)$, $M_2(\psi)$, ... Cette suite de valeurs singulières est croissante et sa limite est $M^*(\psi)$, donc l'onde de choc possède un segment rectiligne dès que la vitesse après le choc est sonique. Lorsque cette vitesse est supersonique, il n'y a plus de singularité à la pointe.

4.2. Cas des obstacles terminés par un trièdre, lorsque la vitesse aval au sommet de l'obstacle est supersonique ([1]). — Les résultats du paragraphe précédent permettent de calculer la courbure de l'onde de choc en son sommet, lorsque l'obstacle présente en son sommet un rayon de courbure fini, non nul. Dans le

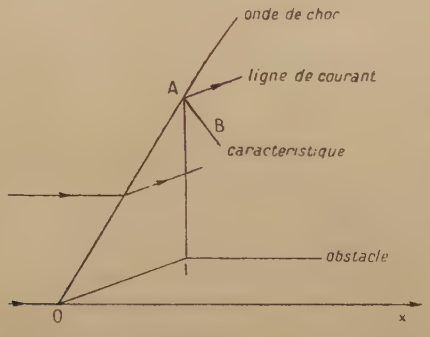


Fig. 18.

cas d'un obstacle terminé par un bord rectiligne OI, l'onde de choc présente une singularité en O aussi longtemps que $M < M^*(\psi)$. Nous allons maintenant étudier l'onde de choc attachée à la pointe d'un tel obstacle, lorsque la vitesse aval au point O est supersonique. L'écoulement aval est un courant uniforme le long du segment de droite OI. Mais, en I, le fluide subit une détente de Meyer; le courant uniforme est limité par la caractéristique issue du point I; celle-ci rencontre l'onde de choc en un point A qui limite, sur cette onde, la partie rectiligne OA.

Au point A, la courbure de l'onde de choc est discontinue; elle passe de la valeur zéro à une valeur non nulle. L'écoulement engendré par la partie rectiligne de l'onde de choc et la détente de Meyer autour du point I doivent se raccorder suivant une certaine courbe; d'après la théorie générale, cette courbe est une caractéristique dans chacun des deux écoulements. Sur cette caractéristique, les vitesses sont continues. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit qu'elles aient la même valeur en un point donné, au point A par exemple. En effet la loi

([1]) Pour le cas où la vitesse aval est subsonique, traité depuis, on pourra se reporter aux références [34] et [35]; pour le cas des écoulements de révolution, *voir* référence [42].

de variation de q en fonction de θ le long d'une caractéristique est indépendante de l'écoulement envisagé; il en résulte que, dans les deux écoulements, le vecteur vitesse sur la caractéristique commune est représenté par la même fonction de l'abscisse curviligne. La coïncidence en un point entraîne donc la coïncidence sur toute la courbe. Pour que la vitesse soit continue en A, il faut et il suffit que la partie curviligne de l'onde de choc parte tangentiellement à OA. Les caractéristiques issues de A dans la détente de Meyer et dans l'écoulement issu du choc sont tangentes en ce point. Comme elles doivent coïncider, elles ont en particulier même courbure en A. Cette condition suffit à déterminer la courbure de l'onde de choc. Nous allons calculer cette courbure en fonction du nombre de Mach de l'écoulement amont et de la direction ψ du segment rectiligne OI.

Courbure de la caractéristique dans la détente de Meyer. — Nous utilisons les coordonnées polaires r, ω; le pôle est placé au point I, l'axe polaire est choisi perpendiculaire à la direction de la vitesse ayant la valeur critique. L'angle de Mach possède la valeur suivante :

$$\operatorname{tg}\alpha = \mu \operatorname{cotg} \mu\omega.$$

L'une des lignes de Mach fait avec le rayon vecteur un angle nul; l'autre ligne de Mach, l'angle 2α. Son équation polaire est donc

$$r^2 = \bar{r}^2 (\sin \mu\omega)^{-1} (\cos \mu\omega)^{-\frac{1}{\mu^2}}.$$

$\bar{r}$ est une longueur constante. Le rayon de courbure au point A possède la valeur

$$\mathcal{R}_A = IA \frac{1}{\sin 2\alpha \{ (1-\mu^2) \cos 2\alpha - \mu^2 \}}.$$

Courbure de la caractéristique dans l'écoulement après le choc. — Soit, sur la caractéristique issue de A, un point B voisin de A; $AB = \delta$. L'angle que fait la caractéristique avec l'axe des abscisses est $\varphi = \theta - \alpha$; lorsqu'on passe du point A au point B, on a

$$d\varphi = d\theta - d\alpha, \qquad \frac{dq}{q} = -\operatorname{tg}\alpha \, d\theta.$$

L'angle de Mach α est défini par la relation $a = q \sin\alpha$; ce qui permet de calculer

$$(1-\mu^2) \sin^2\alpha = \sin(\beta-\theta) \cos(\beta-\theta) \{ \operatorname{tg}\beta - \mu^2 \operatorname{tg}(\beta-\theta) \},$$

$$d\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \mu^2 \cos^2\alpha}{(1-\mu^2)\cos^2\alpha} d\theta.$$

Dans le déplacement entre A et B, on a

$$d\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} \cos\alpha - \frac{\partial\theta}{\partial n} \sin\alpha \right) \delta.$$

En utilisant les équations du mouvement, on en déduit

$$\frac{1}{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\cos\alpha - \frac{\partial\theta}{\partial n}\sin\alpha\right)\frac{(1-\mu^2)\cos 2\alpha - \mu^2}{(1-\mu^2)\cos^2\alpha}.$$

Afin de déterminer le rayon de courbure R de l'onde de choc, nous égalons les deux valeurs de $\mathcal{R}_A$; on trouve ainsi

$$\frac{OI}{R} = -\frac{2(1-\mu^2)\cos^3\alpha\sin^2(\beta-\theta-\alpha)}{(f_0\cos\alpha - g_0\sin\alpha)\sin(\beta-\theta)}. \tag{4.13}$$

La valeur de l'angle θ est celle de l'angle ψ que fait avec l'axe des abscisses le segment de droite OI. La figure 19 représente, pour diverses valeurs de ψ, les variations du rapport $\frac{OI}{R}$ en fonction du nombre de Mach M.

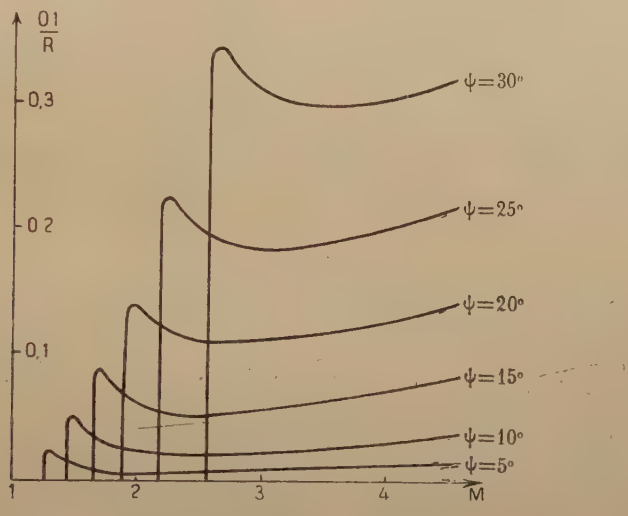


Fig. 19. — Discontinuité de la courbure de l'onde de choc attachée. Valeur de la discontinuité.

L'onde de choc devient rectiligne lorsqu'on a $M = M^*(\psi)$; pour cette valeur, la courbure est continue au point A. Lorsque le nombre de Mach initial augmente, le rayon de courbure de l'onde de choc au point A diminue, passe par un minimum, augmente, passe par un maximum et diminue ensuite en tendant vers une valeur limite.

Note additive (rédigée au moment de l'impression).

Le chapitre que nous venons de terminer est loin d'avoir épuisé les questions traitées; comme nous l'avons indiqué dans de nombreuses notes, les résultats ont été complétés depuis la rédaction de cette thèse qui remonte à 1949. Nous allons résumer ici les résultats obtenus depuis.

1. Lorsque l'obstacle est déterminé par un segment rectiligne OI, il n'existe pas d'onde analytique au point O lorsque la vitesse après le choc au point O est subsonique. Il est donc naturel de chercher à représenter l'onde de choc par une équation de la forme suivante :

$$x = y\cot g\beta + Ay^{\lambda} + \dots . \tag{1}$$

En écrivant les équations du mouvement ainsi que les conditions sur l'onde de choc et sur l'obstacle, nous avons déterminé la valeur de l'exposant λ; cette valeur est fonction des valeurs M et ψ. Pour un obstacle donné, ψ est constant; la fonction $\lambda(M)$ est croissante, elle est égale à l'unité pour $M = M_0(\psi)$; elle devient infinie pour $M = M^*(\psi)$; elle prend une valeur entière quelconque $r+1$, précisément lorsque $M = M_r(\psi)$. Le calcul exact du coefficient A exigerait la connaissance de tous les termes non écrits au second membre de l'équation (1), puisque nous devrions écrire que, au point I, la vitesse est sonique; un calcul approché, fait en négligeant ces termes, montre que A est positif, donc l'onde de choc est convexe vers l'amont. (*Cf.* [34] et [35].)

2. Lorsque l'obstacle possède en son sommet un rayon de courbure fini, non nul, l'onde de choc est représentée par une équation de la forme suivante :

$$x = y\cot g\beta + Ay^{\lambda} + \frac{1}{\sin^3\beta}\frac{y^2}{2R} + \dots . \tag{2}$$

Si $M < M_1(\psi)$, on a $\lambda < 2$; le troisième terme est négligeable et l'onde possède en son sommet un rayon de courbure nul. Si $M > M_2(\psi)$, on a $\lambda > 2$, et le second terme est négligeable, donc l'onde de choc possède en son sommet un rayon de courbure R donné par la théorie précédente. Comme A est positif, l'onde de choc est toujours convexe vers l'amont pour $M_0(\psi) < M < M_1(\psi)$. Le paradoxe de Crocco n'existe pas, son apparition résultait de l'hypothèse d'analyticité que nous avions faite pour l'équation de l'onde de choc. (*Cf.* [34] et [35].)

3. L'étude des écoulements de révolution permet de retrouver tous ces résultats. Les démonstrations sont beaucoup plus délicates, car l'écoulement supersonique le long d'un cône n'est pas uniforme. Toutes les relations algébriques que nous avons rencontrées dans ce chapitre sont remplacées par des équations différentielles dont l'intégration est fort laborieuse. Cependant nous avons calculé le rapport des courbures de l'onde de choc et de l'obstacle lorsque $\psi = 20°$. On trouve

$$\frac{R}{\mathcal{R}} = -0{,}23 \quad 0{,}82 \quad 1{,}71 \quad 2{,}87 \quad 1{,}76 \quad 1{,}05$$

pour

$$M = \quad 1{,}2175 \quad 1{,}2553 \quad 1{,}3144 \quad 1{,}6531 \quad 2{,}8387 \quad 9{,}5928.$$

Il est tout à fait remarquable que le rapport $\frac{R}{\mathcal{R}}$ soit encore négatif pour $M = M_0(\psi)$. Le paradoxe de Crocco subsiste. Ce paradoxe n'est encore qu'apparent; la

recherche d'une onde de choc non analytique permet de montrer que l'onde de choc est toujours convexe vers l'amont. Le cas d'un obstacle terminé par un segment rectiligne peut s'étudier; lorsque la vitesse après le choc au point O est supersonique, on calcule la discontinuité de courbure au point A. Mais la formule (4.13) doit être remplacée par une équation de Ricatti. Ces questions sont exposées dans un nouveau Mémoire qui doit être publié au début de l'année 1952 par l'Office National d'Études et Recherches Aéronautiques. (*Voir* aussi référence [39].)

CHAPITRE V.

Étude des branches infinies des ondes de choc.

Lorsqu'un fluide subit un choc suivant une certaine surface dite onde de choc, les plans tangents à l'infini sont parallèles en chaque point à l'une des directions de Mach de l'écoulement initial. S'il n'en était pas ainsi, la dépense d'énergie nécessaire pour engendrer le mouvement devrait être infinie; cela n'est pas réalisable. L'écoulement initial étant uniforme, l'onde de choc possède un cône asymptotique; il est intéressant de savoir si elle admet un cône asymptote ou bien une nappe infinie parabolique.

Écoulements de révolution. — Nous supposons que l'on peut représenter, au voisinage de l'infini, l'onde de choc par un développement en série de la forme suivante :

$$r = r \operatorname{cotg} \beta_1 - \alpha r^n + \dots .$$

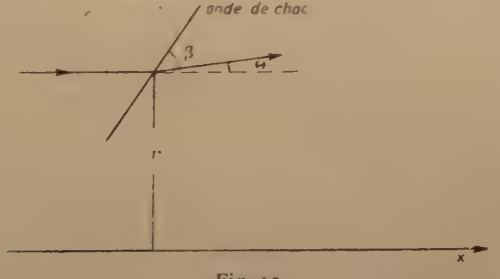


Fig. 20.

β_1 est l'angle de Mach de l'écoulement initial; α et n désignent deux constantes; n est inférieur à l'unité.

A l'aide des équations du choc écrites au voisinage de l'infini, nous déterminons l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde :

$$\frac{q}{q_1} = 1 + 2n\alpha r^{n-1}(1-\mu^2)\sin^2\beta_1\cos\beta_1 + \dots .$$
$$\theta = -2n\alpha r^{n-1}(1-\mu^2)\sin^2\beta_1\cos^2\beta_1 + \dots .$$
$$\frac{p}{p_1} = 1 - 2n\alpha r^{n-1}(1-\mu^2)\sin\beta_1\cos\beta_1 + \dots .$$

Lorsqu'on effectue un déplacement élémentaire $d\sigma$ sur l'onde de choc, la direction de la vitesse et la pression subissent les variations infiniment petites suivantes :

$$d\theta = -2n(n-1)\alpha r^{n-2}(1-\mu^2)\sin^2\beta_1\cos^2\beta_1 d\sigma + \dots,$$
$$\frac{dp}{p_1} = -2n(n-1)\alpha r^{n-2}(1+\mu^2)\sin^2\beta_1\cos\beta_1 d\sigma + \dots.$$

On obtient ainsi deux relations entre les dérivées partielles écrites en coordonnées intrinsèques des fonctions θ et p. En effet

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial s}\cos(\beta-\theta)\,d\sigma + \frac{\partial\theta}{\partial n}\sin(\beta-\theta)\,d\sigma,$$
$$dp = \frac{\partial p}{\partial s}\cos(\beta-\theta)\,d\sigma + \frac{\partial p}{\partial n}\sin(\beta-\theta)\,d\sigma.$$

Les équations du mouvement constituent deux autres relations vérifiées par ces dérivées

$$\rho q^2 \frac{\partial\theta}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial n},$$
$$\rho q^2\left\{\frac{\partial\theta}{\partial n} + \frac{\sin\theta}{r}\right\} = \left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{\partial p}{\partial s}.$$

On en déduit

$$\left\{1-\frac{q^2}{a^2}\sin^2(\beta-\theta)\right\}\frac{\partial\theta}{\partial s}$$
$$= \cos(\beta-\theta)\frac{d\theta}{d\sigma} - \sin(\beta-\theta)\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{\rho q^2}\frac{dp}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{r}\sin(\beta-\theta)\cos(\beta-\theta).$$

Au voisinage de l'infini, le coefficient de $\frac{\partial\theta}{\partial s}$ a pour valeur

$$-2n\alpha r^{n-1}\sin\beta_1\cos\beta_1 + \dots,$$

tandis que le second membre s'écrit

$$-2n\alpha r^{n-2}\sin^3\beta_1\cos^3\beta_1(1-\mu^2)(2n-1) + \dots.$$

Le développement en série de l'accélération du fluide en fonction des puissances décroissantes de r est donc le suivant :

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial s} = \dfrac{1-\mu^2}{r}\sin^2\beta_1\cos^2\beta_1(2n-1) + \dots, \\ \dfrac{\partial q}{\partial s} = -q\dfrac{1-\mu^2}{r}\sin^2\beta_1\cos\beta_1(2n-1) + \dots. \end{cases}$$

Lorsque $2n-1$ est différent de zéro, l'accélération décroît comme $\frac{1}{r}$; lorsque $2n-1$ est nul, la décroissance est plus rapide. Il est naturel d'admettre que la forme prise par l'onde de choc est telle que l'écoulement engendré tende le plus rapidement possible vers un écoulement dans lequel l'accélération est

nulle; il en résulte que l'on doit choisir pour n la valeur $\frac{1}{2}$. L'onde de choc admet donc une branche parabolique. Si l'on néglige les puissances de r d'exposant inférieur à n, l'onde de choc a pour équation

$$x = r\cot g\beta_1 + \alpha r^{\frac{1}{2}} \qquad (\alpha < 0).$$

Cette courbe est une parabole de direction asymptotique β_1. Dans le cas où l'onde de choc est détachée, nous savons déterminer le cercle osculateur au sommet de l'onde; si alors nous assimilons l'onde de choc à une parabole, cette parabole est déterminée par la connaissance de la direction asymptotique et du cercle osculateur en un point.

Écoulements plans. — Dans un écoulement plan symétrique rapporté aux axes de coordonnées cartésiennes Ox parallèle à l'axe de symétrie et Oy perpendiculaire, on calcule de façon analogue :

$$(5.2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial s} &= 2(n-1)\frac{1-\mu^2}{y}\sin^2\beta_1\cos^2\beta_1 + \dots,\\ \frac{1}{\rho q^2}\frac{\partial p}{\partial s} &= 2(n-1)\frac{1-\mu^2}{y}\sin^3\beta_1\cos\beta_1 + \dots,\\ \frac{\partial\theta}{\partial n} &= -2(n-1)\frac{1-\mu^2}{y}\sin\beta_1\cos^3\beta_1 + \dots,\\ \frac{1}{\rho q^2}\frac{\partial p}{\partial n} &= -2(n-1)\frac{1-\mu^2}{y}\sin^2\beta_1\cos^2\beta_1 + \dots. \end{aligned}\right.$$

Il n'est plus possible de disposer de l'exposant n afin d'annuler le coefficient du terme en $\frac{1}{y}$; nous allons donc calculer les dérivées suivantes.

Nous différentions deux des relations écrites :

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\cos(\beta-\theta) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)\sin(\beta-\theta),$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\cos(\beta-\theta) + \frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}\sin(\beta-\theta).$$

L'application du théorème de Schwartz étendu aux coordonnées intrinsèques

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)^2$$

fournit la première relation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\cos^2(\beta-\theta) - \frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}\sin^2(\beta-\theta)$$
$$= -4(n-1)\frac{1-\mu^2}{y^2}\sin^3\beta_1\cos^3\beta_1 - 4(n-1)^2\frac{(1-\mu^2)^2}{y^2}\sin^3\beta_1\cos^5\beta_1 + \dots.$$

Nous dérivons ensuite deux des équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques :

$$\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial\rho q^2}{\partial s}+\rho q^2\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\partial\rho q^2}{\partial n}+\rho q^2\frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}=\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial}{\partial n}\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)+\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right).$$

Les dérivées partielles de la vitesse se calculent à l'aide du théorème de Bernoulli généralisé $dp+\rho q\,dq=p\,d\operatorname{Log}p_0$. $\operatorname{Log}p_0$ est fonction de la seule pseudo-variable n; on calcule sa dérivée en utilisant les relations

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \qquad \text{et} \qquad \frac{p_0}{\rho_0}=\frac{k+1}{2k}q^{*2}.$$

Cette dérivée décroît plus vite que $r^{n-2}\,dr$, tandis que dq décroît comme $r^{n-2}\,dr$.

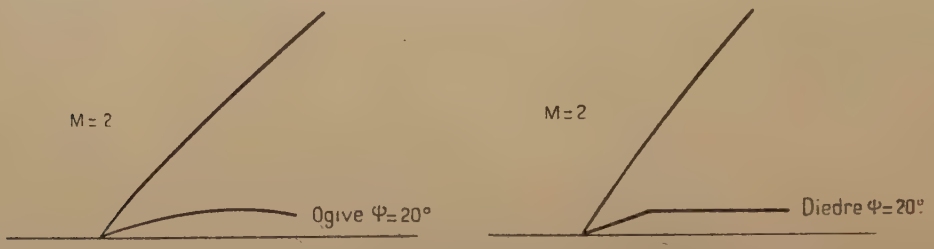


Fig. 21. — Écoulements plans avec onde de choc attachée.

Il en résulte que, dans l'approximation adoptée, l'écoulement aval est encore un écoulement isentropique. On obtient ainsi la seconde relation

$$\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial n^2}=-4(n-1)^2\frac{(1-\mu^2)^2}{y^2}\sin\beta_1\cos^3\beta_1(\sin^2\beta_1+k)+\ldots.$$

La dérivée de l'accélération a pour valeur

$$(5.3)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial s^2}= \dfrac{(2n-1)(2n-2)}{n\alpha}\dfrac{1-\mu^2}{y^{n+1}}\sin^2\beta_1\cos^2\beta_1+\ldots,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 q}{\partial s^2}=-q_1\dfrac{(2n-1)(2n-2)}{n\alpha}\dfrac{1-\mu^2}{y^{n+1}}\sin^2\beta_1\cos\beta_1+\ldots.\end{cases}$$

Nous admettons toujours que la forme prise par l'onde de choc est telle que l'écoulement engendré tende le plus rapidement possible vers un écoulement uniforme; comme nous ne pouvons annuler le premier terme du développement en série de l'accélération, nous annulerons le premier terme du développement en série de la dérivée de l'accélération. Cela nous oblige encore à prendre pour n la valeur $\frac{1}{2}$. En première approximation, la courbe qui représente l'onde de choc se confond à l'infini avec une parabole. Nous avons appris au cours des chapitres précédents à déterminer la courbure en un point de l'onde de choc; nous remplaçons donc, en première approximation, cette onde de choc par une parabole dont on connaît un cercle osculateur et la direction asymptotique.

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages consultés.

[1] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, 1903.

[2] H. Villat, *Mécanique des fluides*, 1930.

[3] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th edition, 1932.

[4] J. Pérès, *Cours de Mécanique des fluides*, 1936.

[5] R. Sauer, *Theoretische Einführung in die Gasdynamik*, 1943.

[6] J. Leray, *Les écoulements continus sans frottement*, 1947.

[7] H. W. Liepmann and A. E. Puckett, *Aerodynamics of a compressible fluid*, 1947.

[8] R. Courant and K. O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, 1948.

[9] S. Goldstein, *Modern developments in fluid dynamics*, third volume, 1950.

Parmi les articles se rapportant aux divers problèmes abordés, on peut citer :

[10] H. Hugoniot, *Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits* (*J. Éc. Polytech.*, t. 58, 1889, p. 1-125).

[11] P. Molenbrock, *Uber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials* (*Archiv. der Mathematik und Physik*, t. 9, 1890, p. 157-195).

[12] S. A. Tchapliguine, *Sur les jets gazeux* (*Ann. Scient. Univ. Imp. Moscou, Section Physique-Mathématique*, t. 21, 1904).

[13] Th. Meyer, *Uber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Uberschallgeschwindigkeit strömt* (*Forschungsheft des Vereins Ingenieure*, vol. 62, 1908, p. 31-67).

[14] F. Tricomi, *Sulle equazioni lineari alle derivate partiale di 2° ordine, di tipo misto* (*Mém. reale Accad. Lincei, classe di scienze fisiche*, t. 14, 1922, p. 133-247).

[15] L. Crocco, *Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas* (*Atti reale Accad. Lincei*, t. 23, 1936, p. 115-124); *Eine neue Stromungsfunktion für die Erforschung der Gase mit Rotation* (*Z. angew. Mathematik und Mechanik*, t. 17, 1937, p. 1-7).

[16] L. Crocco, *Singularita della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro* (*Atti del I° Congresso del Unione Matematica Italiana*, 1937, p. 597-615).

[17] W. Tollmien, *Zum Ubergang von Unterschall in Uberschallströmusng* (*Z. angew. Mathematik und Mechanik*, t. 17, 1937, p. 117-136.

[18] M. Roy, *Sur les hypothèses de l'écoulement permanent d'un fluide parfait et l'hypothèse des courants* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 187-189).

[19] F. Ringleb, *Exakte Lösungen des Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung*, (*Z. angew, Mathematik und Mechanik*, t. 20, 1940, p. 185-198).

[20] Th. Von Karmann, *Compressibility effects in aerodynamics* (*J. Aeronaut.*, vol. 8, 1951, p. 337-356).

[21] J. Pérès, *Quelques transformations des équations du mouvement d'un fluide compressible* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 501-504).

[22] J. C. P. Miller, *Tables of solution of the differential equation* $y'' = xy$, Cambridge University Press, 1946.

[23] P. Germain, *Sur le problème de l'onde détachée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 221, 1947, p. 1051-1053).

[24] Th. Von Karman, *The similarity law of transsonic flow* (*J. Aeronaut. Sc.*, vol. 14, 1947, p. 182-190).

[25] Th. Von Karmann, *Supersonic aerodynamics. Principles and applications* (*J. Aeronaut. Sc.*, vol. 14, 1947, p. 373-412).

[26] M. J. Lighthill, *The hodograph transformation in transsonic flow. I. Symmetrical channels* (*Proc. Roy. Soc., London*, A, vol. 191, 1947).

[27] K. G. Guderley, *Considérations of the structure of mixed subsonic-supersonic flow patterns* (*Technical report*, Project H. A. 219, 1947).

[28] M. Roy, *Problèmes divers de dynamique des fluides aux grandes vitesses* (*Publ. scient. et techn. Minist. Air*, n° 203, 1947).

[29] R. E. Meyer, *The method of characteristics for problems of supersonic flow involving two independent variables* (*Quat. J. Mechan, Appl. Math.*, vol. 1, partie 2, juin 1948).

[30] M. M. Munk and R. C. Prim, *Surface-pressure gradient and shock-front curvature at the edge of a plane ogive with attached shock front* (*J. Aeronaut.*, vol. 15, 1948, p. 691-695).

[31] J. Dungundji, *An investigation of the detached shock in front of a body of revolution* (*J. Aeronaut. Sc.* vol. 15, 1948, p. 699-705).

[32] T. Y. Thomas, *Calculation of the curvatures of attached shock waves* (*J. Math. Phys.*, vol. 27, n° 4, 1949, p. 279-297).

[33] T. Y. Thomas, *The consistency relations for shock waves* (*J. Math. Phys.*, vol. 28, n° 1, 1949, p. 62-90).

Le présent travail a été résumé en quatre Notes parues aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences :*

1. *Étude des écoulements gazeux au voisinage de la vitesse du son* (t. 229, 1949, p. 102-104).
2. *Détermination approchée de l'onde de choc détachée* (t. 229, 1949, p. 492-493).
3. *Écoulement potentiel discontinu d'un fluide parfait compressible* (t. 229, p. 510-511).
4. *Étude de la singularité au sommet d'une onde de choc attachée, dans un écoulement à deux dimensions* (t. 229, 1949, p. 923-925).

Bibliographie complémentaire.

[34] H. Cabannes, *Détermination de l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe est subsonique* (*Congrès international de Mécanique de Poitiers*, 1950; *Publ. scient. et techn. Minist. Air*, n° 250, p. 181-195).

[35] H. Cabannes, *Sur l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe de l'obstacle est subsonique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 1830-1832).

[36] Ko Tamada, *Studies of two dimensional flow of gas with special reference to the flow through various nozzles* (*Studies in mathematical Physics Iwanami Shoten Pub. Tokyo*, t. **1**, 1950, p. 56-92).

[37] G. B. Witham, *The behaviour of supersonic flow post a body of revolution, far from the axis* (*Proc. Roy. Soc. London*, série A, vol. **201**, 1950, p. 89-109).

[38] Th. Von Karman et J. Fabri, *Écoulement transsonique à deux dimensions le long d'une paroi ondulée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **231**, 1950, p. 1271-1274).

[39] H. Cabannes, *Étude de la courbure au sommet de l'onde de choc attachée dans un écoulement de révolution* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **232**, 1951, p. 481-483).

[40] H. Cabannes, *Détermination théorique des écoulements d'un fluide derrière une onde de choc détachée de révolution* (*ONERA.*, Note technique n° **5**, 1951).

[41] P. Germain, *Application de l'approximation homographique à l'étude des écoulements transsoniques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **232**, 1951, p. 1811-1813).

[42] H. Cabannes, *Étude de l'onde de choc attachée dans les écoulements de révolution* (*La Recherche Aéronautique*, n° **24**, p. 17-23 et n° **27**, p. 3-12).

VERS
UN THÉORÈME DE PICARD GLOBAL

PAR DANIEL DUGUÉ

Il ne sera jamais trop tard pour parler du théorème de Picard. Peu de résultats aussi simples ont eu de tels prolongements qu'on puisse dire presque qu'une bonne moitié de la théorie des fonctions n'est que l'ensemble des corollaires du théorème fondamental publié en 1879 dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*. Je voudrais, dans les quelques pages qui suivent, donner la démonstration de faits que j'ai résumés dans deux Notes aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (29 janvier et 15 octobre 1951).

Il s'agit de fonctions ayant plusieurs singularités essentielles. Mittag-Leffler, dans une Note du 3 avril 1882, que cite Henri Poincaré dans son Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, avait envisagé des fonctions ayant plus d'une singularité essentielle et même une infinité. Maillet, plus tard, avait utilisé des fonctions ayant un nombre fini de singularités essentielles et l'infini comme valeur exceptionnelle partout. Il les avait nommées fonctions quasi entières. Le théorème de Picard est valable localement au voisinage de chaque singularité. Chaque point singulier essentiel a au plus deux valeurs exceptionnelles. Il m'a semblé de quelque intérêt de chercher à voir ce qu'il devient globalement, « in the large ». *A priori*, la réponse est que, s'il y a n points singuliers, il peut y avoir $2n$ valeurs localement exceptionnelles. Le but de ce Mémoire est de montrer qu'il ne peut y en avoir que $n+1$ au plus. Cette borne est atteinte pour $n=2$ et 3. Il se peut qu'elle ne puisse pas être atteinte pour n quelconque. Après avoir signalé quelques conséquences et quelques extensions de ce fait, je termine cet article en proposant quelques problèmes soulevés par l'étude de cette question.

CHAPITRE I.

Le théorème central.

Notations. — Dans la suite de l'exposé, les lettres minuscules du début de l'alphabet $a(z)$, $b(z)$, ... désigneront des fonctions entières (éventuellement des polynomes); les lettres majuscules du début de l'alphabet $A(z)$, $B(z)$, ..., des fonctions holomorphes au voisinage de l'infini; les lettres minuscules à partir de m, $m(z)$, $n(z)$, ..., des fonctions méromorphes dans tout le plan, sauf à l'infini; les lettres majuscules à partir de M, $M(z)$, $N(z)$, ..., des fonctions méromorphes au voisinage de l'infini.

Je vais d'abord établir le résultat suivant :

$\varphi(z)$ étant une fonction uniforme dans tout le plan, méromorphe au voisinage de l'origine et de l'infini, ayant ces deux points comme singularités essentielles et pouvant d'ailleurs avoir d'autres singularités, $\varphi(z)$ ne peut avoir quatre valeurs exceptionnelles de Picard à l'origine et à l'infini.

Remarquons d'abord que l'on a

$$\varphi(z) = e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)} M(z) N\left(\frac{1}{z}\right).$$

En effet, marquons les zéros et les pôles de $\varphi(z)$ au voisinage de zéro et de l'infini.

D'après le théorème de factorisation de Weierstrass, on peut trouver deux fonctions $m(z)$ et $n\left(\frac{1}{z}\right)$ ayant ces zéros et ces pôles. Donc $\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{m(z)n\left(\frac{1}{z}\right)}$ n'aura ni zéros, ni pôles au voisinage de zéro et de l'infini, $\chi(z) = \log\psi(z)$ sera une fonction uniforme au voisinage de zéro et de l'infini (elle pourra ne pas être uniforme ailleurs) et holomorphe dans ces mêmes régions. $\chi(z)$ sera donc développable en série de Laurent convergente pour $|z| > R$. Donc

$$\chi(z) = a(z) + \mu\left(\frac{1}{z}\right).$$

$\mu\left(\frac{1}{z}\right)$ sera une fonction holomorphe au voisinage de l'infini et *à l'infini*, ainsi qu'au voisinage de l'origine (puisque χ l'est aussi), qu'elle admettra pour singularité essentielle [à moins que ψ ne soit d'ordre fini en zéro, auquel cas $\mu\left(\frac{1}{z}\right)$ serait égale à un polynome en $\frac{1}{z}$ augmenté d'une fonction régulière en zéro] et ayant ailleurs éventuellement diverses singularités dont des points

de ramification, mais qui disparaissent après exponentiation. $e^{\mu\left(\frac{1}{z}\right)}$ sera uniforme, puisque $\psi(z)$ est uniforme. En écrivant le développement de Laurent dans le cercle $|z|<r$, on aura

$$\mu\left(\frac{1}{z}\right)=b\left(\frac{1}{z}\right)+c(z),$$

$c(z)$ sera holomorphe au voisinage de zéro et de l'infini et *en ces points*. Il aura les mêmes ramifications que μ, ainsi que ses singularités autres que l'origine. Finalement,

$$\omega=e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)}e^{c(z)}m(z)n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$e^{c(z)}$ étant uniforme, holomorphe au voisinage de zéro et de l'infini et *en ces points*. On a donc bien la forme donnée :

$$\varphi=e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{M}(z)\mathrm{N}\left(\frac{1}{z}\right)$$

et M et N seront analytiques au moins dans les régions où φ l'est.

Supposons que les quatre valeurs exceptionnelles dont nous voulons montrer l'impossibilité soient 1 et λ en zéro, 0 et ∞ à l'infini ($\lambda\neq 0, 1, \infty$). On peut toujours s'arranger pour qu'il en soit ainsi par une transformation homographique, mais comme nous ne disposons que de trois coefficients, il pourrait *a priori* se faire que le théorème fut vrai pour certaines valeurs de λ et non pour toutes. Nous allons voir qu'il est vrai pour toutes.

Dans ces conditions,

$$\varphi=e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{N}\left(\frac{1}{z}\right)\qquad\text{ou}\qquad\varphi=e^{a(z)}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

en faisant entrer $e^{b\left(\frac{1}{z}\right)}$ dans le symbole P.

$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ va avoir zéro et l'infini comme valeurs exceptionnelles en zéro. Donc

$$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}=e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{M}(z).$$

Il faut donc montrer l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\frac{1-e^{a(z)}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)}{\lambda-e^{a(z)}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)}=e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{M}(z)$$

ou

$$1-e^{a(z)}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)-\lambda e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{M}(z)+e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z)=0$$

ou

$$\frac{1}{P\left(\frac{1}{z}\right)M(z)} - \frac{e^{a(z)}}{M(z)} - \lambda\frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{P\left(\frac{1}{z}\right)} + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} = 0.$$

Posons

$$\frac{e^{a(z)}}{M(z)} = Q(z), \qquad \frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{P\left(\frac{1}{z}\right)} = R\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right)}{e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}} - Q(z) - \lambda R\left(\frac{1}{z}\right) + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} = 0.$$

D'où

$$(\mathcal{R}) \qquad \left[e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\right]^2 - \left[Q(z) + \lambda R\left(\frac{1}{z}\right)\right]e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} + Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

C'est la forme des coefficients de la relation quadratique $(\mathcal{R})$ à laquelle doit satisfaire $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$, soit $Q(z) + \lambda R\left(\frac{1}{z}\right)$ et $Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right)$ qui va conduire à l'impossibilité cherchée. Nous allons établir que si $(\mathcal{R})$ a lieu :

a. Si $Q(z)$ a des zéros, $R\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de pôles et si $R\left(\frac{1}{z}\right)$ a des pôles, $Q(z)$ n'a pas de zéros;

b. Si $Q(z)$ a des pôles, $R\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de zéros et si $R\left(\frac{1}{z}\right)$ a des zéros, $Q(z)$ n'a pas de pôles.

En effet, $(\mathcal{R})$ ayant lieu, $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$ est égale à l'une des deux fonctions

$$\frac{1}{2}\left\{Q(z) + \lambda R\left(\frac{1}{z}\right) \pm \sqrt{\left[Q(z) + \lambda R\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2 - 4Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}.$$

L'une de ces deux fonctions est donc :

1° uniforme (cela entraîne que l'autre fonction le soit aussi);

2° holomorphe;

3° sans zéros.

Posons $\frac{R\left(\frac{1}{z}\right)}{Q(z)} = \theta(z)$, qui sera une fonction définie dans la région où φ l'est, méromorphe au voisinage de l'origine et de l'infini et admettant ces deux points comme singularité essentielle. $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$ sera l'une des deux fonctions

$$\frac{Q(z)}{2}\left[1 + \lambda\theta(z) \pm \sqrt{\lambda^2\theta^2(z) + 2(\lambda - 2)\theta(z) + 1}\right].$$

Précisons que le radical, qui est uniforme, sera pris équivalent à $\lambda\theta$ pour θ infiniment grand. Dans ces conditions, l'expression

$$1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)-1}$$

n'a pas de pôle.

En effet, les seuls pôles possibles seraient ceux de θ. Soit z_0 l'un d'eux et n son ordre de multiplicité

$$\lambda\theta-\sqrt{\lambda^2\theta^2+2(\lambda-2)\theta+1}=\lambda\theta\left[1-\sqrt{1+\frac{2(\lambda-2)\theta+1}{\lambda^2\theta^2}}\right],$$

le radical étant égal à $+1$ pour $\frac{1}{\theta}$ nul. On aura

$$\frac{1}{\theta}=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe et non nul pour $z=z_0$,

$$\frac{1}{\theta^2}=(z-z_0)^{2n}\varphi^2(z),$$

$$1+\frac{2(\lambda-2)}{\lambda^2}\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\lambda^2\theta^2}=1+\frac{1}{\theta}\left[\frac{2(\lambda-2)}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2\theta}\right]$$

est donc holomorphe au voisinage de z_0 et égal à $1+B_0(z-z_0)^n+\dots$ (B_0 pouvant être nul). La mise en facteur de $\lambda\theta$ a été légitime, car λ est différent de zéro. Par conséquent, avec la convention adoptée sur la détermination du radical, $1-\sqrt{1+\frac{2(\lambda-2)\theta+1}{\lambda^2\theta^2}}$ sera au voisinage de z_0 égal à

$$-\frac{B_0}{2}(z-z_0)^n+\dots$$

et, par conséquent,

$$1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}$$

sera holomorphe au voisinage de z_0. Si donc

$$e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{Q(z)}{2}\left[1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right],$$

cela implique que $Q(z)$ n'ait pas de zéros, puisqu'ils ne peuvent être détruits par les pôles inexistants de la parenthèse.

Donc, si $Q(z)$ a des zéros, $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$ doit être égal à l'autre fonction, soit

$$\frac{Q(z)}{2}\left[1+\lambda\theta(z)+\sqrt{\lambda^2\theta^2+2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right],$$

le radical conservant toujours le même sens. Donc

$$e^{\left[\omega(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)\right]} = \frac{2}{Q(z)} \frac{1}{\left[1+\lambda\theta(z)+\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right]},$$

$$= \frac{2}{Q(z)} \frac{1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}}{4\theta(z)},$$

$$= \frac{1}{2R\left(\frac{1}{z}\right)} \left[1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right].$$

et nous sommes amenés cette fois à conclure que $\frac{1}{R\left(\frac{1}{z}\right)}$ n'a pas de zéros.

Donc $R\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de pôles. Si $R\left(\frac{1}{z}\right)$ avait des pôles, cela nous ramènerait obligatoirement à la première détermination et $Q(z)$ ne pourrait avoir de zéros. Donc : *a* est établi; *b* se démontre exactement de la même façon en posant

$$\frac{Q(z)}{R\left(\frac{1}{z}\right)} = \omega(z).$$

Donc, ou bien R n'a pas de pôle, ou bien Q n'a pas de zéro et, par suite, ou bien P n'a pas de zéro, ou bien M n'a pas de pôle. Si P n'a pas de zéro, zéro est exceptionnel partout, en particulier à l'origine (alors que 1 et $\lambda \neq 0$ le sont déjà). Si M n'a pas de pôle, l'infini est exceptionnel partout (en particulier à l'infini) pour $\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ et λ est exceptionnel partout, en particulier à l'infini (où 0 et $\infty \neq \lambda$ le sont déjà). De toute façon, nous aboutissons à la contradiction cherchée.

On en déduit immédiatement le théorème général énoncé dans l'Avant-Propos.

S'il y a n singularités essentielles, il ne peut y avoir au plus que $n+1$ valeurs exceptionnelles.

En effet, numérotons les points singuliers $M_1, \ldots, M_n$ et formons l'ensemble des valeurs exceptionnelles de la façon suivante. Passons successivement en revue tous les points et pour chacun d'eux inscrivons, si elle existe, la valeur exceptionnelle qui ne figure pas pour les points précédents. S'il y avait $n+2$ valeurs exceptionnelles, deux points M_l et M_m $(l<m)$ auraient sûrement fourni deux valeurs. M_m aurait donc deux valeurs exceptionnelles ne figurant pas parmi les valeurs précédentes, donc parmi celles de M_l et ces deux points auraient quatre valeurs exceptionnelles différentes.

CHAPITRE II.

Extensions possibles.

1. Le théorème reste vrai si l'expression « valeur exceptionnelle de Picard » est remplacée par « valeur exceptionnelle de Borel ». En effet, dans ce cas, la forme de φ sera un peu plus compliquée, mais on aboutira à une équation analogue à $(\mathcal{R})$. On aura

$$\varphi = e^{a(z)}\,\mathrm{T}(z)\,\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

(T étant au voisinage de l'infini d'ordre inférieur à $e^{a(z)}$),

$$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi} = e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z)$$

$\left(\mathrm{S}\text{ étant au voisinage de l'origine d'ordre inférieur à } e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\right)$. On devrait donc avoir

$$0 = 1 - e^{a(z)}\,\mathrm{T}(z)\,\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right) - \lambda e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z) + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{T}(z)\,\mathrm{M}(z)$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{T}(z)\,\mathrm{M}(z)} - \frac{e^{a(z)}}{\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z)} - \lambda\frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{T}(z)} + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} = 0;$$

en posant encore

$$\frac{e^{a(z)}}{\mathrm{M}(z)} = \mathrm{Q}(z), \qquad \frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)} = \mathrm{R}\left(\frac{1}{z}\right),$$

on est conduit à l'équation

$$(\mathcal{R}') \qquad \left[e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\right]^2 - \left[\frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)} + \lambda\frac{\mathrm{R}\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathrm{T}(z)}\right]e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{R}\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathrm{T}(z)} = 0$$

et pour la même raison que tout à l'heure : à cause de la forme des coefficients, on est amené à conclure, si $(\mathcal{R}')$ est satisfait, que : ou bien $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}}$ n'a pas de pôle, ou bien $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}}$ n'a pas de zéro (le fait que les coefficients de l'équation aient ici deux singularités essentielles au lieu d'une ne change rien au raisonnement, car il n'était question que des zéros et des pôles des coefficients au voisinage de zéro et de l'infini).

Si $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}}$ n'a pas de pôle, $\frac{1}{\mathrm{MS}}$ n'a pas de pôle et MS pas de zéro; $\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ a zéro pour

valeur exceptionnelle de Picard, aussi bien à l'origine qu'à l'infini ; φ a un pour valeur exceptionnelle de Picard à l'infini (ou zéro et l'infini sont exceptionnels de Borel). Si $\frac{R}{T}$ n'a pas de zéro, $\frac{1}{PT}$ n'a pas de zéro, PT n'a pas de pôle et φ a l'infini comme valeur exceptionnelle de Picard, à l'infini comme à l'origine (où 1 et $\lambda \neq \infty$ sont exceptionnels de Borel).

De toute façon, nous aboutissons à une contradiction.

2. Examinons maintenant le cas où φ est une fonction ayant deux lignes singulières disjointes L_1 et L_2. On aura à remplacer les valeurs exceptionnelles au voisinage d'un point par des valeurs exceptionnelles au voisinage d'une ligne. Dire que a est exceptionnel au voisinage de L signifie qu'il existe une courbe C n'ayant aucun point commun avec L et telle que $\varphi - a = 0$ n'ait aucune racine dans le domaine compris entre C et L. Si donc a n'est pas exceptionnel au voisinage de L, il y aura un point de L au moins limite des racines de $\varphi(z) - a = 0$. On a ainsi des ensembles exceptionnels au voisinage de L_1 et L_2. Si L_1 et L_2 sont disjoints, les mêmes raisonnements qu'au début montrent que φ sera de la forme $e^{\alpha_{L_1}(z)+\beta_{L_2}(z)} M_{L_1}(z) N_{L_2}(z)$, $M_{L_1}(z)$ et $N_{L_2}(z)$ étant des fonctions méromorphes admettant, l'une L_1 comme ligne singulière et non L_2, l'autre L_2 et non L_1 ; $\alpha_{L_1}(z)$ et $\beta_{L_2}(z)$ seront des fonctions holomorphes ayant les mêmes singularités. Cette extension est fondée sur l'extension donnée par E. Picard de la factorisation de Weierstrass au voisinage d'une ligne singulière et sur l'utilisation dans les mêmes conditions que dans la première partie du développement de Laurent. Si zéro et l'infini sont exceptionnels au voisinage de L_1 et 1 et λ au voisinage de L_2, on aboutira, après des changements de fonction analogues à la même relation $(\mathcal{R})$ (L_1 joue le rôle de l'infini tout à l'heure et L_2 celui de l'origine)

$$\left[e^{\alpha_{L_1}(z)+\gamma_{L_2}(z)}\right]^2 - \left[Q_{L_1}(z) + \lambda R_{L_2}(z)\right] e^{\alpha_{L_1}(z)+\gamma_{L_2}(z)} + Q_{L_1}(z) R_{L_2}(z) = 0$$

et comme plus haut on sera conduit à admettre que, ou bien $Q_{L_1}(z)$ n'a pas de zéro ou $R_{L_2}(z)$ n'a pas de pôle.

En revenant à la définition de φ, cela conduit à la conclusion que zéro ou l'infini sont exceptionnels au voisinage de L_2 ou que 1 ou λ sont exceptionnels au voisinage de L_1. Ici il n'y a pas d'impossibilité dans le cas où l'un des deux ensembles exceptionnels comprend plus de deux points.

Cela conduit au théorème que j'énonçais dans ma Note du 15 octobre 1951 :

Les ensembles exceptionnels au voisinage de L_1 *et au voisinage de* L_2 *ont au moins un point commun si chacun des ensembles a au moins deux valeurs exceptionnelles.*

Mais on peut aller plus loin. Soit E_1 l'ensemble exceptionnel au voisinage

de L_1, E_2 l'ensemble exceptionnel au voisinage de L_2, C leur partie commune non vide d'après ce qui précède.

Il y a sûrement au moins un des deux ensembles $E_1 - C$ *et* $E_2 - C$ *qui ne comprend qu'un point au plus.*

En effet, on pourrait autrement choisir α, β dans $E_1 - C$ et γ, δ dans $E_2 - C$, les quatre valeurs étant différentes. Et les raisonnements précédents devraient nous conduire à, soit α ou β dans E_2, soit γ ou δ dans E_1, ce qui est impossible, aucune des quatre valeurs n'étant dans C.

Bien entendu, ces deux théorèmes restent vrais si la ligne L_2 est remplacée par un point.

Considérons en particulier une fonction $\Phi(z)$ ayant pour coupure le cercle unité $\mathcal{C}$, où la fonction a un nombre infini de zéros et de pôles. Supposons que Φ ait un ensemble exceptionnel qui peut être un ensemble dénombrable de points ou les points intérieurs à une ou plusieurs courbes fermées. Quelle que soit $a(z)$ entière, la fonction $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}\Phi(z)$ a zéro et l'infini comme seules valeurs exceptionnelles en zéro. Donc au voisinage de $\mathcal{C}$, comme l'ensemble exceptionnel de $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}\Phi(z)$ ne comprend ni zéro, ni l'infini, il ne pourra comprendre au plus qu'un point. Donc, sauf peut-être pour une seule valeur λ, $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}\Phi(z) = \lambda$ a un nombre infini de racines au voisinage de $\mathcal{C}$. Il y a *brassage* des valeurs de $\Phi(z)$ par $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}$.

3. L'extension que nous venons de donner supposait les lignes L_1 et L_2 disjointes (pour que l'on puisse appliquer le développement de Laurent à une couronne d'épaisseur non nulle ayant L_1 à l'intérieur et L_2 à l'extérieur). On peut étendre le théorème au cas où l'on envisage deux portions d'une ligne singulière continue. Mais, dans ce cas, on doit utiliser le résultat donné par Henri Poincaré dans son Mémoire : *Sur les fonctions à espace lacunaire* (*American Journal of Mathematics*, t. XIX) et utilisé par M. Borel dans sa thèse.

Une fonction à ligne singulière L (égale à la somme de deux arcs L_1 et L_2) peut être décomposée en une somme de deux fonctions, l'une ayant L_1 comme ligne singulière et non L_2, l'autre ayant L_2 comme ligne singulière et non L_1. Dans ces conditions, on retrouve le développement canonique de tout à l'heure pour φ : $e^{\alpha_{L_1}(z)+\beta_{L_2}(z)}M_{L_1}(z)N_{L_2}(z)$, L_1 et L_2 étant les deux portions d'arc et comme dans le paragraphe 2 de ce chapitre, on aboutira à la relation analogue à la relation $(\mathcal{R})$ avec les mêmes deux théorèmes qui servent de conclusion à la discussion. Il n'est donc pas indispensable de supposer L_1 et L_2 disjoints.

4. Tout ce qui précède est fondé sur la séparation des singularités (application du développement de Laurent ou des résultats de Poincaré). Si ce principe

est général, on pourrait déduire de la discussion de la relation $(\mathcal{R})$ des résultats sur les valeurs exceptionnelles de Julia. J'ai désigné sous ce nom des valeurs qui sont exceptionnelles au voisinage des droites de Julia sans pour cela être exceptionnelles de Picard. Par exemple, $\frac{e^{e^z}-1}{e^{e^z}-1}$ n'a aucune valeur exceptionnelle de Picard (ce serait contraire au résultat de M. Borel sur l'impossibilité de la constance d'une somme d'exponentielles). Toutes les demi-droites sont demi-droites J. Les demi-droites du demi-plan positif ont l'infini comme valeur exceptionnelle J ; les demi-droites du demi-plan négatif ont zéro comme valeur exceptionnelle J. Dans ma Note d'octobre 1951 j'ai un peu hâtivement affirmé que le raisonnement de M. Valiron montrant que l'infini est valeur asymptotique pour une fonction entière s'appliquait encore aux valeurs exceptionnelles J. En fait, le problème paraît plus compliqué. Si la droite J est telle que dans le domaine angulaire la comprenant où l'infini est exceptionnel J, il existe deux droites dont l'angle comprend la droite J sur lesquelles $|f(z)|$ est borné, le raisonnement de M. Valiron s'applique mot pour mot. Autrement non. Dans ce cas, toute droite de ce domaine angulaire a un domaine d'indétermination comprenant le point à l'infini. Il se peut d'ailleurs que, même dans ce cas, la valeur exceptionnelle J soit asymptotique. Pour revenir à l'objet du présent article, il y aurait lieu de chercher le problème suivant :

$\varphi(z)$ *étant méromorphe au voisinage de l'infini ayant deux droites de Julia isolées* J_1 *et* J_2, *peut-on la décomposer en un produit de fonctions* φ_1 *et* φ_2, *l'une ayant* J_1 *pour droite de Julia et non* J_2, *l'autre* J_2 *et non* J_1 ?

Il me semble à peu près certain que la chose est possible à cause des théorèmes généraux dont on dispose sur la séparation des singularités, aussi bien ponctuelles que linéaires et de l'analogie signalée par A. Bloch entre ces singularités et les droites de Julia. Toutefois, je ne peux en donner la preuve. Admettons cette possibilité et que la décomposition se fasse comme pour les points et lignes singulières, *les valeurs exceptionnelles se conservant dans les facteurs*, c'est-à-dire que si j_1 est droite de Julia isolée de φ, ayant o et ∞ comme valeurs exceptionnelles J autour de j_1, on ait

$$\varphi(z) = \varphi_{j_1}(z)\,M_1(z),$$

$\varphi_{j_1}(z)$ n'ayant que j_1 pour droite de Julia avec o et ∞ exceptionnels J autour de j_1. Si 1 et λ sont exceptionnels J autour de j_2, on a de même

$$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi} = \varphi_{j_2}(z)\,M_2(z),$$

$\varphi_{j_2}(z)$ n'ayant que j_2 pour droite de Julia avec o et ∞ comme valeurs exceptionnelles J. Cela entraîne encore

$$[\varphi_{j_1}(z)\varphi_{j_2}(z)]^2 - [R(z) + \lambda S(z)]\varphi_{j_1}(z)\varphi_{j_2}(z) + R(z)S(z) = 0,$$

en posant

$$\frac{\varphi_{j_1}}{M_2} = R(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi_{j_2}}{M_1} = S(z),$$

$\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}$ va donc être l'une des deux fonctions :

$$\frac{R(z) + \lambda S(z) \pm \sqrt{[R(z) + \lambda S(z)]^2 - 4R(z)S(z)}}{2}.$$

En écrivant ces deux fonctions sous la forme

$$R(z)\left[\frac{1 + \lambda\frac{S(z)}{R(z)} \pm \sqrt{\lambda^2\left(\frac{S(z)}{R(z)}\right)^2 + 2(\lambda - 2)\frac{S(z)}{R(z)} + 1}}{2}\right],$$

on voit que la parenthèse représente dans un cas une fonction holomorphe. Si $\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}$ est égale à cette détermination, on en déduit que $\frac{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}{R}$ est holomorphe partout. Or

$$\frac{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}{R} = \varphi_{j_2} M_2.$$

Donc $\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ est partout holomorphe et φ a λ comme valeur exceptionnelle partout, en particulier au voisinage de j_1, où zéro et l'infini différents de λ sont déjà exceptionnels J. Ce cas est donc à rejeter. Si $\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}$ est égale à l'autre détermination, on en déduit comme plus haut que $\frac{1}{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}$ est égal au produit de $\frac{1}{S}$ par une fonction holomorphe. Donc $\frac{S}{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}$ est holomorphe partout. Or

$$\frac{S}{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}} = \frac{\varphi_{j_2}}{M_1\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}.$$

Donc $M_1\varphi_{j_1}$ ne s'annule nulle part et φ a zéro comme valeur exceptionnelle partout, donc au voisinage de j_2 où 1 et λ sont exceptionnels J. Ce cas ne peut donc pas non plus avoir lieu.

Par conséquent, si la décomposition indiquée est possible, si une fonction a deux droites de Julia isolées avec α et β exceptionnels J au voisinage de la première et γ et δ exceptionnels J au voisinage de la seconde, l'une au moins des deux valeurs α, β est égale à l'une des valeurs γ, δ.

CHAPITRE III.

Quelques cas possibles.

1. Après avoir signalé quelques impossibilités, je vais maintenant indiquer des cas possibles. Quand on examine ce qui se passe au voisinage de deux singularités essentielles (zéro et l'infini), on constate que, en dehors du cas où il y aurait quatre valeurs localement exceptionnelles, tout est possible.

1° *Aucune valeur exceptionnelle, ni à l'origine, ni à l'infini.* — $\mathcal{A}(z)$ étant holomorphe au voisinage de l'origine et de l'infini et en ces points [$\mathcal{A}(0)$ et $\mathcal{A}(\infty)$ non nuls] et α étant tel que $p(z)$ soit analytique en α [$p(\alpha)$ non nul], il est facile de voir que

$$\Phi(z)=p(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathcal{A}(z)$$

est un exemple de ce cas. Il suffira de reprendre le raisonnement classique sur les zéros des fonctions elliptiques pour voir que si l'on se place assez près de l'infini, $\Phi(z)-a=0$ a autant de racines que de pôles à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes de $p(z)$, donc deux. En effet,

$$\frac{\Phi'}{\Phi-a}=\frac{p'(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathcal{A}(z)-p(z+\alpha)\frac{1}{z^2}p'\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathcal{A}(z)+p(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathcal{A}'(z)}{p(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathcal{A}(z)-a}$$

et ce quotient pour z assez grand s'écarte arbitrairement peu de

$$\frac{p'(z+\alpha)+p(z+\alpha)\dfrac{\mathcal{A}'(\infty)}{\mathcal{A}(\infty)}}{p(z+\alpha)-\dfrac{a}{p(\alpha)\mathcal{A}(\infty)}}.$$

Son intégrale le long d'un contour de parallélogramme de périodes est donc nulle.

Il en est de même au voisinage de l'origine.

2° *Aucune valeur exceptionnelle à l'origine; une à l'infini.* — On prendra $p\left(\frac{1}{z}\right)e(z)\mathcal{A}(z)$; e étant une fonction entière d'ordre fini non entier (pour qu'elle n'ait pas d'autre valeur exceptionnelle que l'infini).

3° *Aucune valeur exceptionnelle à l'origine; deux à l'infini.* — $p\left(\frac{1}{z}\right)e^{c(z)}\mathcal{A}(z)$ sera dans ce cas.

4° *Une valeur exceptionnelle à l'origine; la même exceptionnelle à l'infini.* — $e_1\left(\frac{1}{z}\right)e_2(z)\mathcal{A}(z)$ e_1 et e_2 entières d'ordre fini non entier; l'infini sera exceptionnel aux deux points).

5° *Une valeur exceptionnelle à l'origine; une autre à l'infini.* — $\dfrac{e_2(z)}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$ (l'infini est exceptionnel à l'infini et zéro à l'origine).

6° *Une valeur exceptionnelle à l'origine* (*zéro*); *deux à l'infini* (*zéro comme à l'origine et l'infini*). — $\dfrac{e^{c(z)}}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$.

7° *Une valeur exceptionnelle à l'origine* (*zéro*); *deux autres à l'infini* (*un et*

l'infini). — Zéro étant exceptionnel à l'origine et l'infini à l'infini, on sera dans un cas particulier du cas du 5°, soit $\frac{e_2(z)}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$, e_1 et e_2 étant telles que seul zéro soit exceptionnel en zéro (il suffit de prendre e_1 d'ordre fini non entier) et que, de plus, 1 soit exceptionnel à l'infini. La fonction $e_1\left(\frac{1}{z}\right) - e_2(z)\mathcal{A}(z)$ n'aura donc pas de zéros à l'infini et l'infini sera exceptionnel pour elle à l'origine comme à l'infini. On sera dans le cas du 6°. Donc $e_1\left(\frac{1}{z}\right) - e_2(z)\mathcal{A}(z)$ devra pouvoir être identifié à $b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\mathcal{B}(z)$, $\mathcal{B}(z)$ comme $\mathcal{A}(z)$ étant une fonction holomorphe autour de l'origine et de l'infini et *en ces points*. $b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\mathcal{B}(z)$ devra avoir des zéros autour de l'origine (il suffira comme dans les cas précédents de prendre $b\left(\frac{1}{z}\right)$ d'ordre fini non entier).

On prendra donc $b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}$ $\mathcal{B}(z)$ quelconque et son développement de Laurent autour de l'origine donnera

$$b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\mathcal{B}(z) \equiv f\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans un cercle de centre O et ayant l'infini comme singularité essentielle, on pourra poser

$$\varphi(z) = h(z)\mathcal{C}(z),$$

$\mathcal{C}(z)$ étant holomorphe autour de l'origine et de l'infini et *en ces points*. Il suffira de prendre

$$e_1 \equiv f, \qquad e_2 \equiv h, \qquad \mathcal{A} \equiv -\mathcal{C}.$$

8° *Deux valeurs exceptionnelles à l'origine; les mêmes exceptionnelles à l'infini.* — Ce sera le cas de $e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$.

9° *Deux valeurs exceptionnelles à l'origine* (*zéro et un*); *deux exceptionnelles à l'infini* (*un et l'infini*). — On sera dans le cas de la forme 5° $\frac{e_2(z)}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$ et la fonction $e_1\left(\frac{1}{z}\right) - e_2(z)\mathcal{A}(z)$ devra être sans zéro, aussi bien à l'origine qu'à l'infini. On devra donc identifier cette fonction qui est holomorphe à l'origine et l'infini à $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{B}(z)$. Son développement de Laurent autour de l'origine donnera

$$e^{a\left(\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{B}(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) + \psi(z)$$

et $\psi(z)$ holomorphe en zéro et singulier essentiel à l'infini sera égal à $j(z)\mathcal{C}(z)$. On prendra encore

$$c_1 \equiv g, \qquad e_2 \equiv j \qquad \text{et} \qquad a \equiv -\mathcal{C}.$$

2. Je vais maintenant étudier le cas de trois singularités essentielles en me bornant au cas où 0, 1, ∞ sont les trois seules singularités de la fonction φ (en dehors des pôles).

Montrons qu'on peut avoir zéro exceptionnel en zéro, un en un, l'infini à l'infini et λ partout. On doit avoir

$$\varphi = \frac{a(z)c\left(\frac{1}{z-1}\right)}{b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)}.$$

λ doit être exceptionnel partout, donc

$$a(z)c\left(\frac{1}{z-1}\right) - \lambda\, b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

doit être holomorphe (sauf en 0, 1, ∞) et sans zéro, donc

$$a(z)c\left(\frac{1}{z-1}\right) - \lambda\, b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right) = e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)},$$

un est exceptionnel en un. Donc

$$a(z)c\left(\frac{1}{z-1}\right) - b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

doit être holomorphe (sauf en 0, 1, ∞) et n'avoir pas de zéro au voisinage de un. Donc

$$a(z)c\left(\frac{1}{z-1}\right) - b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right) = e^{h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}d(z)e\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc

$$a(z)c\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{z-1}{1}\right)} - \lambda e^{h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}d(z)e\left(\frac{1}{z}\right)}{1-\lambda}$$

n'a pas de singularités essentielles (ni pôles) en $z = 0$, ce qui implique que

$$\psi_1 = e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)-h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)} - \lambda\, d(z)e\left(\frac{1}{z}\right)$$

n'en ait pas non plus. Son développement de Laurent sera donc

$$g(z) + k\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

De même

$$b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)}-e^{h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)}{1-\lambda}$$

n'a pas de singularités essentielles (ni de pôles) en $z=\infty$, ce qui implique que

$$\psi_2=e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)-h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}-d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)$$

n'en ait pas non plus.

Son développement de Laurent sera donc $f\left(\frac{1}{z}\right)+j\left(\frac{1}{z-1}\right)$. Mais

$$\psi_1-\psi_2=(1-\lambda)\,d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)=g(z)-f\left(\frac{1}{z}\right)+k\left(\frac{1}{z-1}\right)-j\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

n'a pas de singularités essentielles (ni pôles) en $z=1$, ce qui entraîne $k\equiv j$.

De plus,

$$\psi_1-\lambda\psi_2=(1-\lambda)\,e^{h_4(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)-h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}=g(z)-\lambda f\left(\frac{1}{z}\right)+(1-\lambda)k\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

On pourra donc prendre arbitrairement h_1, h_2, h_3 et h_4. On en déduira g, f et k; g et f donneront d et e. On a

$$e^{h_1+h_2+h_3}=ac-\lambda bc_1 \qquad \text{et} \qquad e^{h_4}de=ac-bc_1.$$

De ces deux équations, on tirera ac et bc_1 et la fonction φ sera déterminée.

On voit comme le problème se complique dès que plus de deux singularités essentielles entrent en jeu. Même avec trois singularités seulement, je n'ai pu arriver à voir si tous les cas étaient possibles à l'intérieur des restrictions données par le chapitre I. En particulier, peut-on avoir un et l'infini exceptionnels à l'origine, zéro et un exceptionnels à l'infini, zéro et l'infini exceptionnels en un ? L'infini étant exceptionnel à l'origine et zéro à l'infini, la fonction devra être de la forme $\frac{a\left(\frac{1}{z}\right)}{b(z)}m\left(\frac{1}{z-1}\right)$. Comme zéro et l'infini seront exceptionnels en $z=1$, $m\left(\frac{1}{z-1}\right)$ sera de la forme $e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}$. Il reste à imposer à $\frac{a\left(\frac{1}{z}\right)}{b(z)}e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}$ le fait d'avoir un comme valeur exceptionnelle à l'origine et l'infini. Donc $b(z)-a\left(\frac{1}{z}\right)e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}$ holomorphe partout (sauf 0, 1, ∞), devra avoir zéro comme valeur exceptionnelle en zéro et l'infini. Ce qui fait que l'on devra avoir

$$b(z)-a\left(\frac{1}{z}\right)e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}=e^{d(z)+f\left(\frac{1}{z}\right)}k\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

Il faudrait donc que l'on puisse trouver d, f et k telles que si l'on prend le développement de Laurent autour de l'infini de $e^{d(z)+f\left(\frac{1}{z}\right)}k\left(\frac{1}{z-1}\right)$ et si l'on retranche de cette fonction $b(z)$ (c'est-à-dire la partie du développement contenant les puissances positives de z), il reste le produit d'une fonction entière en $\frac{1}{z}$ par une fonction entière en $\frac{1}{z-1}$ et *ayant zéro comme valeur exceptionnelle autour de un*. Il reste à prouver que la chose est possible.

CHAPITRE IV.

Quelques problèmes.

1. Dans le chapitre précédent, j'ai déjà indiqué quelques questions. Il y a me semble-t-il à déterminer tout d'abord quels sont les cas possibles, d'une manière générale, pour n singularités essentielles. Qu'arrive-t-il pour les fonctions que Mittag-Leffler appelait du deuxième genre (celles qui ont une infinité de singularités essentielles)? Peuvent-elles avoir une infinité de valeurs exceptionnelles ?

2. En revenant au cas de deux singularités, toute une série d'interrogations se présentent. On sait que l'on peut remplacer une valeur exceptionnelle dans le théorème de Picard par deux valeurs régulières par rapport à 2, selon l'expression de M. Montel [a est régulier par rapport à 2 si $\varphi(z)-a$ a toutes ses racines doubles]. Soit donc $\varphi(z)$ ayant zéro et l'infini comme singularités essentielles; en zéro, a est exceptionnel, b et c sont réguliers par rapport à 2; à l'infini, d est exceptionnel, e et f sont réguliers par rapport à 2.

Relation entre a, b, c, d, e, f ? Ou bien a, b, c, d réguliers par rapport à 2 en zéro; e, f, g, h réguliers par rapport à 2 à l'infini. Relation entre les huit valeurs ? Ce problème est lié aux formules d'addition, dans le premier cas des fonctions circulaires, dans le second des fonctions elliptiques.

De même, M. Montel a établi qu'il était impossible au voisinage d'une singularité essentielle qu'il y ait une cubique exceptionnelle, mais qu'il pouvait y avoir une conique. $\varphi(z)$ ayant une conique exceptionnelle en zéro et une à l'infini, quelles sont les relations entre les deux coniques ? (l'énoncé de ce problème m'a été donné par M. Montel).

Les valeurs exceptionnelles de Nevanlinna en zéro et à l'infini ne sont probablement pas non plus indépendantes. Ici la fonction de Green pour une couronne construite par M. Villat, devra être utilisée.

3. Enfin, il y a la question des valeurs exceptionnelles le long d'une ligne. On doit pouvoir aller plus loin que ce que j'en ai dit au chapitre II.

La voie à suivre me paraît la suivante : soit L_1 ligne singulière de φ, où a, b, ..., k sont exceptionnels et L_2 ligne singulière où l, ..., r sont exceptionnels.

Supposons les deux lignes L_1 et L_2 fermées et disjointes, L_1 étant intérieur à L_2, de sorte que le domaine de définition de φ soit une couronne. Appelons F_1 une fonction fuchsienne définie dans le cercle unité ayant a, b, ..., k comme valeurs exceptionnelles et F_1^- la fonction inverse; F_2 une fonction fuchsienne ayant l, ..., r comme valeurs exceptionnelles F_2^- la fonction inverse.

$F_1^-(\varphi)$ va être une fonction holomorphe et uniforme au voisinage de L_1, multiforme ailleurs. En utilisant toujours le développement de Laurent, on aura $F_1^-(\varphi) = \alpha_{L_1}(z) + \psi(z)$, $\alpha_{L_1}(z)$ étant une fonction uniforme ayant L_1 comme seule ligne singulière et ψ une fonction multiforme, mais n'ayant pas L_1 comme ligne singulière.

$$F_1[\alpha_{L_1}(z) + \psi(z)] = \varphi$$

sera uniforme. On aura de même

$$F_2[\beta_{L_2}(z) + \chi(z)] = \varphi.$$

La relation

$$F_1[\alpha_{L_1}(z) + \psi(z)] = F_2[\beta_{L_2}(z) + \chi(z)]$$

remplacera la relation $(\mathcal{R})$ du chapitre I. Dans ce cas, les exponentielles sont remplacées par des fonctions fuchsiennes. La discussion de la possibilité de cette relation sera liée aux théorèmes d'addition des fonctions fuchsiennes. H. Poincaré fait allusion à ces théorèmes dans une Note du 29 mars 1886 (*Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéterminées*).

Je crois avoir posé plus de questions que je n'en ai résolu. Il semble qu'il y ait dans ce domaine un champ de recherches assez vaste qui doit lier l'analyse à l'algèbre dans le cas du dernier problème que j'indique.

QUELQUES PROBLÈMES SUR LES PRODUITS D'INVERSIONS

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

INTRODUCTION.

L'objet de cet article est la détermination de certains n-èdres plans de l'espace euclidien à $n-1$ dimensions tels que le produit des symétries par rapport aux n faces équivaille au produit d'un retournement autour d'une droite et d'une translation parallèle à cette droite. Pour $n=3$, donc dans le cas du triangle du plan, le produit des symétries par rapport aux trois côtés équivaut toujours à une transformation de ce type, l'axe du retournement joignant les pieds des hauteurs situés sur les deux axes de symétrie extrêmes. C'est la généralisation de cette propriété élémentaire du triangle que nous nous sommes proposé d'étudier, et qui se réalise de manière bien remarquable avec des n-èdres qu'il faut particulariser pour $n \geq 4$.

Certains aspects de ce problème se retrouvent avec des n-sphères, et les produits d'inversions par rapport aux n faces. La réduction du produit consiste en un retournement anallagmatique autour d'un cercle, combiné avec un produit de deux inversions par rapport à deux sphères orthogonales au cercle, ce qui constitue bien l'équivalent anallagmatique de ce que l'on obtient pour les n-èdres.

Cette étude est l'application de la recherche des sphères invariantes dans un produit d'inversions. C'est aux formules les concernant qu'est consacré le premier chapitre, ainsi qu'à la détermination précise de ces invariants pour un produit de trois inversions. Les notations utilisées sont celles des Mémoires antérieurs sur les produits d'inversions et que le lecteur est prié de vouloir bien consulter si besoin est (1).

(1) *Sur les produits d'inversions* (*Acta Math.*, t. 82, 1950, p. 1-70; et *Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 82-99), et *Sur l'équivalence anallagmatique* (*Bull. Sc. math.*, t. 75, 1951, p. 47-64).

CHAPITRE I.

Sphères et points invariants pour un produit d'inversions.

1. Considérons un produit d'inversions $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ de rang n (²) par rapport à n sphères (ou plans) unitaires U_i dans l'espace euclidien E_N à N dimensions. Comme dans les Mémoires cités, nous désignerons par T la matrice triangulaire supérieure droite dont les éléments $t_{ij}(i,j,=1,2,\dots,n)$ sont

$$t_{ij}=0 \quad \text{si} \quad i>j, \qquad t_{ii}=1, \qquad t_{ij}=2U_iU_j \quad \text{si} \quad i<j,$$

et par $V_1, V_2, \dots, V_n$ les sphères unitaires associées aux U_i. Si u et v sont les matrices à une colonne, ou vecteurs, formées respectivement par les n éléments U_i et V_i, rappelons que l'on a

$$u=Tv,$$

et que le produit $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ transforme une sphère quelconque Φ de E_N suivant la formule

$$\overline{U_n \dots U_2 U_1}\Phi=\Phi-2\sum_{i=1}^{n} V_i(U_i\Phi),$$

que la notation matricielle permet d'écrire sous la forme (³)

$$(1) \qquad \overline{U_n \dots U_2 U_1}\Phi=(1-2v'u)\Phi,$$

en désignant par v' la ligne transposée de la colonne v.

Ceci rappelé, les sphères ou points Φ invariants pour la transformation conforme en question sont les solutions de l'équation

$$(2) \qquad \overline{U_n \dots U_2 U_1}\Phi=h\Phi,$$

où h désigne un certain scalaire. Cette transformation conservant Φ^2, h^2 vaut 1 si $\Phi^2\neq 0$, c'est-à-dire si Φ est une sphère ou un plan non isotrope. Grâce à (1), (2) s'écrit

$$(3) \qquad \frac{1-h}{2}\Phi=v'u\Phi.$$

Une première solution est

$$h=1, \qquad \text{donc} \quad u\Phi=0,$$

(²) Les U_i sont donc linéairement distinctes, et n est au plus égal à $N+2$.

(³) Il faut observer que si les deux formes linéaires $v'u$ et $u'v$ sont identiques, les deux opérateurs ne sont pas équivalents, puisque, par exemple,

$$u'v\Phi=\sum_{i=1}^{n} U_i(V_i\Phi).$$

car les V_i, sont, comme les U_i, linéairement distinctes. Cette solution fournit les sphères orthogonales à tous les U_i; les sphères-point qui ont cette qualité sont les points communs à tous les U_i et forment, dans le cas où n ne surpasse pas N, une hypersphère à $N - n$ dimensions. C'est la solution banale.

Celles qui nous intéressent sont associées aux valeurs de h autres que 1. (3) exprime alors que Φ appartient à la famille linéaire des V_i, donc des U_i. En désignant par λ un vecteur de n éléments λ_i, on peut poser

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = \lambda' u = u' \lambda, \tag{4}$$

de sorte que le carré

$$\Phi^2 = \lambda' u u' \lambda = \lambda' \frac{T + T'}{2} \lambda ;$$

un scalaire étant son propre transposé, on a $\lambda' T \lambda = \lambda' T' \lambda$, donc

$$\Phi^2 = \lambda' T \lambda = \lambda' T' \lambda. \tag{5}$$

Ceci observé, (3) s'écrit

$$\frac{1 - h}{2} u' \lambda = \varphi'(u\Phi) \qquad \text{avec} \quad u' = (T\varphi)' = \varphi' T',$$

donc

$$\varphi' \left(\frac{1 - h}{2} T' \lambda - u\Phi \right) = 0.$$

Grâce à l'indépendance linéaire des V_i ceci équivaut à

$$\frac{1 - h}{2} T' \lambda = u\Phi = uu' \lambda = \frac{T + T'}{2} \lambda,$$

et, par suite, à l'équation définitive en h et λ

$$(hT' + T)\lambda = 0. \tag{6}$$

Les solutions h sont ainsi les valeurs caractéristiques de la matrice régulière $-T'^{-1}T$, mais il est plus naturel d'écrire l'équation caractéristique sous la forme

$$\Delta(h) = \text{dét}(hT' + T) = \begin{vmatrix} h+1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ ht_{12} & h+1 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ ht_{13} & ht_{23} & h+1 & \dots & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ht_{1n} & ht_{2n} & ht_{3n} & \dots & h+1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

C'est une équation algébrique en h, dont les termes de plus haut et de plus bas degré sont h^n et 1, et dont les racines différentes de 1 nous intéressent seules. $h = 1$ n'est d'ailleurs solution que si $\text{dét}(T + T') = 0$, c'est-à-dire si le

système des U_i n'est pas régulier (4). (7) est une équation réciproque, car

$$\text{dét}(hT' + T) \equiv h^n \text{ dét}\left(\frac{T}{h} + T'\right) \equiv h^n \text{ dét}\left(\frac{T'}{h} + T\right),$$

puisque les déterminants de deux matrices transposées sont égaux. Par suite, les racines autres que ± 1 sont toujours en nombre pair et deux à deux inverses. Si n est pair, -1 ne peut être racine sans être multiple d'ordre pair; si n est impair, -1 est toujours racine d'ordre impair; d'ailleurs, dans ce dernier cas, dét $(T - T')$ est symétrique gauche d'ordre impair, donc nul.

Par exemple, si $n = N + 2$, il n'existe aucune sphère orthogonale à tous les U_i; on sait également que $T + T'$ est une matrice régulière, ce qui exclut la valeur caractéristique $h = 1$.

En ce qui concerne la nature de l'invariant Φ associé à une racine de (7), observons tout d'abord que, si $h \neq -1$, (5) s'écrit encore

$$\Phi^2 = \lambda' \frac{hT' + T}{h+1} \lambda = 0,$$

en vertu de (6), et fournit le

THÉORÈME I. — *L'invariant associé à une valeur caractéristique $h \neq -1$ (et de 1) est un point ou un plan isotrope* (5).

On ne peut rien dire *a priori* sur la nature de l'invariant Φ associé à une racine $h = -1$.

2. Si la sphère U_1 est elle-même invariante par le produit $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ elle correspond nécessairement à la valeur caractéristique $h = -1$, et les équations (6) sont satisfaites par l'ensemble des valeurs $h = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$, ce qui donne les n relations

$$t_{i1} - t_{1i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

donc

$$t_{1i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \dots, n),$$

et réciproquement. Par conséquent, la sphère U_1 est invariante pourvu qu'elle soit orthogonale aux autres sphères U_i du produit (6).

D'une manière générale, si $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ laisse invariante une sphère Φ de masse non nulle, de la famille linéaire des U_i, il existe $n - 1$ autres sphères

---

(4) Cf. *loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. 75, 1951, p. 63.

(5) La restriction $h \neq -1$ suffit seule si Φ est de la famille linéaire des U_i.

(6) On peut aussi remarquer que $\overline{U_1 U_1} = -U_1$, donc l'invariance de U_1 pour $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ équivaut à son invariance pour $\overline{U_n \dots U_3 U_2}$; U_1 n'appartenant pas à la famille linéaire de ces $n - 1$ sphères, on a vu qu'il faut et il suffit qu'elle leur soit orthogonale; on a vu également que l'on a alors

$$\overline{U_n \dots U_3 U_2} U_1 = U_1, \qquad \text{donc} \qquad \overline{U_n \dots U_2 U_1} U_1 = -U_1.$$

$X_2, X_3, \ldots X_n$ de cette famille, qu'ont peut supposer de masse 1 comme Φ, et telles que l'on ait (7)

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{X_n \ldots X_3 X_2 \Phi}. \tag{8}$$

D'après ce qui précède, ces X_i sont orthogonaux à Φ, et, réciproquement, Φ est invariante pour $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ si elle est orthogonale aux X_i qui lui sont associés dans l'équivalence (8). On peut ainsi énoncer le

Théorème. — *Toute sphère (ou plan) Φ, de masse non nulle, et appartenant à la famille linéaire des U_i, invariante par le produit $U_n \ldots U_2 U_1$, est telle que ce produit soit directement équivalent à un produit $X_n \ldots X_2 \Phi$ dans lequel Φ est orthogonale aux X_i.*

Remarque. — Si $n = N + 2$, et si $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est inversement équivalent à un produit $\overline{X_p \ldots X_2 X_1}$, de rang p, il a été démontré antérieurement (8) que p est le rang de la matrice $T - T'$. Si donc $p < n$, $h = -1$ est racine de l'équation (7), d'ordre au moins égal à $n - p$, et l'équation (6) associée a une solution λ dépendant linéairement de $n - p$ arbitraires. Cette solution est évidemment constituée par les sphères de E_N qui sont orthogonales aux p sphères X_i.

3. Soit deux invariants

$$\Phi_1 = \lambda' u, \qquad \Phi_2 = \mu' u$$

associés à deux racines h_1 et h_2 de l'équation (7). Grâce aux relations (6) correspondantes

$$(h_1 T' + T)\lambda = \lambda'(h_1 T + T') = 0, \qquad (h_2 T' + T)\mu = 0,$$

il vient

$$\Phi_1 \Phi_2 = \lambda' u u' \mu = \lambda' \frac{T + T'}{2} \mu = \lambda' \frac{T - h_1 T}{2} \mu = \frac{1 - h_1}{2} \lambda' T \mu;$$

on a également

$$h_2 \Phi_1 \Phi_2 = \lambda' \frac{h_2 T + h_2 T'}{2} \mu = \lambda' \frac{h_2 T - T}{2} \mu = \frac{h_2 - 1}{2} \lambda' T \mu,$$

et l'élimination de $\lambda' T \mu$ entre ces deux équations fournit la relation

$$(h_1 h_2 - 1)\Phi_1 \Phi_2 = 0,$$

que traduit le

Théorème II. — *Les sphères invariantes associées à deux valeurs caractéristiques non inverses l'une de l'autre sont orthogonales (9). En particulier, si $\Delta(-1) = 0$, la ou les variétés invariantes associées contiennent les points invariants associés aux autres valeurs caractéristiques.*

---

(7) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 88.
(8) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. 75, 1951, p. 54.
(9) Pour $h_1 = h_2 \neq \pm 1$, c'est l'énoncé du théorème I.

Pour deux points Φ_1, Φ_2, $\Phi_1\Phi_2 = 0$ signifie que la droite qui les joint est isotrope; par conséquent deux points invariants distincts, de la famille linéaire des U_i, ne sont réels que s'ils correspondent à deux valeurs caractéristiques inverses l'une de l'autre (par exemple à la même racine $h = -1$).

Remarque. — Lorsque le système des U_i est orthogonal, on sait que les V_i leur sont égaux ($V_i = U_i$), et que ([10])

$$\overline{U_n \dots U_2 U_1}\Phi \equiv \Phi - 2\sum_{i=1}^{n}(U_i\Phi)U_i$$

se réduit à $-\Phi$ dès que Φ appartient à la famille linéaire des U_i. Effectivement, T est alors la matrice unité, et (7) se réduit à $(h+1)^n = 0$. $h = -1$ est la seule racine, et, pour celle-ci, le système (6) s'évanouit, laissant indéterminés tous les λ_i.

4. Appliquons ces généralités aux premières valeurs de n, en commençant par $n = 2$ malgré la nature élémentaire des résultats. Venant de voir ce qu'il en est lorsque $U_1U_2 = 0$, nous pouvons supposer que U_1U_2 n'est pas nul. En posant $U_1U_2 = \cos\alpha$, où α est complexe ([11]), la matrice $hT' + T$ est ici

$$hT' + T = \begin{Vmatrix} h+1 & 2\cos\alpha \\ 2h\cos\alpha & h+1 \end{Vmatrix},$$

et son déterminant

$$\Delta(h) = \det(hT' + T) = h^2 - 2h\cos 2\alpha + 1$$

a les deux zéros $h = e^{\pm 2i\alpha}$, inverses l'un de l'autre, et différents de -1. Ils sont distincts si $\sin\alpha \neq 0$, c'est-à-dire si le système des deux sphères U_1, U_2 est régulier. Ces deux valeurs caractéristiques fournissent deux points, ou plans isotropes, invariants; d'ailleurs le système (6) associé à $h = e^{\varepsilon 2i\alpha}$ ($\varepsilon = \pm 1$) se réduit à l'équation unique

$$(1 + 2e^{\varepsilon i\alpha})\lambda_1 + 2\lambda_2\cos\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\varepsilon i\alpha}\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

qui fournit le point invariant

$$\Phi = U_1 - e^{\varepsilon i\alpha}U_2. \tag{9}$$

Si U_1 et U_2 sont deux vraies sphères, ce sont les points de Poncelet de leur famille. Lorsque $\sin\alpha = 0$, les deux points (9) sont confondus avec le point de contact des deux sphères, dont le système est irrégulier, par exemple le point $U_1 - U_2$ si $\alpha = 0$.

([10]) *Loc. cit.*, *Acta Math.*, t. 81, 1950, p. 15.

([11]) Si les inversions sont réelles, U_1 et U_2 sont réelles ou imaginaires pures, donc $\cos\alpha$ est réel ou imaginaire pur, et α est ou réel ou de la forme $k\frac{\pi}{2} + iy$ (k entier réel et y réel).

En explicitant les deux sphères U_i de centre A_i et de rayon R_i, on a

$$U_i = \frac{\overrightarrow{A_iP}^2 - R_i^2}{2R_i} \qquad (i = 1, 2),$$

où P désigne, suivant les notations antérieures, le point courant de l'espace E_N. On déduit aisément de (9) les deux points géométriques M de Poncelet; cette équation est en effet de la forme

$$k\frac{\overrightarrow{MP}^2}{2} = \frac{\overrightarrow{A_1P}^2 - R_1^2}{2R_1} - e^{2i\alpha}\frac{\overrightarrow{A_2P}^2 - R_2^2}{2R_2},$$

où $-k$ est la masse du point (9). L'identification des termes du second degré en P donne

$$k = \frac{1}{R_1} - \frac{e^{2i\alpha}}{R_2},$$

et la dérivation par rapport à P donne ensuite, pour $P = A_1$,

$$k\overrightarrow{MA_1} = e^{2i\alpha}\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{R_2},$$

donc M est déterminé par l'égalité vectorielle

$$M = A_1 + \frac{R_1}{R_1 - e^{-2i\alpha}R_2}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Si U_1 et U_2 sont deux plans sécants, $\overline{U_2U_1}$ est une rotation autour d'une variété linéaire à $N - 2$ dimensions, et (9) fournit les deux plans isotropes qui passent par cette variété. Avec

$$U_i = \vec{e}_i \cdot \overrightarrow{A_iP}, \qquad \vec{e}_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2),$$

(9) est le plan isotrope

$$\Phi = \left(\vec{e}_1 - e^{2i\alpha}\vec{e}_2\right)\overrightarrow{A_1P} + e^{2i\alpha}\vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Lorsque les deux plans U_1, U_2 sont parallèles $\left(\vec{e}_1 = \vec{e}_2,\ \alpha = 0\right)$, $\overline{U_2U_1}$ est une translation et Φ est le plan de l'infini.

5. Supposons maintenant $n = 3$, et posons

$$U_1U_2 = \cos\gamma, \qquad U_2U_3 = \cos\alpha, \qquad U_1U_3 = \cos\beta,$$

α, β, γ étant trois angles complexes. Ici $\Delta(h)$ est

$$\Delta(h) = \begin{vmatrix} h+1 & 2\cos\gamma & 2\cos\beta \\ 2h\cos\gamma & h+1 & 2\cos\alpha \\ 2h\cos\beta & 2h\cos\alpha & h+1 \end{vmatrix}.$$

En désignant par δ l'invariant ([12]) des produits d'inversions directement équivalents à $\overline{U_3U_2U_1}$:

$$(10) \qquad \delta = \det\frac{T+T'}{2} = \frac{\Delta(1)}{8} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

et en se rappelant que $\Delta(h)$ est divisible par $h+1$, on voit tout de suite que $\Delta(h)$ est de la forme

$$\Delta(h) = (h+1)[(h+1)^2 + ah],$$

avec $a = 4(\delta - 1)$. L'équation caractéristique est ainsi

$$(11) \qquad \Delta(h) \equiv (h+1)[h^2 - 2(1-2\delta)h + 1] = 0,$$

et les trois valeurs caractéristiques sont -1 et $1 - 2\delta \pm 2\sqrt{\delta(\delta-1)}$. Pour $h = -1$, le système (6) se réduit aux deux équations

$$\frac{\lambda_1}{\cos\alpha} = \frac{\lambda_2}{-\cos\beta} = \frac{\lambda_3}{\cos\gamma},$$

en écartant toujours le cas où les U_i forment un système orthogonal. La sphère invariante correspondante est ainsi

$$(12) \qquad \Phi = U_1\cos\alpha - U_2\cos\beta + U_3\cos\gamma,$$

de masse $\sqrt{1-\delta}$. C'est donc une vraie sphère ou un plan non isotrope si $\delta \neq 1$. La construction de Φ est bien simple dans le trisphère que forment les U_i. La sphère $U_1\cos\alpha - U_2\cos\beta$ est en effet la sphère du faisceau U_1, U_2 qui est orthogonale à U_3; on peut l'appeler la hauteur du trisphère abaissée du sommet C_3 que constitue l'intersection de U_1 et U_2; cette hauteur coupe U_3 suivant une variété sphérique D_3 à $N-2$ dimensions qu'on peut appeler le pied de la hauteur. (12) exprime que Φ passe par D_3. On voit de même que Φ passe par le pied D_1, situé sur U_1, de la hauteur abaissée sur U_1 de l'intersection C_1 de U_2 et U_3.

Si $\delta(\delta - 1) \neq 0$, les deux autres racines de (11) sont distinctes, inverses l'une de l'autre, et différentes de ± 1; elles fournissent donc deux points invariants ([13]), distincts, situés sur (12).

Si $\delta = 1$, -1 est une racine triple de (11), et la seule variété invariante est (12), de masse nulle, donc point, ou plan isotrope, ou plan de l'infini.

Si $\delta = 0$, le système des U_i n'est pas régulier, et la racine double de (11) est égale à 1. Les seules variétés invariantes de la famille linéaire des U_i sont la vraie sphère (ou plan) Φ, et les points communs à tous les U_i.

([12]) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 83.

([13]) Ça peut être aussi des plans isotropes passant par le centre de Φ.

Nous pouvons résumer ces résultats dans le

THÉORÈME. — *Dans un trisphère* U_1, U_2, U_3, *les pieds des hauteurs sont deux à deux cosphériques, et la sphère de la famille linéaire des* U_i *qui est invariante pour un produit d'inversions tel que* $\overline{U_3U_2U_1}$ *est celle qui est définie par les pieds situés sur les deux sphères extrêmes* U_1, U_3 *du produit.*

6. Nous vu au paragraphe 2 que la sphère Φ est caractérisée par une équivalence directe de la forme

$$\overline{U_3U_2U_1} = \overline{X_2X_1\Phi},$$

où les sphères X_1 et X_2 sont orthogonales à Φ. Le produit X_1X_2 de ces sphères, supposées unitaires, s'obtient aisément en exprimant l'invariance de dét $\frac{T+T'}{2}$ dans l'équivalence, ce qui donne ici

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_1X_2 \\ 0 & X_1X_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (X_1X_2)^2, \tag{13}$$

donc (14)

$$X_1X_2 = \pm\sqrt{1-\delta};$$

ainsi, X_1 et X_2 font un angle ω égal à arc sin $\sqrt{\delta}$. Les points de Poncelet du faisceau X_1, X_2 sont les deux points invariants de $\overline{U_3U_2U_1}$; ce sont les points communs à toutes les sphères orthogonales à X_1 et X_2, donc les points communs à Φ et au cercle d'intersection de toutes les sphères orthogonales à U_1, U_2, U_3. La construction de ces deux points est aisée, et fait connaître le faisceau de X_1, X_2 ; il ne reste plus qu'à préciser l'angle des deux sphères pour connaître la rotation anallagmatique $\overline{X_2X_1}$; (13) ne fournit d'ailleurs que la valeur absolue de cet angle et ne suffit pas (15).

Observons encore qu'en fonction de ω, les deux racines de (11) qui fournissent les points invariants sont $e^{\pm 2i\omega}$.

7. Supposons plus particulièrement que les U_i soient trois variétés linéaires. Dans le plan ($N = 2$), il s'agit donc de trois droites, que nous admettons former un triangle, et du produit des symétries par rapport aux trois côtés de ce triangle ABC. Si α, β, γ désignent par exemple les angles supplémentaires des angles intérieurs de A, B, C, la somme

$$2\sigma = \alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

---

(14) Ça résulte aussi d'une formule (49) établie dans l'article *Sur les produits d'inversions* (*Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 112).

(15) Dans le plan, une inversion permet de réduire deux des cercles U_i à des droites, tout au moins si deux de ces cercles se coupent. La détermination des éléments invariants relève ensuite de raisonnements élémentaires de géométrie.

et l'identité classique qui donne de (10) l'expression

$$\delta = 4\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)$$

montre que δ est nul. Ça résulte encore de ce que le système des U_i est irrégulier, car leur famille linéaire est l'ensemble de toutes les droites du plan et ne contient aucun système orthonormal de trois droites; tout système orthogonal de trois droites comprenant nécessairement la droite de l'infini, dont la masse est nulle.

Si U_1, U_2, U_3 sont les côtés respectifs BC, CA, AB, la droite Φ invariante pour $\overline{U_3U_2U_1}$ est la droite D_1D_3 qui joint les pieds des hauteurs AD_1, CD_3. X_1 et X_2 sont deux droites perpendiculaires à Φ, donc parallèles ($X_1X_2 = \pm 1$), et $\overline{X_2X_1}$ est une translation parallèle à Φ. D'ailleurs il est bien connu que $\overline{U_3U_2U_1}$, qui est *a priori* une symétrie dans le plan, équivaut à un certain retournement, associé à une translation parallèle à l'axe de ce retournement.

Lorsque δ n'est pas nul, comme dans le cas des inversions par rapport à trois cercles du plan, (13) nous apprend que l'angle de la rotation anallagmatique $\overline{X_2X_1}$ se conserve dans la permutation circulaire des U_i. Lorsque X_1 et X_2 sont, comme maintenant, des droites parallèles, il est à prévoir que la translation $\overline{X_2X_1}$ a le même caractère. Quelle est sa valeur en fonction du triangle ABC? C'est le vecteur $\overrightarrow{D_1D_1'}$ qui joint D_1 à son transformé $D_1' = \overline{U_3U_2U_1}\,D_1 = \overline{U_3U_2}\,D_1$; D_1' s'obtient donc par la rotation de D_1, autour de A, d'un angle égal à $2\widehat{AC, AB}$. La longueur de cette translation est ainsi

$$D_1D_1' = 2A\cdot D_1\sin A = \frac{2S}{R},$$

en appelant S et R l'aire du triangle ABC et le rayon de son cercle circonscrit.

8. Dans l'espace E_N à plus de deux dimensions, les trois plans U_i (variétés linéaires à $N-1$ dimensions) se coupent généralement suivant une variété S à $N-3$ dimensions, qui constitue le sommet du triplan ([16]).

Pour $N=3$, S est un point O si les U_i forment un vrai trièdre ([17]) OABC, que nous supposons non rectangle, en vertu de la remarque qui clôt le paragraphe 3. Le pied de hauteur D_1 est ici la droite d'intersection de la face $U_1 = OBC$ avec le plan hauteur AOD_1; si D_3 est de même la projection orthogonale de l'arête OC sur la face opposée $U_3 = OAB$, le plan invariant Φ

([16]) Ce que nous appelons les sommets au paragraphe 5 sont ici les trois arêtes du trièdre, pour $N=3$, et trois variétés linéaires à $N-2$ dimensions dans le cas général, auxquelles on pourrait encore réserver ce nom.

([17]) Si les U_i forment un prisme triangulaire, on retrouve évidemment le problème relatif à un triangle du plan.

est le plan OD_1D_3. δ, qui diffère de 1, mesure le carré du volume v du parallélépipède construit sur les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, qui sont les arêtes du trièdre supplémentaire, ou d'un trièdre analogue; il n'est pas nul, et il existe effectivement des familles de trois plans orthogonaux passant par O. X_1 et X_2 sont deux plans perpendiculaires au plan Φ, passant par O, et faisant l'angle arc sin$v$. Si $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ est le trièdre supplémentaire de OABC, les angles α, β, γ sont supplémentaires des angles dièdres A, B, C, et, en fonction de ceux-ci,

$$\begin{aligned}\delta &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C\\ &= -4\cos\sigma\cos(\sigma - A)\cos(\sigma - B)\cos(\sigma - C),\end{aligned}$$

où l'on pose $A + B + C = 2\sigma$.

$\overline{U_3U_2U_1}$ *est le produit de la symétrie par rapport au plan* OD_1D_3 *et d'une rotation d'angle* arc sin$v$ *autour de la normale en* O *à ce plan.*

C'est un résultat connu que le volume V du parallélépipède construit sur les arêtes unitaires du trièdre OABC lui-même est

$$V = \frac{\rho^2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\rho^2}{\sin A\sin B\sin C},$$

donc l'angle de la rotation est, en fonction de ce trièdre,

$$\text{arc}\cos\sqrt{1 - V\sin A\sin B\sin C}.$$

Les deux variétés invariantes de masse nulle sont évidemment les plans isotropes qui passent par l'axe de la rotation.

Lorsque N surpasse 3, la variété linéaire E_3 à trois dimensions, qui est perpendiculaire à S en un point O de S, coupe les plans U_i suivant trois variétés linéaires U_i^* à deux dimensions; tout plan Φ de la famille linéaire des U_i passe par S et a sur E_3 une trace Φ^* à deux dimensions. Les trois vecteurs $\vec{e}_i$ normaux aux plans $U_i = \vec{e}_i.\overrightarrow{OP}$ sont dans E_3. On comprend alors qu'il n'y ait aucune différence essentielle avec le cas $N = 3$ qui vient d'être traité.

CHAPITRE II.

Sur certains n-èdres sphériques ou plans de E_{n-1}.

9. Dès que le nombre n des U_i surpasse 3, le produit $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$ ne se réduit généralement pas de manière intéressante, mais une réduction qui rappelle celle rencontrée avec $n \leq 3$ devient possible avec des systèmes particuliers que nous nous proposons d'étudier. Il sera instructif d'examiner d'abord les produits d'inversions de rang 4.

Un tel produit $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ n'admet une sphère (ou plan non isotrope)

invariante, dans la famille linéaire des U_i, que si la matrice $T - T'$ est singulière. Ici, dét$(T - T')$ est un carré, et l'on a précisément

$$\text{dét}(T - T') = (t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23})^2.$$

Ainsi, un tel invariant n'existe que pour les produits qui vérifient la condition

$$t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} = 0. \tag{1}$$

Observons en passant que cette expression se conserve par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4 en 4, 1, 2, 3, de sorte que, si $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ a une sphère invariante dans la famille des U_i, il en est de même pour $\overline{U_3U_2U_1U_4}$, donc également pour $\overline{U_2U_1U_4U_3}$ et $\overline{U_1U_4U_3U_2}$. Les produits inverses $\overline{U_1U_2U_3U_4}$, $\overline{U_2U_3U_4U_1}$, $\overline{U_3U_4U_1U_2}$ et $\overline{U_4U_1U_2U_3}$ ont évidemment la même propriété.

Dans le plan ($N = 2$), le système de quatre cercles U_i linéairement distincts est complet. $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ est inversement équivalent à un produit dont le rang est celui de la matrice ([18]) $T - T'$; ce rang p, nécessairement pair, est égal à 2 ou 0 si (1) est vérifié. Lorsque p est nul, $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ se réduit à l'identité géométrique; dans l'autre cas, qui nous intéresse seul, il existe deux cercles X_1, X_2 tels que

$$\overline{U_4U_3U_2U_1} = -\overline{X_2X_1},$$

et le produit conserve tous les cercles orthogonaux à X_1, X_2. D'ailleurs le système des équations [(6), chap. I] associées à la racine multiple $h = -1$ de [(7), chap. I] est au plus de rang 2 et fournit au moins un faisceau de cercles. Les deux autres valeurs caractéristiques, inverses l'une de l'autre, donnent un ou deux points invariants, qui sont évidemment le ou les points de base du faisceau des cercles invariants.

Si les U_i sont quatre droites du plan, ils ne peuvent être linéairement distincts, et le rang de $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ est au plus égal à 2. Cette transformation est effectivement un déplacement dans le plan, donc en général une rotation, et tous les cercles centrés au centre de la rotation sont invariants; les éléments invariants de masse nulle sont le centre de rotation et les droites isotropes qui y passent.

Lorsque N surpasse 2, le système des quatre sphères U_i n'est plus complet. S'il est régulier [dét$(T + T') \neq 0$], et vérifie (1), $h = -1$ fournit toujours une famille de sphères invariantes, formant généralement un faisceau dans la famille linéaire des U_i. Les deux autres valeurs caractéristiques fournissent un bipoint invariant. Les sphères invariantes associées à $h = -1$ se coupent suivant une variété sphérique à $N - 2$ dimensions; celles qui sont orthogonales

([18]) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. Math.*, t. 75, 1951, p. 54.

à tous les $U_i (h=1)$ forment une famille linéaire d'ordre $N-2$, et se coupent suivant une variété sphérique à deux dimensions; ces deux variétés sphériques se coupent en deux points qui constituent justement le bipoint invariant en question.

10. Ces considérations deviennent particulièrement intéressantes avec quatre plans U_i de l'espace E_3. Leur système n'est pas régulier, car tout système orthogonal de quatre plans de cet espace comprend le plan de l'infini, dont la masse est nulle. 1 est donc valeur caractéristique. $\Delta(1)=\det(T+T')=0$ exprime d'ailleurs la relation obligatoire entre les t_{ij} relatifs à quatre vecteurs unitaires de E_3.

Nous supposons que les U_i forment un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, en désignant par A_i le sommet opposé à la face U_i. Le produit des quatre symétries $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ est un déplacement de E_3, donc un certain déplacement hélicoïdal d'axe D, d'angle ω, et de translation $\mathfrak{T}$ parallèle à D. En général, les seuls invariants sont le plan de l'infini, et les plans isotropes passant par D. Le plan de l'infini, orthogonal à tous les U_i, est l'invariant associé à $h=1$; les plans isotropes sont les invariants, de masse également nulle, associés aux deux autres racines de $\Delta(h)=0$. Il n'existe un plan invariant de masse non nulle que si $\mathfrak{T}$ est l'identité, ce qu'on peut écrire $\mathfrak{T}\equiv 1$ ou mes $\mathfrak{T}=0$, ou si ω est un multiple entier de π. Dans le premier cas, les invariants sont tous les plans perpendiculaires à D; dans le second, les plans passant par D. Les deux familles existent simultanément si l'on a à la fois $\mathfrak{T}\equiv 1$ et $\omega=k\pi$ ($k=0$ ou 1). Mais on doit observer que, si $\mathfrak{T}\equiv 1$, $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ équivaut au produit $\overline{X_2X_1}$ de deux symétries par rapport à deux plans passant par D, qui appartiennent, comme tout plan de E_3, à la famille linéaire des U_i; cette équivalence ne peut être directe puisque les U_i sont linéairement distincts, ni inverse ([19]) car $n=4$ est inférieur à $N+2=5$. Un raisonnement semblable écarte le cas $\omega=0$. En résumé, nous avons établi que *le produit* $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ *de quatre symétries par rapport aux faces d'un tétraèdre de* E_3 *n'admet une variété invariante de masse non nulle que s'il équivaut à un vrai déplacement hélicoïdal d'angle* π, *et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que soit satisfaite la relation* (1).

11. Précisons les éléments du retournement et de $\mathfrak{T}$. Posons

$$(2)\qquad \begin{cases} U_i=\vec{e}_i.\overrightarrow{A_4P} & (i=1,\ 2,\ 3),\\ U_4=\vec{e}_4.\overrightarrow{B_4P}=\vec{e}_4.\overrightarrow{A_4P}-d, \end{cases}$$

([19]) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. Math.*, 1951, t. 75, p. 54. On peut aussi remarquer que $\mathfrak{T}\equiv 1$ entraîne l'invariance de toutes les sphères centrées sur D, alors que la famille des U_i ne comporte que des plans, et que des invariants n'appartenant pas à cette famille doivent être orthogonaux aux quatre plans U_i, contrairement aux sphères en question.

où les quatre vecteurs $\vec{e_i}$ sont unitaires, et en désignant par d la mesure $\vec{e_4}.\overrightarrow{A_4B_4}$ de la hauteur A_4B_4 abaissée de A_4 sur U_4; on choisit le sens de $\vec{e_4}$ de manière que d soit positif. U_iU_j étant égal au produit scalaire $\vec{e_i}.\vec{e_j}$, la condition (1) s'écrit

$$(3) \qquad \left(t_{23}\vec{e_1} - t_{13}\vec{e_2} + t_{12}\vec{e_3}\right)\vec{e_4} = 0,$$

et exprime que A_4B_4 est parallèle à un plan déterminé par les trois faces issues de A_4; sous une autre forme, (3) exprime que U_4 est parallèle au vecteur

$$\vec{\nu} = t_{23}\vec{e_1} - t_{13}\vec{e_2} + t_{12}\vec{e_3},$$

ou qu'il est perpendiculaire au plan

$$(4) \qquad \Phi = t_{23}U_1 - t_{13}U_2 + t_{12}U_3,$$

qui passe par A_4, donc par A_4B_4. Nous avons vu au paragraphe 5 que ce plan Φ est invariant par $\overline{U_3U_2U_1}$; il l'est aussi par $\overline{U}_4$, à cause de son orthogonalité avec U_4; il est donc invariant par $\overline{U_4U_3U_2U_1}$, et contient l'axe D du retournement.

D'ailleurs D est l'axe du faisceau des plans invariants, et se détermine à l'aide de ceux-ci, que fait connaître le système [(6), chap. I] relatif à $h = -1$. Ce système, de rang 2, équivaut à celui des deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} t_{12}\lambda_2 + t_{13}\lambda_3 + t_{14}\lambda_4 = 0, \\ -t_{12}\lambda_1 + t_{23}\lambda_3 + t_{24}\lambda_4 = 0, \end{cases}$$

en supposant, par exemple, $t_{12} \neq 0$. La résolution par rapport à λ_1 et λ_2 met la solution sous la forme $\lambda_3\Phi + \lambda_4\Psi$, où Φ est le plan (4) déjà rencontré, et Ψ le plan invariant qui passe par A_3 :

$$(6) \qquad \Psi = t_{24}U_1 - t_{14}U_2 + t_{12}U_4.$$

Les produits du point $B_4 = -\dfrac{\overrightarrow{B_4P}^2}{2}$ et des U_i sont,

$$U_iB_4 = \vec{e_i}.\overrightarrow{A_4B_4} = \vec{e_i}.\vec{e_4}\,d = \frac{d}{2}t_{i4} \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$U_4B_4 = 0,$$

donc $\Psi B_4 = 0$. Ψ, comme Φ, passe par B_4, qui se trouve ainsi sur D. La direction de D est celle du produit vectoriel des deux vecteurs

$$(7) \qquad \begin{cases} \vec{\nu} = t_{23}\vec{e_1} - t_{13}\vec{e_2} + t_{12}\vec{e_3}, \\ \vec{\nu'} = t_{24}\vec{e_1} - t_{14}\vec{e_2} + t_{12}\vec{e_4}. \end{cases}$$

Formons d'abord le tableau des produits scalaires $\vec{\nu}.\vec{e_i}$ et $\vec{\nu'}.\vec{e_i}$; compte tenu

de (1), on a

$$\vec{\nu}\cdot\vec{e}_1 = t_{23}, \qquad \vec{\nu}\cdot\vec{e}_2 = -t_{13}+t_{12}t_{23}, \qquad \vec{\nu}\cdot\vec{e}_3 = t_{12}, \qquad \vec{\nu}\cdot\vec{e}_4 = 0,$$
$$\vec{\nu}'\cdot\vec{e}_1 = t_{24}, \qquad \vec{\nu}'\cdot\vec{e}_2 = -t_{14}+t_{12}t_{24}, \qquad \vec{\nu}'\cdot\vec{e}_3 = t_{12}t_{34}, \qquad \vec{\nu}'\cdot\vec{e}_4 = t_{12};$$

rapporté aux trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, D a donc pour paramètres directeurs les déterminants du tableau

$$\begin{Vmatrix} t_{23} & -t_{13}+t_{12}t_{23} & t_{12} \\ t_{24} & -t_{14}+t_{12}t_{24} & t_{12}t_{34} \end{Vmatrix},$$

ce qui conduit, après division par t_{12} et compte tenu de (1), au vecteur d'expression remarquable

$$\vec{\chi} = -\left(t_{14}^{-1}\vec{e}_1 + t_{24}^{-1}\vec{e}_2 + t_{34}^{-1}\vec{e}_3\right), \tag{8}$$

en désignant par t_{ij}^{-1} les éléments ([20]) de la matrice T^{-1}. La longueur de $\vec{\chi}$ est donnée par

$$\vec{\chi}^2 = (t_{14}^{-1})^2 + (t_{24}^{-1})^2 + (t_{34}^{-1})^2 + t_{12}t_{14}^{-1}t_{24}^{-1} + t_{13}t_{14}^{-1}t_{34}^{-1} + t_{23}t_{24}^{-1}t_{34}^{-1},$$

et, en utilisant les expressions des t_{ij} en fonction des t_i^{-1}, qui sont naturellemen de la forme de celles des t_{ij}^{-1} en fonction des t_{ij},

$$\vec{\chi}^2 = t_{14}^{-1}[t_{14}^{-1} - t_{12}^{-1}t_{24}^{-1} + t_{34}^{-1}(-t_{13}^{-1} + t_{12}^{-1}t_{24}^{-1})] + t_{24}^{-1}[t_{24}^{-1} - t_{23}^{-1}t_{34}^{-1}] + (t_{34}^{-1})^2;$$

les deux crochets sont justement $-t_{14}$ et $-t_{24}$, ce qui donne l'expression remarquable

$$\vec{\chi}^2 = -(t_{14}t_{14}^{-1} + t_{24}t_{24}^{-1} + t_{34}t_{34}^{-1}) \tag{9}$$

ou

$$|\vec{\chi}| = \sqrt{-(t_{14}t_{14}^{-1} + t_{24}t_{24}^{-1} + t_{34}t_{34}^{-1})}. \tag{9'}$$

12. Les conditions (1) et $\Delta(1) = 0$ permettent de rattacher bien simplement cette valeur au déterminant δ de la formule [(10), chap. I] relative aux trois plans U_1, U_2, U_3, de sorte que $\sqrt{\delta}$ est ce que certains auteurs appellent le sinus du trièdre $A_4\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Tout d'abord, on a en effet

$$4\delta = 4(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma) + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 4 - t_{12}^2 - t_{13}^2 - t_{23}^2 + t_{12}t_{13}t_{23};$$

([20]) Pour l'expression des

$$t_{ij}^{-1} = -t_{ij} + \sum_{i<\alpha<j} t_{i\alpha}t_{\alpha j} - \sum_{i<\alpha<\beta<j} t_{i\alpha}t_{\alpha\beta}t_{\beta j} + \dots \qquad (i<j),$$

cf. *loc. cit.*, *Bull. Sc. Math.*, t. 74, 1950, p. 81 et *Acta Math.*, t. 82, 1950, p. 15.

d'autre part, le développement de Laplace de $\Delta(1)$ donne, compte tenu de (1),

$$\Delta(1)=\begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & t_{24} \\ t_{13} & t_{23} & 2 & t_{34} \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} & 2 \end{vmatrix} = (4-t_{12}^2)(4-t_{34}^2)+(t_{13}t_{24}-t_{23}t_{14})^2$$
$$-(2t_{23}-t_{12}t_{13})(2t_{23}-t_{24}t_{34})-(2t_{14}-t_{12}t_{24})(2t_{14}-t_{13}t_{34})$$
$$-(2t_{13}-t_{12}t_{23})(2t_{13}-t_{14}t_{34})-(2t_{24}-t_{12}t_{14})(2t_{24}-t_{23}t_{34})$$
$$=16-4(t_{12}^2+t_{13}^2+t_{23}^2+t_{14}^2+t_{24}^2+t_{34}^2)$$
$$+4(t_{12}t_{13}t_{23}+t_{12}t_{14}t_{24}+t_{13}t_{14}t_{34}+t_{23}t_{24}t_{34})$$
$$+2t_{12}t_{34}(t_{12}t_{34}-t_{13}t_{24}-t_{23}t_{14}).$$

La dernière parenthèse vaut $-2t_{23}t_{14}$, donc la nullité de

$$\frac{\Delta(1)}{4}=(4-t_{12}^2-t_{13}^2-t_{23}^2+t_{12}t_{13}t_{23})$$
$$-(t_{14}^2+t_{24}^2+t_{34}^2-t_{12}t_{14}t_{24}-t_{13}t_{14}t_{34}-t_{23}t_{24}t_{34}+t_{12}t_{23}t_{34}t_{14})$$

s'écrit

$$4\delta=t_{14}(t_{14}-t_{12}t_{24}-t_{13}t_{34}+t_{12}t_{23}t_{34})+t_{24}(t_{24}-t_{23}t_{34})+t_{34}^2$$

ou enfin

$$4\delta=-(t_{14}t_{14}^{-1}+t_{24}t_{24}^{-1}+t_{34}t_{34}^{-1}). \tag{10}$$

On voit ainsi que

$$\left|\vec{\chi}\right|=2\sqrt{\delta}=2\sin\text{ trièdre}\left(A_4\vec{e}_1.\vec{e}_2.\vec{e}_3\right). \tag{11}$$

13. Il ne reste plus qu'à déterminer la translation $\mathfrak{T}$ pour caractériser le déplacement hélicoïdal représenté par $\overline{U_4U_3U_2U_1}$. Il suffit de projeter $\overrightarrow{A_4A_4'}$ sur D, en appelant A_4' le transformé $\overline{U_4U_3U_2U_1}A_4$. Or $\overline{U_3U_2U_1}A_4=A_4$, donc $\overrightarrow{A_4A_4'}=2\overrightarrow{A_4B_4}$, et le vecteur $\vec{\tau}$ représentant la translation $\mathfrak{T}$ est

$$\vec{\tau}=2d\frac{\vec{e}_4.\vec{\chi}}{\vec{\chi}^2}\vec{\chi}.$$

(8) donne tout de suite

$$\vec{e}_4.\vec{\chi}=-\frac{1}{2}(t_{14}^{-1}t_{14}+t_{24}^{-1}t_{24}+t_{34}^{-1}t_{34}),$$

donc

$$\vec{\tau}=d\vec{\chi}. \tag{12}$$

14. Conséquences. — Nous avons observé au paragraphe 9 que le produit $\overline{U_1U_4U_3U_2}$ vérifie également (1). Or il s'écrit

$$\overline{U_1U_4U_3U_2}=\overline{U_1}\,\overline{U_4U_3U_2U_1}\,\overline{U_1},$$

et représente le transformé de $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ par la symétrie U_1; c'est donc le produit d'un retournement et d'une translation, l'axe D_1 du retournement étant le symétrique de D par rapport à la face U_1, donc rencontrant D au point où il perce U_1; mais la transposition à ce produit des propriétés de $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ nous apprend que D_1 passe par le pied B_1 de la hauteur abaissée de A_1 sur cette face U_1, donc D passe par B_1 et l'on a le

THÉORÈME. — *L'axe du retournement de* $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ *est la droite qui joint les pieds des hauteurs abaissées sur les deux plans de symétrie extrêmes.*

C'est la généralisation de ce que nous avons observé pour le triangle.

La translation associée à $\overline{U_1U_4U_3U_2}$ a la longueur de $\vec{\tau}$ par raison de symétrie, mais mesure d'autre part $2d_1\sqrt{\delta_1}$, en désignant par d_1 la longueur de la hauteur A_1B_1 et par $\sqrt{\delta_1}$ le sinus du trièdre ([21]) $A_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4$, si l'on applique les formules (11) et (12). En généralisant l'emploi des indices, de façon que d et δ deviennent d_i et δ_i, les permutations circulaires successives donnent les égalités

$$d_1\sqrt{\delta_1} = d_2\sqrt{\delta_2} = d_3\sqrt{\delta_3} = d_4\sqrt{\delta_4}. \tag{13}$$

C'est une propriété classique de tous les tétraèdres, et pas particulière à ceux envisagés ici. En désignant par s_i l'aire de la face U_i, le volume V du tétraèdre est tel que l'on ait $3V = d_i s_i$, donc (13) s'écrit encore

$$\frac{s_1}{\sqrt{\delta_1}} = \frac{s_2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{s_3}{\sqrt{\delta_3}} = \frac{s_4}{\sqrt{\delta_4}}, \tag{13'}$$

et exprime en effet que, *dans un tétraèdre, les aires des faces sont proportionnelles aux sinus des trièdres suplémentaires des trièdres opposés* ([22]). Pour les tétraèdres qui vérifient (1), la valeur commune de ces rapports est ([23]) $\dfrac{6V}{\left|\vec{\tau}\right|}$.

15. Étendons ces résultats à une classe de produits d'inversions $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$ de l'espace E_{n-1}. On sait qu'il existe toujours une sphère invariante de la famille linéaire des U_i si n est impair, mais pas nécessairement si n est pair.

([21]) La mesure de $\vec{\tau}$ ne pouvant dépasser $2d$, et valant $2d\sqrt{\delta}$, on vérifie ainsi la propriété connue de $\sqrt{\delta}$ de pouvoir être assimilé à un sinus.

([22]) *Voir* par exemple : DOSTOR, *Éléments de la théorie des déterminants*, 2e édition, p. 269.

([23]) C'est à rapprocher de la formule analogue obtenue au paragraphe 7 pour le triangle, et qui s'écrit

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4S}{\left|\vec{\tau}\right|}, \qquad \text{puisque} \quad \sin(\pi - A) = \sin A.$$

Les produits que nous considérons sont ceux qui possèdent $n-2$ sphères invariantes linéairement distinctes, dans la famille linéaire des U_i, c'est-à-dire tels que $h=-1$ soit racine d'ordre $n-2$ de $\Delta(h)=0$ et que les équations [(6), chap. I] associées

$$(T-T')\lambda=0 \tag{14}$$

forment un système de rang 2. Le système des U_i n'est pas orthogonal, en vertu d'une remarque déjà faite, et nous supposons par exemple que t_{12} n'est pas nul. Les deux premières équations (14)

$$\begin{cases} t_{12}\lambda_2+t_{13}\lambda_3+\ldots+t_{1j}\lambda_j+\ldots+t_{1n}\lambda_n=0, \\ -t_{12}\lambda_1+t_{23}\lambda_3+\ldots+t_{2j}\lambda_j+\ldots+t_{2n}\lambda_n=0, \end{cases} \tag{15}$$

sont distinctes et définissent λ_1 et λ_2 en fonction des autres λ_j; il faut donc, et il suffit, que les $n-2$ autres équations (14), soit

$$-t_{1i}\lambda_1-t_{2i}\lambda_2-\ldots-t_{i-1,i}\lambda_{i-1}+t_{i,i+1}\lambda_{i+1}+\ldots+t_{in}=0 \qquad (3\leq i\leq n), \tag{16}$$

soient des combinaisons linéaires de (15), ce qui fournit les $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ conditions essentielles

$$t_{12}t_{ij}-t_{1i}t_{2j}+t_{1j}t_{2i}=0 \qquad (3\leq i<j\leq n). \tag{17}$$

Si t_{12} était nul, mais $t_{rs}\neq 0$, on remplacerait (17) par $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ autres conditions semblables où les indices fixes 1, 2 seraient remplacés par r, s. Observons en passant que la transformation $\overline{V_n\ldots V_2V_1}$, inverse de $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$, a les mêmes invariances, et que, par suite, les relations (17) sont équivalentes aux relations analogues entre les t_{ij}^{-1} :

$$t_{12}^{-1}t_{ij}^{-1}-t_{1i}^{-1}t_{2j}^{-1}+t_{1j}^{-1}t_{2i}^{-1}=0 \qquad (3\leq i<j\leq n). \tag{18}$$

Ceci posé, les sphères invariantes cherchées sont obtenues en résolvant (15) par rapport à λ_1 et λ_2, et forment une famille linéaire $\sum_{i=3}^{n}\lambda_i\Phi_i$ d'ordre $n-2$, dont des sphères de base sont les $n-2$ sphères

$$\Phi_i=t_{2i}U_1-t_{1i}U_2+t_{12}U_i \qquad (i=3,\ 4,\ \ldots,\ n). \tag{19}$$

Ces Φ_i sont bien linéairement distinctes puisque les U_i de même indice le sont et que t_{12} n'est pas nul, et, se trouvant dans un espace E_{n-1}, elles se coupent suivant un cercle D.

16. Si X_1 désigne l'une des sphères Φ_i, on a vu au paragraphe 2 qu'il existe $n-1$ autres sphères X_2', X_3', ..., X_n' de la famille des U_i, orthogonales à X_1, et telles qu'ait lieu l'équivalence directe

$$\overline{U_n\ldots U_2U_1}=\overline{X_n'\ldots X_3'X_2'X_1}.$$

Les sphères invariantes qui sont orthogonales à X_1 sont invariantes par le produit partiel $\overline{X'_n \ldots X'_3 X'_2}$ et forment une famille linéaire d'ordre $n-3$ dans la famille de ces X'_i. Si X_2 est l'une d'elles, on peut lui associer $n-2$ sphères $X''_3, X''_4, \ldots, X''_n$ de cette dernière famille, assurant l'équivalence directe

$$\overline{X'_n \ldots X'_3 X'_2} = \overline{X''_n \ldots X''_4 X''_3 X_2},$$

donc l'égalité

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{X''_n \ldots X''_4 X''_3 X_2 X_1},$$

où $X_1 X_2 = 0$ et où les X''_i sont orthogonales à X_1 et X_2. De proche en proche, on aboutit à l'égalité

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{X_n X_{n-1} X_{n-2} \ldots X_2 X_1}, \tag{20}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}$ forment un système orthonormal de la famille des sphères invariantes, et orthogonal aux deux autres sphères X_{n-1}, X_n du produit.

De même que les Φ_i, $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}$ se coupent suivant le cercle D, et le produit $\overline{X_{n-2} \ldots X_2 X_1}$ est un retournement autour de ce cercle. C'est l'équivalent anallagmatique du retournement autour d'une droite. $\overline{X_n X_{n-1}}$ est une rotation anallagmatique, autour d'une hypersphère à $n-2$ dimensions, dont les deux sphères X_{n-1}, X_n sont orthogonales à l'axe D du retournement.

L'angle de X_{n-1} et X_n se déduit de l'égalité des dét$(T+T')$ relatifs à deux produits d'inversions directement équivalents. T se rapportant toujours aux U_i, l'égalité (20) entraîne, grâce aux orthogonalités réalisées chez les X_i, l'égalité

$$\Delta(1) = \text{dét}(T+T') = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 2(X_{n-1}X_n) \\ 0 & 0 & \ldots & 2(X_{n-1}X_n) & 2 \end{vmatrix} = 2^n[1-(X_n X_{n-1})^2],$$

donc

$$\sin\left(\widehat{X_n, X_{n-1}}\right) = \sqrt{\frac{\Delta(1)}{2^n}}. \tag{21}$$

17. Considérons le bipoint A_n commun à tous les U_i d'indice $i < n$. C'est un sommet du n-sphère formé par tous les U_i. Les relations (17), relatives à $j = n$, expriment que les sphères $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_{n-1}$ sont orthogonales à U_n; leur expression (19) montre d'autre part qu'elles passent par A_n, donc elles passent par le cercle commun à toutes les sphères passant par A_n et orthogonales à U_n, et qui forment une famille linéaire d'ordre $n-2$. Ce cercle est la hauteur du n-sphère, abaissée du sommet A_n sur la face opposée U_n, et coupe U_n suivant un bipoint B_n, qui constitue le pied de cette hauteur. Les deux cercles D et $A_n B_n$

se rencontrent puisqu'ils sont sur l'hypersphère à deux dimensions commune aux $n-3$ sphères $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_{n-1}$. Ils se rencontrent effectivement en B_n : en effet, la hauteur est l'intersection de toutes les sphères $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i U_i$ orthogonales à U_n, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_{in}\lambda_i = 0,$$

et se détermine par les équations

$$\frac{U_1}{t_{1n}} = \frac{U_2}{t_{2n}} = \ldots = \frac{U_{n-1}}{t_{n-1,n}}; \tag{22}$$

B_n s'obtient donc à l'aide du système

$$U_i B_n = t_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad \text{et} \qquad U_n B_n = 0. \tag{23}$$

Nous savons déjà que $\Phi_3 B_n = \Phi_4 B_n = \ldots = \Phi_{n-1} B_n = 0$, et il suffit de vérifier que $\Phi_n B_n$ est également nul, ce qui est immédiat à l'aide de (19) et (23).

Un raisonnement déjà utilisé pour le tétraèdre montre que le cercle inverse de D par rapport à U_1 est l'axe du retournement anallagmatique associé à $\overline{U_1 U_n \ldots U_3 U_2}$, et passe donc par le pied B_1 de la hauteur abaissée du sommet A_1 (intersection des U_i d'indice $i > 1$) sur U_1. D passe donc aussi par B_1 et l'on a le

THÉORÈME. — *Dans un n-sphère vérifiant les conditions* (17), *l'axe du retournement qui constitue l'une des composantes du produit* $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ *est le cercle* ([24]) *qui joint les pieds des hauteurs situés sur les deux faces extrêmes* U_1, U_n.

Le même raisonnement montre aussi que *l'angle de la rotation anallagmatique qui constitue l'autre composante se conserve dans une permutation circulaire des* U_i.

18. Complétons ces résultats dans le cas particulièrement intéressant où les U_i sont des plans formant un n-èdre. Les sommets A_i et les pieds B_i des hauteurs sont des points, et l'axe D du retournement est la droite joignant les pieds B_1, B_n qui sont sur les deux plans extrêmes de $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$. Avec des notations qui généralisent celles employées pour le tétraèdre, nous posons

$$\begin{cases} U_i = \vec{e}_i . \overrightarrow{A_n P} & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ U_n = \vec{e}_n . \overrightarrow{B_n P} = \vec{e}_n . \overrightarrow{A_n P} - d & (d > 0), \end{cases} \tag{24}$$

où les $\vec{e}_i$ sont tous unitaires.

([24]) Le fait que les pieds des deux hauteurs sont cocycliques est vrai pour tous les n-sphères de E_{n-1}.

Les Φ_i sont des plans, ainsi que les X_i; en particulier, X_{n-1} et X_n sont perpendiculaires à B_1B_n, et le produit $\overline{X_nX_{n-1}}$ n'est rien autre qu'une translation $\mathfrak{T}$ parallèle à D.

La direction de D est celle d'un vecteur de la forme

$$\vec{\chi}=\sum_{i=1}^{n-1} l_i\vec{e}_i$$

parallèle à l'intersection des $n-2$ plans (19), donc orthogonal aux $n-2$ vecteurs

$$\vec{\nu}_j=t_{2j}\vec{e}_1-t_{1j}\vec{e}_2+t_{12}\vec{e}_j \qquad (j=3,\ 4,\ \ldots,\ n). \tag{25}$$

On déduit aisément de (17) le tableau des produits scalaires

$$\begin{cases} \vec{\nu}_j.\vec{e}_1=t_{2j}, \\ \vec{\nu}_j.\vec{e}_2=-t_{1j}+t_{12}t_{2j} \\ \vec{\nu}_j.\vec{e}_i=t_{12}t_{ij}, \end{cases} \qquad (i,\ j=3,\ 4,\ \ldots,\ n), \tag{26}$$

de sorte que $\vec{\nu}_j$ est orthogonal aux $\vec{e}_i$ d'indice $i>j$. On peut ainsi vérifier que

$$\vec{\chi}=-\sum_{i=1}^{n-1} t_{in}^{-1}\vec{e}_i \tag{27}$$

répond à la question; il s'agit en effet d'annuler $n-2$ produits scalaires

$$\vec{\chi}.\vec{\nu}_j=-\sum_{i=1}^{n-1} t_{in}^{-1}\vec{e}_i.\vec{\nu}_j=-t_{1n}^{-1}t_{2j}+t_{2n}^{-1}(t_{1j}-t_{12}t_{2j})-t_{12}\sum_{i=3}^{n-1} t_{in}^{-1}t_{ij}.$$

Les relations (18) où l'on fait $j=n$ s'écrivent

$$-t_{12}t_{in}^{-1}=t_{12}^{-1}t_{in}^{-1}=t_{1i}^{-1}t_{2n}^{-1}-t_{1n}^{-1}t_{2i}^{-1} \qquad (3\leq i\leq n-1),$$

et permettent, par l'expression qu'elles donnent de t_{in}^{-1}, de mettre $\vec{\chi}.\vec{\nu}_j$ sous la forme

$$\vec{\chi}.\vec{\nu}_j=-t_{1n}^{-1}\left(t_{2j}+\sum_{i=3}^{n-1} t_{2i}^{-1}t_{ij}\right)+t_{2n}^{-1}\left(t_{1j}+t_{12}^{-1}t_{2j}+\sum_{i=3}^{n-1} t_{1i}^{-1}t_{ij}\right) \qquad (3\leq j\leq n).$$

Les deux parenthèses ne sont pas d'autre chose que

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_{2i}^{-1}t_{ij}=\sum_{i=1}^{n} t_{2i}^{-1}t_{ij}-t_{2n}^{-1}t_{nj},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_{1i}^{-1}t_{ij}=\sum_{i=1}^{n} t_{1i}^{-1}t_{ij}-t_{1n}^{-1}t_{nj},$$

où les premières sommes aux seconds membres sont nulles en vertu de $T^{-1}T = 1$ et du fait que j diffère de 1 et 2, et la nullité de $\vec{\chi}.\vec{\nu}_j$ s'ensuit aussitôt.

De (27) on déduit aussi aisément, pour la mesure de $\vec{\chi}$,

$$\vec{\chi}^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} t_{in}^{-1} t_{jn}^{-1} \vec{e}_i.\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} t_{in}^{-1} t_{jn}^{-1} t_{ij},$$

ou, grâce à $t_{nn}^{-1} = 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} t_{jn}^{-1} = -t_{in} \qquad (i < n),$$

$$\vec{\chi}^2 = -\sum_{i=1}^{n-1} t_{in} t_{in}^{-1}. \tag{28}$$

17. La valeur (11) de $\left|\vec{\chi}\right|$ établie pour le tétraèdre est également valable pour ces n-èdres, grâce à la singularité du système des n-plans dans E_{n-1}. En associant tout d'abord l'expression de (28), linéaire par rapport aux t_{in}^{-1}, aux $n-1$ équations de réciprocité des t_{ij} et t_{in}^{-1} :

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ji} t_{in}^{-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

l'élimination des t_{in}^{-1} d'indice $i < n\,(t_{nn}^{-1} = 1)$ définit $\vec{\chi}^2$ par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ . & . & \ldots & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{n-1,n} & \vec{\chi}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\vec{\chi}^2 = -\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} & \ldots & t_{3,n-1} & t_{3n} \\ . & . & . & .. & \ldots & \ldots & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \ldots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Grâce à des combinaisons évidentes entre les deux premières lignes et chacune des 3^e, 4^e, ..., $(n-1)^{ième}$ lignes, où l'on utilise les relations (17), on

peut éliminer $t_{3n}, t_{4n}, \ldots, t_{n-1,n}$ dans ces dernières lignes, ce qui donne pour $\overset{\rightarrow}{\chi}^2$ l'équation

$$t_{12}^{n-3}\overset{\rightarrow}{\chi}^2 = -\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ t_{23} & -t_{13}+t_{12}t_{23} & t_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ t_{24} & -t_{14}+t_{12}t_{24} & t_{12}t_{34} & t_{12} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{2,n-1} & -t_{1,n-1}+t_{12}t_{2,n-1} & t_{12}t_{3,n-1} & t_{12}t_{4,n-1} & \ldots & t_{12} & 0 \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \ldots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Effectuons des combinaisons analogues entre les deux premières colonnes et les $n-3$ suivantes afin d'éliminer $t_{3n}, t_{4n}, \ldots, t_{n-1,n}$ dans celles-ci. En posant

$$\alpha_i = -t_{1i}+t_{12}t_{2i} \qquad (i=3, 4, \ldots, n-1),$$
$$\beta_i = t_{12}^2+t_{1i}^2+t_{2i}^2-t_{12}t_{1i}t_{2i} \qquad (i=3, 4, \ldots, n-1),$$
$$\gamma_{ij} = t_{1i}t_{1j}+t_{2i}t_{2j}-t_{12}t_{2i}t_{1j} \qquad (3\leq i<j\leq n-1),$$

il vient

$$(30) \qquad t_{12}^{2n-6}\overset{\rightarrow}{\chi}^2 = -\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{23} & t_{24} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{n-1} & t_{2n} \\ t_{23} & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_{34} & \ldots & \gamma_{3,n-1} & 0 \\ t_{24} & \alpha_4 & \gamma_{34} & \beta_4 & \ldots & \gamma_{4,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{2,n-1} & \alpha_{n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \ldots & \beta_{n-1} & 0 \\ t_{1n} & t_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il s'agit de rattacher cette expression de $\overset{\rightarrow}{\chi}^2$ au « sinus de l'angle $(n-1)$ èdre » $A_n \overset{\rightarrow}{e_1}\overset{\rightarrow}{e_2}\ldots\overset{\rightarrow}{e_{n-1}}$, formé par les vecteurs normaux aux faces issues du sommet A_n, qui se définit par la racine carrée du déterminant δ d'ordre $n-1$ d'éléments $\overset{\rightarrow}{e_i}.\overset{\rightarrow}{e_j}(i, j=1, 2, \ldots, n-1)$, c'est-à-dire de

$$(31) \qquad \delta = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1,n-1} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & \ldots & t_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1,n-1} & t_{2,n-1} & t_{3,n-1} & \ldots & 2 \end{vmatrix}.$$

La nature irrégulière du système des n-plans U_i se traduisant par

$$\text{dét}(T+T') = \begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1,n-1} & t_{2,n-1} & t_{3,n-1} & \ldots & 2 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \ldots & t_{n-1,n} & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

(31) s'écrit encore

$$(32)\qquad 2^n\,\delta = -\begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ t_{13} & t_{23} & 2 & t_{34} & \dots & t_{3,n-1} & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1,n-1} & t_{2,n-1} & t_{3,n-1} & t_{4,n-1} & \dots & 2 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \dots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Opérons sur ce déterminant comme nous avons fait sur (29). La division par 2 des 3e, 4e, ..., $(n-1)^{\text{ième}}$ lignes, après les combinaisons avec les deux premières qui en ont fait disparaître t_{3n}, t_{4n}, ..., $t_{n-1,n}$, donne d'abord

$$2^3\,t_{12}^{n-3}\,\delta = -\begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ t_{23} & -t_{13}+t_{12}t_{23} & t_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{24} & -t_{14}+t_{12}t_{24} & t_{12}t_{34} & t_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{2,n-1} & -t_{1,n-1}+t_{12}t_{2,n-1} & t_{12}t_{3,n-1} & t_{12}t_{4,n-1} & \dots & t_{12} & 0 \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \dots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix};$$

en combinant de manière analogue les 3e, 4e, ... et $(n-1)^{\text{ième}}$ colonnes avec les deux premières, et en les divisant ensuite par 2, on remplace enfin (32) par l'expression

$$(33)\qquad 2^{6-n}\,t_{12}^{2n-6}\,\delta = -\begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} & t_{1n} \\ t_{12} & 2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} & t_{2n} \\ t_{23} & \alpha_3 & \frac{1}{2}\beta_3 & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} & 0 \\ t_{24} & \alpha_4 & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \frac{1}{2}\beta_4 & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ t_{2,n-1} & \alpha_{n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} & \dots & \frac{1}{2}\beta_{n-1} & 0 \\ t_{1n} & t_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Les déterminants aux seconds membres de (30) et (33) sont deux formes quadratiques en t_{1n}, t_{2n} dont nous voulons établir la proportionnalité. On voit tout de suite que, dans le premier, les coefficients de t_{1n}^2 et de t_{2n}^2 valent 2^{n-4} fois les coefficients homologues du second. Le coefficient de $-t_{1n}t_{2n}$ dans (30) est la somme des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} \\ t_{23} & \beta_3 & \gamma_{34} & \dots & \gamma_{3,n-1} \\ t_{24} & \gamma_{34} & \beta_4 & \dots & \gamma_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ t_{2,n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \dots & \beta_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{12} & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_{34} & \dots & \gamma_{3,n-1} \\ \alpha_4 & \gamma_{34} & \beta_4 & \dots & \gamma_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \dots & \beta_{n-1} \end{vmatrix},$$

que la transposition du deuxième permet de remplacer par le déterminant unique

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \ell_{12} & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 2\ell_{23} & \beta_3 & \gamma_{34} & \dots & \gamma_{3,n-1} \\ 2\ell_{24} & \gamma_{34} & \beta_4 & \dots & \gamma_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\ell_{2,n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \dots & \beta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant symétrique (33), le terme semblable a pour coefficient

$$2\begin{vmatrix} \ell_{12} & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \ell_{23} & \frac{1}{2}\beta_3 & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} \\ \ell_{24} & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \frac{1}{2}\beta_4 & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_{2,n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} & \dots & \frac{1}{2}\beta_{n-1} \end{vmatrix},$$

2^{n-4} fois moins grand que (34) comme on le voit aisément. Nous avons ainsi établi que, pour tous les n-èdres en question, $\vec{\chi}^2$ a la valeur remarquable 4δ, soit encore

$$(35)\qquad \left|\vec{\chi}\right| = 2\sqrt{\delta}.$$

L'expression

$$(36)\qquad \vec{\tau} = d\vec{\chi}$$

de la translation $\mathfrak{T} = \overline{X_n X_{n-1}}$ obtenue en (12) pour le cas $n = 4$ est encore valable puisqu'elle se déduit des expressions de $\vec{\chi}$ et $\vec{\chi}^2$ qui conservent leur forme.

20. Dans la symétrie de $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ par rapport à U_1, et qui conduit au produit $\overline{U_1 U_n \dots U_2}$, la droite D est remplacée par sa symétrique par rapport à U_1, et la mesure $2d\sqrt{\delta}$ de $\left|\vec{\tau}\right|$ est conservée. Si donc on désigne par $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$ la longueur de la hauteur $A_i B_i$ sur U_i et par $\sqrt{\delta_i}$ le sinus de l'angle [25] $(n-1)$-èdre $A_i \vec{e}_1 \dots \vec{e}_{i-1} \vec{e}_{i+1} \dots \vec{e}_n$, que l'on peut appeler supplé-

[25] Chaque $\vec{e}_i$ a le sens de $\overrightarrow{A_i B_i}$, pour que d_i soit positif. Cet angle $(n-1)$-èdre n'est donc pas exactement le supplémentaire de l'angle $(n-1)$-èdre A_i du n-èdre, au sens de la géométrie élémentaire, mais son symétrique par rapport à A_i.

mentaire de l'angle $(n-1)$-èdre du n-èdre, de sommet A_i, on a $d_1\sqrt{\delta_1} = d_n\sqrt{\delta_n}$, et, par permutation circulaire,

$$d_1\sqrt{\delta_1} = d_2\sqrt{\delta_2} = \ldots = d_n\sqrt{\delta_n}. \tag{37}$$

Ces relations ne sont pas particulières aux n-èdres considérés ici, mais s'appliquent à tout n-èdre de E_{n-1}. Si V désigne le volume du n-èdre et s_i l'aire de la base U_i, on a

$$V = \frac{1}{n-1} s_i d_i,$$

tandis que

$$V^{n-2} = \frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}} \sqrt{\delta_i} \frac{s_1 s_2 \ldots s_n}{s_i};$$

par conséquent, après multiplication de ces deux égalités,

$$V^{n-1} = \frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-1}} s_1 s_2 \ldots s_n d_i \sqrt{\delta_i} \tag{38}$$

fournit la valeur commune des produits (37), pour un n-èdre quelconque, en fonction du volume et des aires des faces. En fonction de ces mêmes quantités, la translation (36) d'un n-èdre du type que nous venons d'étudier a la mesure

$$\left|\vec{\tau}\right| = \frac{2(n-1)^{n-1}}{(n-2)!} \frac{V^{n-1}}{s_1 s_2 \ldots s_n}. \tag{39}$$

(37) exprime encore que, dans un n-èdre quelconque, les aires des faces sont proportionnelles aux sinus des angles $(n-1)$-èdres supplémentaires opposés, et la valeur commune de ces rapports est $\frac{2(n-1)V}{\left|\vec{\tau}\right|}$ pour nos n-èdres particuliers.

ESPACES FIBRÉS EN SPHÈRES ET CARRÉS DE STEENROD

PAR M. RENÉ THOM.

AVANT-PROPOS.

Ce travail contient essentiellement la démonstration des résultats parus dans deux Notes aux *Comptes rendus* [23] (1). Je l'ai fait suivre de quelques applications, et, dans un dernier chapitre, je traite un problème sans rapport direct avec ceux des chapitres précédents; si j'ai tenu à conserver les développements du chapitre V sur le problème des variétés-bords, c'est que, chronologiquement, ce sont ces problèmes qui m'ont amené aux résultats de la première partie. Le rapport liant les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney aux nouvelles opérations définies par Steenrod en cohomologie n'apparut clairement que lors de la découverte de la formule $\mathrm{Sq}^i \mathrm{U} = \varphi^* \mathrm{W}^i$, formule que je trouvai d'abord dans le cas des variétés plongées, et dont M. H. Cartan me signala ensuite toute la généralité. Voici, en résumé, le contenu des différentes parties de ce travail.

D'abord une Introduction sur la Théorie des faisceaux donne l'ensemble des notions techniques nécessaires aux démonstrations des chapitres qui suivent. L'usage de la Théorie des faisceaux, due essentiellement à M. J. Leray, s'avérait nécessaire pour donner aux résultats le maximum de généralité; j'ai emprunté au Séminaire de Topologie algébrique [2] (E. N. S.) de H. Cartan, l'exposition des principaux théorèmes de cette théorie, ainsi que de récentes généralisations : j'ai largement exploité, notamment, sa théorie de la cohomologie à supports dans une famille (Φ), sans laquelle il serait difficile de s'affranchir d'hypothèses inutilement restrictives sur la compacité des espaces.

(1) Les numéros placés entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'Ouvrage.

Le chapitre I contient la théorie additive de la cohomologie des espaces fibrés en sphères; l'essentiel de ces résultats est maintenant bien connu; on sait que la théorie de la suite spectrale de J. Leray a trouvé là une de ses plus belles applications. J'ai préféré toutefois ne pas utiliser cette notion générale de suite spectrale, qui n'apparaissait en ce cas que sous une forme très particulière, pour donner une méthode sans doute moins générale, mais peut-être mieux appropriée au cas d'espèce; l'introduction, à côté de l'espace fibré en sphères E des espaces A et A′ fibrés en boules fermées (resp. ouvertes), se trouve largement justifiée par l'usage qui est fait de ces espaces dans les chapitres suivants; de plus, elle conduit rapidement à la suite exacte (10), dont elle donne une interprétation géométrique intéressante; cette suite exacte a aussi été considérée par Chern-Spanier dans une publication légèrement postérieure à ma Note [5]. On montre également au chapitre I le rapport entre la classe fondamentale définie par la suite exacte (10) et la classe caractéristique fondamentale définie comme obstruction : ces deux classes ne sont pas égales, mais opposées. L'introduction des Φ-cohomologies permet de donner du second homomorphisme de la suite (10) une interprétation multiplicative sans hypothèse de compacité sur la base. Enfin, si la base est une variété, on établit le rapport de cette théorie avec les résultats de Gysin.

Le chapitre II est consacré au comportement des carrés de Steenrod dans les espaces fibrés en boules ouvertes A′; on y montre, que si la structure fibrée admet le groupe orthogonal pour groupe de structure, les classes W^i définies dans la cohomologie de la base par l'action des carrés de Steenrod dans l'espace A′ ne sont autres que les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney. Suivent quelques applications (théorème de dualité de Whitney, etc.).

Le chapitre III applique les résultats précédents aux problèmes d'immersion; grâce à quelques théorèmes généraux sur la limite projective des homologies des voisinages ouverts d'un sous-ensemble fermé, on montre qu'à toute variété plongée V dans une variété M, on peut associer des classes normales W^i, définies topologiquement à l'aide des carrés de Steenrod Sq^i; dans le cas différentiable, ces classes sont les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs normaux. Ainsi se trouve démontrée l'invariance des classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs tangents à une variété différentiable. De plus, la théorie de Whitney sur l'immersion des variétés différentiables dans l'espace euclidien se trouve ainsi dégagée de toute hypothèse de différentiabilité. La théorie se généralise même à l'immersion de tout espace séparable, localement contractile, de dimension finie, dans une variété; dans le cas où ces espaces sont compacts, on montre l'existence d'opérateurs (déduits des carrés de Steenrod par une relation simple) qui jouent le rôle d'obstructions à l'égard de l'immersion dans l'espace euclidien.

On constate ainsi que des notions, primitivement liées de façon étroite à la structure différentiable, peuvent parfois être définies de façon intrinsèque;

le chapitre IV poursuit quelques investigations dans ce sens, au demeurant fort limitées (on y dégage des invariants d'homotopie).

Le chapitre V reprend, avec les techniques de la théorie des faisceaux, les théorèmes classiques de dualité des variétés à bord. On en déduit quelques conséquences nouvelles, semble-t-il, au sujet d'un problème soulevé par N. E. Steenrod : Une variété compacte donnée V est-elle le bord d'une variété à bord compacte ? Un théorème de Pontrjagin, généralisé au cas non différentiable, montre le rapport de ce problème avec la théorie des classes caractéristiques.

Je m'en voudrais de ne pas témoigner à M. H. Cartan toute la gratitude que je lui dois pour l'assistance qu'il m'a apportée pendant ces dernières années; tant pour le fond que pour la forme, je lui suis redevable de nombreuses améliorations.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à M. Wu Wen-Tsün, dont l'amicale et confiante collaboration ne m'a jamais fait défaut, et dont les suggestions furent souvent, pour moi, d'un intérêt décisif.

INTRODUCTION.

Rappel de résultats sur la théorie des faisceaux.

Les notions techniques utilisées dans les chapitres qui suivent sont empruntées à la Théorie des faisceaux; cette théorie est due essentiellement à J. Leray, qui en a donné un exposé dans [12]; nous utiliserons toutefois la nouvelle présentation et les développements récents que lui a donnés H. Cartan, dans les exposés du Séminaire de Topologie algébrique (E. N. S.), années 1948-1949 et 1950-1951; *cette Introduction ne contient aucune démonstration*; on se reportera donc à ces exposés, dont nous conservons les notations.

I. — Notion de faisceau.

1. Définition. — Soit X un espace topologique; soit K un anneau principal; un faisceau de K-modules sur X est un ensemble F muni d'une application p (projection) sur X telle que : pour tout point $x \in X$, l'image inverse $F_x = p^{-1}(x)$ (fibre) soit munie d'une structure de K-module. De plus, F est muni d'une topologie (éventuellement non séparée) telle que :

a. la multiplication par un élément fixe de K, définie dans chacun des F_x, définit une application continue de F dans lui-même;

b. la somme $\alpha+\beta$ de deux éléments α et β d'un même F_x est fonction continue du couple (α, β), le point x variant avec le couple (α, β);

c. la projection p définit un homéomorphisme local : tout élément de F possède dans F un voisinage ouvert que p applique biunivoquement et bicontinuement sur un ensemble ouvert de l'espace X.

2. Section d'un faisceau. — C'est une application continue $s : X \to F$, telle que, pour tout point $x \in X$, $s(x) \in F_x$; il existe au moins une section : la section triviale qui associe à tout point x le zéro de F_x; soit s une section de F; on appelle *support* de s l'ensemble des points $x \in X$ tels que $s(x) \neq 0$; c'est un ensemble *fermé*.

L'ensemble des sections de F est évidemment muni d'une structure de K-module; on désignera ce K-module par $\Gamma(F)$.

3. Homomorphismes de faisceaux. — Soient deux espaces X et Y, F un faisceau sur X, G un faisceau sur Y, et f une application continue de X dans Y. On appelle *homomorphisme* de G dans F compatible avec l'application f, une collection d'homomorphismes $\varphi_x : G_{f(x)} \to F_x$, où x parcourt X, satisfaisant à la condition suivante : soit un couple de points $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tels que $y_0 = f(x_0)$; si $x \to s(x)$ est une section de F au-dessus d'un voisinage de x_0 dans X, et $y \to t(y)$ une section de G au-dessus d'un voisinage de y_0 dans Y, la relation $\varphi_{x_0}(t(y_0)) = s(x_0)$ entraîne $\varphi_x(t(f(x))) = s(x)$ pour x assez voisin de x_0 dans X.

En particulier, on peut définir le faisceau *image réciproque* d'un faisceau par une application donnée : on se donne un faisceau G sur Y; le faisceau image réciproque $f^{-1}(G)$ sur X est tel qu'en tout point $x \in X$, on ait $F_x = G_{f(x)}$; les φ_x, qui sont alors des isomorphismes, définissent un homomorphisme de G dans $f^{-1}(G)$ compatible avec f. Si X est un sous-espace de Y, et f l'inclusion de X dans Y, le faisceau image réciproque $f^{-1}(G)$ est appelé *faisceau induit* par G sur X.

4. Faisceau simple. — On prend un module fixe G; on forme le produit $G \times X$ qu'on munit de la topologie produit de la topologie de X et de la topologie discrète de G; la projection p étant alors l'application canonique $G \times X \to X$, ceci définit sur X un *faisceau simple*, qu'on désignera par G.

5. Faisceau localement simple. — Un faisceau F sur X est *localement simple*, si le faisceau induit par F sur tout ouvert assez petit de X est simple. Si l'espace X est localement connexe, et localement simplement connexe, la notion de faisceau localement simple est équivalente à celle de *système local* au sens de Steenrod [17]; rappelons qu'un tel système est défini sur un espace connexe par la donnée d'un homomorphisme h du groupe fondamental $\Pi_1(X)$ dans le

groupe d'automorphismes du module G. En particulier, si l'espace X est (globalement) simplement connexe, tout faisceau localement simple sur X est simple.

L'image réciproque d'un faisceau localement simple (par une application continue quelconque) est encore un faisceau localement simple.

6. Produit tensoriel de faisceaux. — Étant donnés deux faisceaux F et G sur le même espace X, on définit leur produit tensoriel $F \bigcirc G$; c'est un faisceau tel qu'en tout point $x \in X$, on ait $(F \bigcirc G)_x = F_x \otimes G_x$; le produit tensoriel de deux faisceaux localement simples est localement simple.

II. — Groupes de Φ-cohomologie.

1. Les familles (Φ). — On appelle famille (Φ) une famille non vide de sous-ensembles fermés *paracompacts* (1) de l'espace X jouissant des propriétés suivantes :

1° La réunion de deux ensembles de Φ est dans Φ.
2° Tout fermé contenu dans un ensemble de Φ appartient à Φ.
3° Tout ensemble de Φ admet un voisinage fermé dans Φ.

L'ensemble des points $x \in X$ qui sont des ensembles de Φ constituent, d'après 3° et 2°, un ouvert de X, et cet ouvert est régulier.

Si l'on s'est donné sur X deux familles (Φ), Φ_1 et Φ_2, l'ensemble des fermés de X qui appartiennent à la fois à Φ_1 et Φ_2 constitue une famille (Φ) : la famille $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$; l'inclusion définit évidemment entre familles (Φ) une relation d'ordre.

Parmi les familles (Φ) les plus fréquemment utilisées, notons : la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés, si X est paracompact; la famille $\mathcal{K}$ des compacts, si X est localement compact. Nous en rencontrerons d'autres.

2. La Φ-cohomologie. — Soit donné sur X un faisceau F de K-modules et une famille (Φ); on peut alors leur attacher un K-module de cohomologie pour toute dimension q [notation : $H^q_\Phi(X, F)$]. Cette cohomologie est définie axiomatiquement (*cf.* [2], exp. 16); elle peut s'obtenir comme suit : soit C le faisceau (gradué) des cochaînes d'Alexander-Spanier sur l'espace X; on forme le produit $C \bigcirc F$, puis le module des sections à supports dans (Φ) de ce faisceau-produit [notation : $\Gamma_\Phi(C \bigcirc F)$]; ce module est muni d'une structure graduée avec cobord déduite de celle de C, et son $q^{\text{ième}}$ module de cohomologie s'identifie à $H^q_\Phi(X, F)$.

---

(1) Pour la définition de « paracompact », *voir* [6].

Remarque sur la cohomologie de dimension zéro. — Le groupe $H^0_\Phi(X, F)$, isomorphe à $H^0(\Gamma_\Phi(C \bigcirc F))$, est également canoniquement isomorphe au module des sections de F à supports dans Φ, $\Gamma_\Phi(F)$. Ceci permet de déterminer le module $H^0_\Phi(X, F)$ dans certains cas importants :

Supposons le faisceau F localement simple, et l'espace X connexe; alors le support d'une section $s \in \Gamma_\Phi(F)$, qui est à la fois ouvert et fermé dans X, contient, s'il n'est pas vide, tout l'espace X. Donc pour que le module $H^0_\Phi(X, F)$ soit non nul, il faut et il suffit :

1° Que la famille (Φ) soit la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés dans X paracompact.

2° Que le faisceau F admette des sections, c'est-à-dire qu'il existe des éléments du module fibre invariants par les automorphismes induits par le groupe fondamental $\Pi_1(X)$.

En particulier, si F est un système local d'entiers et si X est connexe, $H^0_\Phi(K, F)$ n'est non nul que si F est isomorphe au système simple Z; de façon générale, que l'espace paracompact X soit ou non connexe, il existe un homomorphisme canonique (*l'* « *augmentation* »)

$$\lambda : \quad Z \to H^0_{\mathcal{F}}(X, Z),$$

obtenu en assignant à chaque entier $p \in Z$ la section correspondante; on posera

(1) $$\omega = \lambda(1).$$

La classe ω sera appelée la *classe-unité* de $H^0_{\mathcal{F}}(X, Z)$; si X est connexe, l'homomorphisme λ est un isomorphisme du groupe des entiers Z sur $H^0_{\mathcal{F}}(X, Z)$ et la classe ω engendre $H^0_{\mathcal{F}}(X, Z)$.

3. Homomorphisme induit par une application continue. — Soient X et Y deux espaces, f une application continue de X dans Y; supposons données sur X une famille Φ, sur Y une famille T telles que l'image inverse $f^{-1}(\tau)$ de tout fermé $\tau \in T$ soit lui-même un élément de Φ; enfin, supposons donnés deux faisceaux : F sur X, G sur Y, et un homomorphisme $g : G \to F$ compatible avec l'application f; alors f induit un homomorphisme $f^* : H^q_\tau(Y, G) \to H^q_\Phi(X, F)$, qu'on peut obtenir comme suit : l'application f induit un homomorphisme $\bar{f} : C \to C'$, où C' et C sont les faisceaux des cochaînes d'Alexander-Spanier de X et Y respectivement. $\bar{f}$ et g définissent un homomorphisme de $C \bigcirc G$ dans $C' \bigcirc F$, donc de $\Gamma_\tau(C \bigcirc G)$ dans $\Gamma_\Phi(C' \bigcirc F)$; cet homomorphisme, compatible avec la graduation et le cobord, induit un homomorphisme sur les modules de cohomologie $H^q_\tau(Y, G)$ dans $H^q_\Phi(X, F)$ qui est l'homomorphisme f^* induit canoniquement par l'application f.

4. La suite exacte de cohomologie. — Soient Y un sous-espace fermé de X, U le complémentaire ouvert de X dans Y; soit donné sur X un faisceau F; désignons par F_Y et F_U les faisceaux induits par F sur Y et U respectivement; soient de même une famille Φ sur X, Φ_Y, Φ_U les familles dans Y et U constituées par les ensembles de Φ contenus respectivement dans Y et U. L'injection $Y \subset X$ donne lieu à un homomorphisme

$$H^q_\Phi(X, F) \to H^q_{\Phi_Y}(Y, F).$$

Cet homorphisme s'insère dans une suite exacte d'homomorphismes canoniques :

$$(2) \quad \to H^q_\Phi(X, F) \to H^q_{\Phi_Y}(Y, F_Y) \to H^{q+1}_{\Phi_U}(U, F_U) \to H^{q+1}_\Phi(X, F) \to H^{q+1}_{\Phi_Y}(Y, F_Y) \to.$$

III. — Notion de carapace.

1. Définition. — On appelle *carapace* sur l'espace X un K-module gradué $\mathfrak{A}$ avec opérateur cobord δ de degré $+1$, tel que $\delta\delta = 0$, qui jouit des propriétés suivantes :

A tout élément $a \in \mathfrak{A}$ est attaché un fermé $\sigma(a)$, de X, « *support* » de a, tel que :

1° $\sigma(a) = \emptyset$ si et seulement si $a = 0$.

2° Si a et b sont homogènes et de degrés différents, alors

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) \cup \sigma(b).$$

3° $\sigma(a - b) \subset \sigma(a) \cup \sigma(b)$ pour a et b quelconques.

4° $\sigma(\delta a) \subset \sigma(a)$.

2. Carapace induite. — Soit Y un sous-espace fermé de X; la carapace $\mathfrak{A}$ sur X définit une carapace sur Y : donnons à chaque élément $a \in \mathfrak{A}$, pour nouveau support, l'intersection de son ancien support avec Y; pour satisfaire à 1°, on fera le quotient de $\mathfrak{A}$ par l'ensemble des éléments dont le support ne rencontre pas Y; on obtient ainsi la *carapace induite* par $\mathfrak{A}$ sur Y (notation : $\mathfrak{A}_Y$).

3. Faisceau d'une carapace. — A tout point $x \in X$, attachons la carapace induite $\mathfrak{A}_x$; l'ensemble des $\mathfrak{A}_x$, muni d'une topologie convenable, constitue un faisceau gradué $F(\mathfrak{A})$; tout élément $a \in \mathfrak{A}$ définit une section de ce faisceau (prendre en toute $\mathfrak{A}_x$ l'image a_x de a); il existe donc un homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ dans $\Gamma(F(\mathfrak{A}))$ qui est biunivoque. On appelle *faisceau de cohomologie* de la carapace $\mathfrak{A}$ le faisceau gradué $H^r(F(\mathfrak{A}))$.

Endomorphisme d'une carapace. — C'est un endomorphisme h du module $\mathfrak{A}$, compatible avec la structure graduée, tel que, pour tout élément $a \in \mathfrak{A}$,

$$\sigma(h(a)) \subset \sigma(a).$$

Un tel endomorphisme induit en chaque point x un endomorphisme du module gradué $\mathcal{A}_x$.

4. Carapace homotopiquement fine. — Une carapace $\mathcal{A}$ sur un espace X est dite *homotopiquement fine*, si, pour tout recouvrement *localement fini* de X par des ouverts U_i, il existe des endomorphismes l_i (de degré zéro) et un endomorphisme k (de degré -1) de la carapace $\mathcal{A}$ tels que :

1° Pour tout $a \in \mathcal{A}$, le support $\sigma(l_i(a))$ soit contenu dans l'adhérence $\overline{U}_i$.

2° En chaque point X, les endomorphismes induits par l_i et k dans $\mathcal{A}_x$ satisfont à la relation

$$\Sigma l_i + k\delta + \delta k = \text{identité},$$

dans laquelle tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.

On dit que la carapace est « *fine* », si, dans cette relation, l'opérateur k peut être pris identiquement nul.

5. Carapaces Φ-complètes. — Soit $\mathcal{A}_\Phi$ la sous-carapace constituée des éléments de $\mathcal{A}$ dont le support appartient à une famille (Φ) donnée; on dit que $\mathcal{A}$ est *Φ-complète*, si l'homomorphisme canonique $\mathcal{A}_\Phi \to \Gamma_\Phi(F(\mathcal{A}))$ est un isomorphisme sur.

6. Critère de convergence des sommes localement finies. — Une somme (infinie) Σa_i d'éléments de $\mathcal{A}$ est dite *localement finie*, si tout point de X possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports $\sigma(a_i)$; une telle somme localement finie définit évidemment une section de $F(\mathcal{A})$, élément de $\Gamma(F(\mathcal{A}))$; dire que la somme Σa_i *converge* dans $\mathcal{A}$, c'est dire qu'il existe un élément $a \in \mathcal{A}$ qui induit cette section, ce qu'on écrit $a = \Sigma a_i$. On démontre alors :

Pour qu'une carapace *fine* soit Φ-complète, il faut et il suffit que toute somme localement finie d'éléments de $\mathcal{A}_\Phi$, dont le support total est dans Φ, converge dans $\mathcal{A}_\Phi$.

7. Existence d'une carapace fine et Φ-complète. — Soit F un faisceau localement simple donné sur l'espace X; soit C le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier sur X; la carapace $\Gamma(C \bigcirc F)$ sur X est fine et Φ-complète pour toute famille (Φ). Le faisceau de cohomologie de cette carapace est nul pour toute dimension, sauf pour la dimension zéro pour laquelle $H^0(C \bigcirc F) = F$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental de la théorie :

Théorème 0.1. — *Soit $\mathcal{A}$ une carapace sur l'espace X; si :*

a. X est de dimension finie, ou les degrés de $\mathcal{A}$ sont bornés inférieurement;

b. $\mathcal{A}$ est (homotopiquement) fine;

c. $\mathcal{A}$ est Φ-complète;

d. le faisceau de cohomologie $H^q(F(\mathcal{A}))$ *est nul pour tout* q, *sauf peut-être pour la valeur* $q = k$;

alors le module $H^{p+k}(\mathcal{A}_\Phi)$ *est canoniquement isomorphe au module de* Φ*-cohomologie* $H^p_\Phi(X, H^k(F(\mathcal{A})))$ *de l'espace* X.

Cet isomorphisme est défini de façon précise au théorème 5 (exp. 19, p. 8) [2]; on remarquera qu'il fait intervenir de façon essentielle l'isomorphisme $H^*(\Gamma(C \bigcirc F)) \to H^*(\Gamma(F))$ du théorème 1 (exp. 19) [2].

Remarque. — Soit Y un sous-espace *fermé* de X; si $\mathcal{A}$ sur X satisfait aux conditions du théorème 0.1 pour la famille (Φ), il en va de même de la carapace induite $\mathcal{A}_Y$ pour la famille Φ_Y; la cohomologie de cette carapace $\mathcal{A}_Y$ donne ainsi la cohomologie de Y (pour le faisceau induit); en outre, la suite exacte de modules avec cobord $o \to \mathcal{A}_U \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_Y \to o$ définit pour les cohomologies de ces modules une suite exacte qui s'identifie à la suite définie au paragraphe 8 (n° 4) [2].

IV. — Théorie des familles (Φ).

Soient, sur un même espace X, trois familles (Φ) : Φ_1, Φ_2 et $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$, trois faisceaux F_1, F_2, F_3 et un homomorphisme

$$h : \quad F_1 \bigcirc F_2 \to F_3.$$

Soit C le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier sur X; h induit canoniquement un homomorphisme de

$$\Gamma_{\Phi_1}(C \bigcirc F_1) \otimes \Gamma_{\Phi_2}(C \bigcirc F_2) \to \Gamma_{\Phi_3}(C \bigcirc C \bigcirc F_1 \bigcirc F_2) \to \Gamma_{\Phi_3}(C \bigcirc F_3),$$

homomorphisme qui, sur les modules de cohomologie des Γ_Φ, donne une application

$$H^p_{\Phi_1}(X, F_1) \otimes H^q_{\Phi_2}(X, F_2) \to H^{p+q}_{\Phi_3}(X, F_3),$$

qui n'est autre que le *cup-produit* associé à h. Supposons données sur X trois carapaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ qui satisfont aux conditions du théorème 0.1 : $\mathcal{A}$ pour la famille Φ_1, $\mathcal{B}$ pour Φ_2, $\mathcal{C}$ pour $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$; soient k_1, k_2 et $k_3 = k_1 + k_2$ les degrés pour lesquels $H^{k_1}(F(\mathcal{A}))$, $H^{k_2}(F(\mathcal{B}))$, $H^{k_3}(F(\mathcal{C}))$ sont éventuellement non nuls. Supposons donnée en outre une application bilinéaire :

$$f : \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

telle que :

1° $\qquad \sigma f(a, b) \subset \sigma(a) \cap \sigma(b)$;

2° $\qquad \deg f(a, b) = \deg a + \deg b$;

3° $\qquad \partial f(a, b) = f(\partial a, b) + (-1)^p f(a, \partial b)$, $\quad p$ degré de a.

Dans ces conditions est valable le théorème :

Théorème 0.2. — *Soit* g *l'homomorphisme induit par* f *sur les cohomologies des carapaces*

$$g : \quad H^{p+k_1}(\mathcal{A}_{\Phi_1}) \otimes H^{q+k_2}(\mathcal{B}_{\Phi_2}) \to H^{p+q+k_3}(\mathcal{C}_{\Phi_3}).$$

Par les identifications du théorème 0.1, g *devient un homomorphisme des cohomologies*

$$g : \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathrm{H}^{k_1}(\mathrm{F}(\mathcal{A}))) \otimes \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathrm{H}^{k_2}(\mathrm{F}(\mathcal{B}))) \to \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathrm{H}^{k_3}(\mathrm{F}(\mathcal{C}))).$$

Cet homomorphisme n'est autre que le cup-produit, multiplié par le coefficient $(-1)^{qk_1}$, *qui est défini par l'homomorphisme de faisceaux*

$$\mathrm{H}^{k_1}(\mathrm{F}(\mathcal{A})) \bigcirc \mathrm{H}^{k_2}(\mathrm{F}(\mathcal{B})) \to \mathrm{H}^{k_3}(\mathcal{C}))$$

obtenue à partir de l'application bilinéaire

$$\mathrm{F}(\mathcal{A}) \bigcirc \mathrm{F}(\mathcal{B}) \to \mathrm{F}(\mathcal{C}),$$

déduite de f.

V. — Les variétés en Théorie des faisceaux.

1. Groupes d'homologie singulière. — Étant donné sur un espace X une famille Φ, et un faisceau localement simple F, de groupes abéliens, on appelle Φ-chaîne singulière une combinaison linéaire « localement finie » de simplexes singuliers à coefficients dans F, telle que :

1° Tout point de X possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de la chaîne.

2° Le support total de la chaîne (réunion des supports des simplexes à coefficients non nuls) est dans Φ.

Les Φ-chaînes singulières forment un groupe gradué avec opérateur bord de degré -1; on appelle groupe de Φ-homologie [notation : $\mathrm{H}_p^{\Phi}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$] les groupes d'homologie qu'elles définissent.

2. Homomorphisme induit par une application continue. — Étant donnés deux espaces X et Y munis respectivement de familles Φ_1 et Φ, et une application f de X dans Y, à quelles conditions f induit-elle une application des Φ_1-chaînes de X dans les Φ-chaînes de Y, et par suite de $\mathrm{H}_p^{\Phi_1}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ dans $\mathrm{H}_p^{\Phi}(\mathrm{Y}, \mathrm{G})$? Les conditions suivantes sont suffisantes :

1° Le faisceau des coefficients F sur X est l'image réciproque par f du faisceau G donné sur Y.

2° L'image $f(\varphi_1)$ de tout fermé $\varphi_1 \in \Phi_1$ est un ensemble de (Φ).

3° Y est localement compact, et la restriction de f à tout ensemble $\varphi_1 \in \Phi_1$ est une application *propre*. (Rappelons qu'une application f d'un espace E dans un espace E′ est *propre*, si l'image réciproque $f^{-1}(\mathrm{K})$ de tout compact de E′ est compacte dans E).

Remarquer d'ailleurs que si X est un sous-espace fermé de Y localement compact et f l'injection, la condition 3° est superflue.

On désignera, par la suite, par f_* l'homomorphisme induit sur les groupes d'homologie par l'application f.

Supposons données de plus deux familles (Φ) : τ_1 sur X, τ sur Y, telles que la famille τ_1 contienne tous les fermés de la forme $f^{-1}(\tau)$; alors f induit, comme décrit au paragraphe II (n° 3), un homomorphisme $f^* : H^r_\tau(Y)$ dans $H^r_{\tau_1}(X)$; si de plus les coefficients permettent de définir une structure multiplicative, f induit un homomorphisme f_* de la $(\Phi_1 \cap \tau_1)$-homologie de X dans la $(\Phi \cap \tau)$-homologie de Y qui satisfait à la formule

$$f_*(f^*(y')) \cap x = y' \cap f_*(x) \tag{3}$$

pour toute classe y' de $H^r_\tau(Y)$. Les deux membres sont des classes de $(\Phi \cap \tau)$-homologie.

3. Les théorèmes de dualité pour les variétés paracompactes. — Soit V une variété paracompacte de dimension n; soit sur V, $\mathcal{C}$ la carapace des $\mathcal{F}$-chaînes singulières (c'est-à-dire des chaînes singulières infinies, localement finies) à coefficients entiers; le faisceau d'homologie de cette carapace est nul, sauf pour le degré n : en effet, en un point x, la carapace induite C_x admet même homologie que $H_p(B \bmod (B - x))$, B désignant une n-boule fermée de centre x. Il en résulte que $H_r(C_x)$ est nulle pour tout $r \neq n$, et est isomorphe à Z pour $r = n$; le faisceau d'homologie de la carapace $\mathcal{C}$ est ainsi un système local d'entiers qu'on désignera par T; ce système local est lié à l'orientation locale de V : T est simple (isomorphe à Z) si et seulement si V est orientable.

Prenons maintenant la carapace $\mathcal{A}$ des chaînes singulières à supports dans une famille (Φ), et dont les coefficients sont pris dans un faisceau localement simple F; en un point x qui est un élément de Φ, le faisceau d'homologie de la carapace est nul pour tout degré, sauf pour $r = n$, auquel cas c'est le faisceau induit par $F \bigcirc T$; si x n'est pas un élément de Φ, le faisceau $H(\mathcal{A}_x)$ est nul pour tout degré; si l'on effectue sur $\mathcal{A}$ le changement de graduation défini par $p' = n - p$, on sera dans les conditions d'application du théorème 0.1. Ceci donnera (*cf.* exp. 20, p. 4) [2] :

Théorème 0.3 (dualité des variétés). — *Pour toute dimension p, et toute famille* Φ *les groupes* $H^\Phi_p(V, F)$ *et* $H^{n-p}_\Phi(V, F \bigcirc T)$ *sont canoniquement isomorphes.*

4. Classes correspondantes. — Soit $u \in H^r_\Phi(V, F)$ une classe de cohomologie de V; l'isomorphisme du théorème précédent lui associe une classe de Φ-homologie $x \in H^\Phi_{n-r}(V, F \bigcirc T)$; les classes u et z seront appelées *classes correspondantes*. A l'égard des structures multiplicatives définies par le cap et le cup-produit, cette correspondance jouit de la propriété suivante (*cf.* exp. 20) [2] :

Théorème 0.4. — *Si u et z sont des classes correspondantes* (*en* Φ*-cohomologie*

et Φ*-homologie resp.*), *et si* y *est une classe de* τ*-cohomologie, les classes* $y \cup u$ *et* $y \cap z$ (*en* $(\Phi \cap \tau)$*-cohomologie et* $(\Phi \cap \tau)$*-homologie resp.*) *sont* correspondantes.

Si l'on prend en particulier $\Phi = \mathcal{F}$, et $u = \omega$, classe-unité de $H^0_{\mathcal{F}}(V)$, on voit que la classe correspondant à y est $y \cap v$, v désignant la classe correspondant à la classe-unité; v est une classe de $H^{\mathcal{F}}_n(V, T)$, canoniquement définie : on l'appellera *classe fondamentale* de la variété V.

5. Suite exacte des variétés ouvertes. — Soient Y un sous-espace fermé de la variété V, U le complémentaire ouvert V — Y; soient $\mathcal{A}$ la carapace des chaînes singulières de V à coefficients dans F, $\mathcal{A}_U$ la sous-carapace des chaînes à support dans U; la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}_U \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_Y \to 0$$

donne naissance à la suite exacte d'homologie

$$H^{\Phi_U}_{n-p}(U, F) \to H^{\Phi_V}_{n-p}(V, F) \to H^{\Phi}_{n-p}(V \bmod U, F) \to H^{\Phi_U}_{n-p-1}(U, F) \to .$$

D'après les isomorphismes du théorème 0.3 :

$$H^{\Phi_U}_{n-p}(U, F) \simeq H^q_{\Phi_U}(U, F \bigcirc T) \qquad \text{et} \qquad H^{\Phi}_{n-p}(V, F) \simeq H^q_{\Phi}(V, F \bigcirc T);$$

or ces groupes de cohomologie entrent dans la suite exacte (2) :

$$\to H^q_{\Phi_U}(U, F \bigcirc T) \to H^q_{\Phi}(V, F \bigcirc T) \to H^q_{\Phi_Y}(Y, F \bigcirc T) \to H^{q+1}_{\Phi_U}(U, F \bigcirc T) \to .$$

On démontre que ces deux suites exactes sont canoniquement isomorphes; le troisième isomorphisme : $H^{\Phi}_{n-p}(V \bmod U) \simeq H^q_{\Phi_Y}(V)$, est celui qui donne la « dualité » d'Alexander-Pontrjagin [2].

VI. — L'homomorphisme de Gysin.

Appliquons la formule précédente (3) dans le cas où X et Y sont deux variétés : V de dimension p et M de dimension n. Soient T_1 et T les systèmes locaux attachés à l'orientation de V et M resp. L'application

$$f^* : \quad H^{\Phi_1}_r(V, F) \to H^{\Phi}_r(M, G)$$

devient, en tenant compte des isomorphismes de dualité dans V et M, un homomorphisme

$$\psi^* : \quad H^{q-r}_{\Phi_1}(V, F \bigcirc T_1) \to H^{q-r}_{\Phi}(M, G \bigcirc T).$$

De façon plus précise, si V et M désignent les classes fondamentales de V et M resp., ψ^* peut être défini par la relation

$$f_*(x \cap y) = \psi^* x \cap m.$$

Cet homomorphisme, considéré par Gysin [2] (¹), jouit d'une propriété multiplicative simple; désignant toujours par f^* l'homomorphisme induit par f sur les cohomologies $f^* : H_\tau^r(M) \to H_\tau^r(V)$, la relation (3) va donner, en prenant les classes correspondantes dans M et utilisant le théorème 0.4,

$$\psi^*(f^*y \cup x) = y \cup \psi^* x. \tag{4}$$

Si, en particulier, on a pris $\Phi_1 = \mathcal{F}$, $F = Z$, il existe dans $H_{\mathcal{F}}^0(V, Z)$ une classe-unité ω; si l'on fait $x = \omega$, (4) devient

$$\psi^*(f^*(y)) = y \cup \psi^*(\omega), \tag{5}$$

où les deux membres sont des classes de τ-cohomologie.

CHAPITRE I.

1. — Généralités.

Les notions techniques exposées dans l'Introduction vont nous servir dans l'étude de la cohomologie des espaces fibrés en sphères. Précisons tout d'abord la définition ici utilisée d'un espace fibré :

Un espace E est dit fibré en sphères S^{k-1} de dimension $k-1$, s'il existe une application p (projection) de E *sur* un espace localement compact et paracompact, la *base* B, telle que :

1° L'image inverse $p^{-1}(a)$ de tout point a de B est une sphère S^{k-1} (la *fibre*).

2° Tout point a de B admet un voisinage ouvert U, pour lequel existe un homéomorphisme h^{-1} de l'image inverse $p^{-1}(U)$ sur le produit $U \times X$, tel que

$$(p \circ h)(a, y) = a.$$

C'est là l'hypothèse de *trivialité locale*.

On ne fera par contre aucune hypothèse sur l'existence d'un groupe de structure : d'ailleurs, tous les résultats de ce chapitre demeurent valables, même si la fibre n'est pas une sphère, pourvu seulement qu'elle en ait le type d'homologie.

A l'espace E on associera deux autres espaces fibrés de même base B par la construction suivante : formons le produit $E \times I$ (I désigne le segment 0-1) et, dans ce produit, identifions en un seul point tous les points de la

(¹) L'homomorphisme $\psi^* : H^{p-r}(V) \to H^{n-r}(M)$ est le dual de l'homomorphisme $\psi : H_{n-r}(M) \to H_{p-r}(V)$ que Hopf a introduit pour les groupes d'homologie sous le nom de Umkehrungshomomorphismus [10].

forme $\left(p^{-1}(a) \times \{1\}\right)$. On obtient ainsi un espace fibré A sur la base B, la projection p_1 étant définie par $p_1(x, t) = p(x)$, $0 \leq t \leq 1$; la fibre est une k-boule fermée; on désignera par A′ le complémentaire ouvert de $E \times \{0\}$ dans A, qui est fibré sur B par des k-boules ouvertes; les espaces fibrés A et A′ admettent au moins une section, la section « centrale » B^0 image de $E \times \{1\}$; on observera que l'espace A n'est autre que le « *mapping cylinder* » de l'application p [19].

Pour définir les cohomologies dans E, A, A′, B, il est nécessaire de préciser : *a.* les familles (Φ) utilisées; *b.* les coefficients.

a. Les familles (Φ). — On se donne *à priori* une famille (Φ) dans B qu'on dénotera par (Φ_1); on lui associera des familles (Φ) dans A, A′, E comme suit :

Dans A, on prendra la famille (Φ) de tous les fermés dont la projection sur B est dans Φ_1.

Dans E, on prendra la famille (Φ_E), composée des ensembles de Φ qui sont dans E; appartient à Φ_E tout fermé de E dont la projection appartient à Φ_1.

Dans A′, on prendra la famille (Φ') des fermés de Φ qui sont contenus dans A′. On observera que pour qu'un fermé $\varphi' \subset A'$ appartienne à Φ', il faut et il suffit que :

1° Sa projection $p(\varphi')$ appartienne à (Φ_1).

2° Son intersection avec tout fermé de A′ de la forme $p^{-1}(K)$ (K compact de B), soit elle-même compacte.

Si l'on a pris pour Φ_1 la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de B, il lui correspond dans A, E la famille de tous les fermés; par contre, la famille (Φ') est — en général — plus petite que la famille $\mathcal{F}$, à cause de la condition 2°. Si Φ_1 est la famille $\mathcal{K}$ des compacts, il lui correspond dans E, A et A′ la famille $\mathcal{K}$ des compacts.

b. Les coefficients. — On se donne sur la base B un faisceau de coefficients F; on lui associe sur E, A, A′ les faisceaux images réciproques par la projection p; dans ce qui suit, on se bornera au cas où le faisceau donné F est un *faisceau localement simple de groupes abéliens;* comme le faisceau image réciproque d'un faisceau localement simple est encore un faisceau localement simple, les faisceaux images réciproques de F par p sur E, A, A′ seront encore des faisceaux localement simples de groupes abéliens; on les désignera par la même lettre F que le faisceau initial.

Si F est un système local au sens de Steenrod, défini par l'homomorphisme h de $\Pi_1(B)$ dans le groupe d'automorphismes du groupe-fibre, les systèmes induits F sur A et A′ seront définis par le même homomorphisme h : en effet, la projection p induit un isomorphisme de $\Pi_1(A)$ [ou $\Pi_1(A')$] sur $\Pi_1(B)$.

Systèmes locaux associés. — Il existe sur B, canoniquement attaché à l'espace

fibré A′ (ou E) un système local d'entiers T ainsi défini : on prend au-dessus de chaque point $a \in B$ la cohomologie entière (à supports compacts) de la fibre : cohomologie nulle pour toute dimension, sauf pour la dimension k, pour laquelle elle est isomorphe au groupe Z des entiers : à cause de l'hypothèse de trivialité locale on définit ainsi un faisceau localement simple T; au point de vue de la théorie de Steenrod, un élément $s \in \Pi_1(B)$ opère non trivialement dans Z, $(s(1) = -1)$, si et seulement si le lacet correspondant renverse l'orientation de la fibre : pour que l'espace fibré E soit *orientable* (au sens de Whitney-Steenrod), il faut et il suffit que le système T soit simple.

De façon plus rigoureuse, le faisceau T peut être défini comme suit : soit $\mathcal{C}$ la carapace des cochaînes de Čech-Alexander, à valeurs entières, dont les supports sont pris dans la famille Φ' des fermés de A contenus dans A′; comme nous le verrons au paragraphe II, $\mathcal{C}$ peut être considérée comme carapace sur B, par projection des supports sur B; T est alors le faisceau de cohomologie de cette carapace.

Le produit tensoriel $T \bigcirc T$ est isomorphe au faisceau simple Z, et cet *isomorphisme est canoniquement défini* : c'est l'isomorphisme qui, en tout point de B, est compatible avec l'homomorphisme de $Z \otimes Z \to Z$ défini par la multiplication des entiers. Soit F un faisceau localement simple de groupes abéliens sur B; le faisceau $F \bigcirc T$ sera appelé *système local associé de* F; comme $(F \bigcirc T) \bigcirc T = F \bigcirc Z = F$, la relation entre F et $F \bigcirc T$ est involutive : F et $F \bigcirc T$ seront dits *systèmes locaux associés*.

II. — Les théorèmes d'isomorphisme.

1. Soit $\mathcal{A}$ une carapace sur A qui satisfait aux conditions du théorème 0.1 : elle est fine, Φ-complète, et $H^q(F(\mathcal{A}))$ est nul, sauf pour $q = 0$, auquel cas $H^0(F(\mathcal{A}))$ définit un système local de groupes abéliens F (F étant donné à l'avance, une telle carapace existe toujours); considérons $\mathcal{A}$ comme carapace sur B, en affectant à chaque élément $a \in \mathcal{A}$ pour nouveau support dans B le fermé $\sigma_1(a) = p(\sigma(a))$ projection de son support dans A; les conditions de définition des carapaces 1, 2, 3, 4, Introduction III, n° 1 sont encore vérifiées avec ces nouveaux supports : soit $\mathcal{A}_1$ cette nouvelle carapace sur B (isomorphe à $\mathcal{A}$ en tant que groupe gradué); nous allons montrer que $\mathcal{A}_1$ satisfait aux conditions du théorème 0.1 sur $\mathcal{B}$.

1° $\mathcal{A}_1$ *est fine.* — Soit, en effet, un recouvrement de B, localement fini, par des ouverts U_i; les ouverts $p^{-1}(U_i)$ de B constituent un recouvrement ouvert localement fini de A; les endomorphismes l_i qu'il définit dans $\mathcal{A}$ opèrent également dans $\mathcal{A}_1$ et y satisfont bien aux conditions requises pour les supports.

2° $\mathcal{A}_1$ *est* Φ_1*-complète.* — D'après la définition des familles Φ et Φ_1, $\mathcal{A}_\Phi$

et $(\mathcal{C}_1)_{\Phi_1}$ sont des sous-carapaces qui se correspondent dans l'isomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_1$; soit Σa_i une somme localement finie sur B d'éléments $a_i \in \mathcal{C}_1$ et (Σ_1) son support total; considérée dans $\mathcal{C}$, la somme Σa_i est *a fortiori* localement finie; soit (Σ) son support total; il est clair que si Σa_i est nulle dans $\mathcal{C}_1$ en un point y de B, elle est nulle en tout point de la fibre $p^{-1}(y)$ dans $\mathcal{C}$; par suite $p(\Sigma) \subset \Sigma_1$; donc si Σ_1 est dans (Φ_1), Σ est dans (Φ); par suite Σa_i converge dans $\mathcal{C}_\Phi$: Σa_i converge également dans $\mathcal{C}_{\Phi_1}$.

3° La carapace induite par $\mathcal{C}_1$ en un point y de B, soit $\mathcal{C}_{1,y}$ est isomorphe à la carapace induite par $\mathcal{C}$ sur la fibre $p^{-1}(y)$; la cohomologie de cette carapace n'est autre que la cohomologie de la boule fermée : par suite, $H^q(F(\mathcal{C}_1))$ est nul pour $q \neq 0$, et $H^0(F(\mathcal{C}_1))$ s'identifie au système local F.

Le théorème 0.1 permet par suite d'affirmer :

Théorème 1.1. — *Il existe un isomorphisme canonique j de* $H^i(B, F)$ *sur* $H^i(A, F)$, *qui provient de l'isomorphisme des carapaces* $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$.

On démontre de plus, en théorie des faisceaux, que, *dans le cas particulier précédent*, cet isomorphisme j coïncide avec l'homomorphisme p^* induit sur les cohomologies par la projection $p : A \to B$. Ceci montre que, si l'on a défini sur les cohomologies de A et B une structure multiplicative, l'isomorphisme j s'étend aux structures multiplicatives [2] (exp. 21, prop. V).

On retrouvera aisément ces résultats en remarquant que la section centrale B^0 est un rétracte par déformation de l'espace A.

Soit maintenant $\mathcal{C}'$, la sous-carapace des éléments de $\mathcal{C}$ dont le support est dans Φ' : $\mathcal{C}'$ est fine et Φ'-complète sur A'; en tout point $y \in A'$, $H^q(F(\mathcal{C}'))$ est nul sauf pour $q = 0$, $H^0(F(\mathcal{C}'))$ définit le système local F; soit $\mathcal{C}'_1$ la carapace sur B obtenue à partir de $\mathcal{C}'$ par projection des supports sur B; comme tout à l'heure, $\mathcal{C}'_1$ est *fine* sur B; soient, comme tout à l'heure, Σ' et Σ_1 les supports totaux dans A' et B resp. de la même somme localement finie $\Sigma a'_i$ d'éléments de $\mathcal{C}'$; on a $p(\Sigma') \subset \Sigma_1$; de plus, soit K un compact de B; puisque $\Sigma a'_i$ est localement finie sur B, le nombre des éléments a'_i non nuls sur K est fini; par suite, l'intersection $p^{-1}(K) \cap \Sigma'$ ne comprend qu'un nombre fini de compacts, et est donc compacte; il en résulte que $p(\Sigma')$ est un fermé contenu dans Σ_1, donc appartient à Φ_1 ; donc Σ' appartient à Φ', et $\Sigma a'_i$ converge dans $\mathcal{C}'$, donc dans $\mathcal{C}_1$. $\mathcal{C}'_1$ est Φ_1-*complète*.

La carapace induite par $\mathcal{C}'_1$ en un point $y \in B$ n'est autre que la carapace induite par $\mathcal{C}'$ sur la fibre $b^k = p^{-1}(y)$, k-boule ouverte; la cohomologie $H^q(F(\mathcal{C}'_1))$ est donc — localement — isomorphe à la cohomologie à *supports compacts* de b^k; donc $H^q(F(\mathcal{C}'_1))$ est nul pour tout q, sauf pour $q = k$, et le système local $H^k(F(\mathcal{C}'_1))$ n'est autre que le système local $F \bigcirc T$ associé au système F. Nous avons donc le théorème :

THÉORÈME I.2. — *Il existe un isomorphisme (canonique)* φ^* *de* $H^r_{\Phi_1}(B, F \bigcirc T)$ *sur* $H^{r+k}_{\Phi'}(A', F)$.

2. UNE PROPRIÉTÉ DE L'ISOMORPHISME φ^*. — Soit Y un sous-ensemble fermé de B; désignons par D′ l'image inverse de Y par la projection p, sous-espace fermé de A′; écrivons les isomorphismes φ^* pour les espaces fibrés A′, D′ et A′ — D′, ainsi que les suites exactes (2) relatives aux inclusions D′ → A′ et Y → B; nous obtenons le diagramme où l'on a pris les cohomologies par rapport à la même famille (Φ).

$$(6)\qquad \begin{array}{l} H^{r+k}(A'-D') \to H^{r+k}(A') \to H^{r+k}(D') \to H^{r+k+1}(A'-D') \to \\ \varphi^*_{B-Y}\uparrow \qquad\qquad \varphi^*\uparrow \qquad\qquad \varphi^*_Y\uparrow \qquad\qquad \varphi^*_{B-Y}\uparrow \\ H^r\ (B-Y) \to H^r\ (B) \to H^r\ (Y) \to H^{r+1}\ (B-Y) \to. \end{array}$$

En remontant à la définition de l'isomorphisme φ^* tel qu'il est donné par le théorème fondamental de la théorie des faisceaux, on démontre que dans le diagramme (6), il y a commutation [2] (exp. 19, p. 8, th. 7).

3. INTERPRÉTATION ÉLÉMENTAIRE DE L'ISOMORPHISME φ^*. — Dans le cas où la base B est un complexe, on peut donner de l'isomorphisme φ^* une interprétation simple.

Soient K^q le $q^{\text{ième}}$ squelette de K, Z une q-cellule fermée de K; l'image inverse $p^{-1}(Z^q)$ de Z^q dans A, constitue une $(q+k)$-cellule fermée; toutefois, l'ensemble des cellules $p^{-1}(Z^q)$ ne constitue pas une subdivision cellulaire de A; en effet, le bord de $p^{-1}(Z^q)$ n'est pas contenu tout entier dans $p^{-1}(K^{q-1}) = D^{q-1+k}$; pour pouvoir utiliser la théorie classique des complexes, il est nécessaire de considérer uniquement des chaînes de A mod E : en effet, le bord de $p^{-1}(Z^q)$ est tout entier contenu dans la réunion $E \cup D^{q-1+k}$, de sorte qu'on pourra calculer la cohomologie $H^{q+k}(A \bmod E)$ à l'aide de cette subdivision.

Considérons tout d'abord le cas particulier où la base B se réduit à une cellule fermée Z^q de bord S^{q-1}; soient $A = p^{-1}(Z^q)$, $D = p^{-1}(S^{q-1})$; nous avons alors un isomorphisme

$$\varphi^* : \quad H^q(Z^q \bmod S^{q-1}) \text{ sur } H^{q+k}(A \bmod (D+E)),$$

isomorphisme bien défini dès qu'on a orienté la fibre, c'est-à-dire choisi l'un des deux isomorphismes de T sur Z. φ^* fait ainsi correspondre à toute orientation de la cellule Z^q une orientation bien définie de la $(q+k)$-cellule $Z' = p^{-1}(Z^q)$, mod E; en remontant à la définition de φ^*, et notamment à une convention faite dans la démonstration du théorème 0.1, on peut voir que l'orientation induite par φ^* sur Z′, n'est autre que le produit de l'orientation de la fibre par l'orientation de la base *dans cet ordre*.

Soit u une cochaîne de $C^r(B)$; on peut définir un homomorphisme

$$g^* : \quad C^r(B) \to C^{r+k}(A \bmod E, T)$$

par la formule

$$g^* u(Z') = \pm u(Z),$$

où le signe — correspond à une opération non triviale du système T, et où l'orientation choisie pour Z′ est celle du produit : fibre $\times$ base donnée par φ^*. g^* est un isomorphisme de $C^r(B)$ sur $C^{r+k}(A, \text{mod } E, T)$, qui commute avec le cobord; g^* induit par suite un isomorphisme

$$g^* : \quad H^r(B) \text{ sur } H^{r+k}(A \text{ mod } E, T).$$

Théorème I.3. — *L'isomorphisme g^* coïncide avec φ^*.*

Nous avons les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} H^{r+k}(D^{r+k} - D^{r+k-1}) & \to & H^{r+k}(D^{r+k}) & \to & H^{r+k}(D^{r+k-1}) = 0 \\ \varphi^* \uparrow & & \varphi_r \uparrow & & \\ H^r\ (K^r - K^{r-1}) & \to & H^r\ (K^r) & \to & H^r\ (K^{r-1}) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} H^{r+k}(D^{r+k} \text{ mod } D^{r+k-1}) & \to & H^{r+k}(D^{r+k}) & \to & 0, \\ g^* \uparrow & & j^* \uparrow & & \\ H^r\ (K^r \text{ mod } K^{r-1}) & \to & H^r\ (K^r) & \to & 0. \end{array}$$

Or, sur la base K^r mod K^{r-1}, composée de r-cellules disjointes, les isomorphismes φ^* et g^* coïncident (c'est la définition de g^*); puisque les premières flèches verticales des deux diagrammes sont les mêmes, il en va de même des secondes. C. Q. F. D.

4. Propriété multiplicative de l'isomorphisme φ^*. — Soient Φ_1, ψ_1 deux familles sur B et $\tau_1 = \Phi_1 \cap \psi_1$ la famille intersection; désignons par Φ la famille associée sur A à Φ_1, par ψ' la famille associée à ψ_1 sur A′; on posera $\tau' = \Phi \cap \psi'$ associée sur A′ à τ_1. Donnons-nous sur A trois carapaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *fines*; on suppose de plus : $\mathcal{A}$, Φ-complète; $\mathcal{B}$, ψ'-complète; $\mathcal{C}$, τ'-complète; les faisceaux de cohomologie $H^i(F(\mathcal{A}))$, $H^i(F(\mathcal{B}))$, $H^i(F(\mathcal{C}))$ sont nuls, sauf peut-être pour $i = 0$, valeur pour laquelle ils définissent des systèmes locaux de groupes abéliens.

Supposons alors donnée une application bilinéaire

$$f : \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C},$$

qui satisfait aux conditions du théorème 0.2.

On prendra par exemple : $\mathcal{A}$, la carapace des cochaînes de Čech-Alexander à valeurs dans un faisceau de groupes abéliens F; $\mathcal{B}$, la carapace des cochaînes entières de A′, pour $\mathcal{C}$ la sous-carapace de $\mathcal{A}$, à supports dans A′; la multiplication bien connue des cochaînes de Čech-Alexander va donner une application bilinéaire

$$f : \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C},$$

qui satisfait aux conditions du théorème 0.2.

Soient maintenant $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$, les carapaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ considérées comme carapaces sur B par projection des supports. La même application bilinéaire

$$f : \quad \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1 \to \mathcal{C}_1,$$

satisfait encore aux conditions du théorème 0.2, car

$$p(\sigma(a) \cup \sigma(b)) \subset p(\sigma(a)) \cap p(\sigma(b)).$$

Par suite, l'homomorphisme déduit de f :

$$h : \quad \mathrm{H}^p(\mathcal{A}_{\varphi_1}) \otimes \mathrm{H}^q(\mathcal{B}_{\psi_1}) \to \mathrm{H}^{p+q}(\mathcal{C}_{\tau_1})$$

va s'identifier, tenant compte des isomorphismes des théorèmes I.1. et I.2 au cup-produit

$$\mathrm{H}^p_{\varphi_1}(\mathrm{B}, \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{A}_1))) \otimes \mathrm{H}^{q-k}_{\psi_1}(\mathrm{B}, \mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{B}_1))) \to \mathrm{H}^{p+q-k}_{\tau_1}(\mathrm{B}, \mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{C}_1)))$$

défini par la multiplication des coefficients

$$h' : \quad \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{A}_1)) \bigcirc \mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{B}_1)) \to \mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{C}_1))$$

déduite de f : c'est l'homomorphisme h' : $\mathrm{F} \bigcirc \mathrm{T} \to (\mathrm{F} \bigcirc \mathrm{T})$.

Transcrite à l'aide des isomorphismes j et φ^*, cette propriété s'exprime par la formule

$$\varphi^*(x \cup y) = jx \cup \varphi^{*\prime} y, \qquad x \in \mathrm{H}^r(\mathrm{B}), \qquad y \in \mathrm{H}^q(\mathrm{B}), \tag{7}$$

où l'on a affecté d'un $'$ le φ^* du deuxième membre pour montrer qu'il est relatif à la famille ψ_1, alors que celui du premier membre vaut pour la famille τ.

Cas particulier important. — On suppose :

1° La famille ψ_1 est la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de B, alors $\tau_1 = \Phi_1$, $\tau' = \Phi'$;

2° $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{A}))$ définit un système local de groupes abéliens tous isomorphes à G;

3° $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{B}))$ est le système simple des entiers Z; $\mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{B}_1))$ est alors le système tordu T.

Il existe alors une classe-unité $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathrm{B}, \mathrm{Z})$; on posera $\mathrm{U} = \varphi^*(\omega)$, U classe de $\mathrm{H}^k(\mathrm{A}', \mathrm{T})$. L'homomorphisme h' des faisceaux étant alors défini par l'accouplement canonique $\mathrm{G} \otimes \mathrm{Z} \to \mathrm{G}$, $\mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{C}_1))$ sera alors le système local $\mathrm{F} \bigcirc \mathrm{T}$ associé à F. La formule (7), où l'on a fait $y = \omega$, devient

$$\varphi^*(x) = jx \cup \mathrm{U}. \tag{8}$$

La classe $\mathrm{U} \in \mathrm{H}^k(\mathrm{A}', \mathrm{T})$ joue ainsi un rôle universel, puisqu'elle peut servir à définir φ^* pour n'importe quelle famille (Φ_1), et n'importe quel faisceau de coefficients F.

THÉORÈME I.4. — *L'image par φ^* d'une classe de cohomologie x de la base n'est autre que le cup-produit de la classe $j(x)$ par la classe « universelle » U.*

III. — La suite exacte des espaces fibrés en sphères.

Écrivons la suite exacte de cohomologie (2) relative à l'injection du sous-espace fermé E dans A :

$$(9) \qquad \to H^{r-1}(E, F) \xrightarrow{\alpha} H^r(A', F) \xrightarrow{\beta} H^r(A, F) \xrightarrow{\gamma} H^r(E, F) \to.$$

En tenant compte des isomorphismes

$$j : H^l(B, F) \simeq H^l(A, F), \qquad \varphi^* : H^{r-k}(B, F \bigcirc T) \simeq H^r(A' \bigcirc F),$$

définis par les théorèmes I.1 et I.2, la suite (9) s'écrit

$$(10) \qquad \to H^{r-1}(E, F) \xrightarrow{\psi} H^{r-k}(B, F \bigcirc T) \xrightarrow{\mu} H^r(B, F) \xrightarrow{p^*} H^r(E, F) \to.$$

Interprétation des homomorphismes de la suite (10). — 1° L'homomorphisme $p^* : H^r(B, F) \to H^r(E, F)$ n'est autre que l'homomorphisme induit sur les cohomologies par l'application fibrée $p : E \to B$; en effet, $p^* = \gamma \circ j$ provient de l'injection de E dans le « mapping cylinder » A de p.

2° L'homomorphisme $\psi : H^{r-1}(E, F) \to H^{r-k}(B, F \bigcirc T)$ n'a pas d'interprétation simple; défini également dans la théorie de Leray (*cf.* [13]), il est, dans le cas d'un espace fibré différentiable, induit par l'intégration sur les fibres des formes différentielles de l'espace fibré.

3° L'homomorphisme μ s'interprète comme un cup-produit; par définition : $\mu = j^{-1}\beta\varphi^*$; les homomorphismes j^{-1} et conservent le cup-produit; appliquons (8) : il vient

$$\mu(x) = j^{-1}\beta\varphi^*(x) = j^{-1}\beta(jx \cup U) = x \cup j^{-1}\beta U = x \cup W^k, \qquad \text{où} \quad W^k = j^{-1}\beta U.$$

Remarque. — Cette interprétation de l'homomorphisme μ reste valable, même si, dans la Φ_1-cohomologie considérée, $H^0_{\Phi_1}(B)$ est nul; la classe U est alors, comme la classe W^k, extérieure à la Φ_1-cohomologie considérée; exemple : on a pris dans B non compact la cohomologie à supports compacts.

Nous avons le corollaire :

Corollaire I.5. — *Le noyau de l'homomorphisme p^* induit par l'application $p : E \to B$ coïncide dans l'anneau de cohomologie (à supports dans $\mathcal{F}$) de* B *avec l'idéal engendré par la classe* W^k.

Ceci est une conséquence immédiate de l'exactitude de la suite (10).

On sait que cette propriété appartient également à la classe caractéristique fondamentale [20], usuellement définie comme la classe c^k d'un cocycle de première obstruction.

En fait, cette classe-obstruction c^k peut être également définie pour $k > 1$ d'une façon intrinsèque, indépendante de toute construction de section. Cette

définition, qui se rattache à la notion récente de « transgression dans les espaces fibrés », procède comme suit [16] (Chap. I, § 3 et 5).

Soit x un point de la base B, Y son image inverse dans A, $S = Y \cap E$ son image inverse dans E. Les inclusions $S \to E$, $Y \to A$, $Y' = (Y - S) \to A' = (A - E)$ donnent naissance à trois suites exactes qu'on écrira horizontalement; les inclusions $E \to A$, $S \to Y$, $(E - S) \to (A - Y)$ définissent trois suites exactes qu'on écrira verticalement; dans le diagramme obtenu, prolongé indéfiniment

$$\begin{array}{ccccccc}
H(S) & \xrightarrow{\partial_1} & H(E-S) & \to & H(E) & \to & \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_0} & \otimes & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\
H(Y') & \to & H(A'-Y') & \to & H(A-E) & \xrightarrow{\lambda} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
H(Y) & \to & H(A-Y) & \to & H(A) & \to & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & &
\end{array}$$

tout est commutatif, à l'exception du carré marqué $\otimes$, qui est anticommutatif.

Écrivons alors un fragment du diagramme précédent contenant $H^{k-1}(S)$; tous les groupes de cohomologie seront supposés pris par rapport au système local d'entiers T, défini dans A' par l'isomorphisme $\delta_0 : H^{k-1}(S) \to H^k(Y')$ ou les systèmes qu'il induit sur les sous-espaces considérés.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & H^k(A') & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
 & & 0 & & H^k(A-Y) & \xrightarrow{\rho^*} & H^k(A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
H^{k-1}(E) & \to & H^{k-1}(S) & \xrightarrow{\delta_0} & H^k(E-S) & \to & H^k(E) & & \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_1} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to H^k(A') & \xrightarrow{\lambda} & H^k(Y') & \to & H^{k+1}(A'-Y') & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow & & & & & & \\
H^k(A) & & 0 & & & & & &
\end{array} \tag{11}$$

On a supposé B connexe, $k > 1$, de sorte que $H^k(A - Y) \simeq H^k(A)$. Désignons par s la classe fondamentale de $H^{k-1}(S)$ à coefficients dans $T = H^{k-1}(S^{k-1})$; la classe s, qui prend sur le cycle fondamental de Y' la valeur $+1$, n'est autre que l'image λU de la classe U définie à l'aide de l'isomorphisme φ^*; de sorte que, λ étant biunivoque, W^k est définie par

$$W^k = \beta \lambda^{-1} \delta_0(S).$$

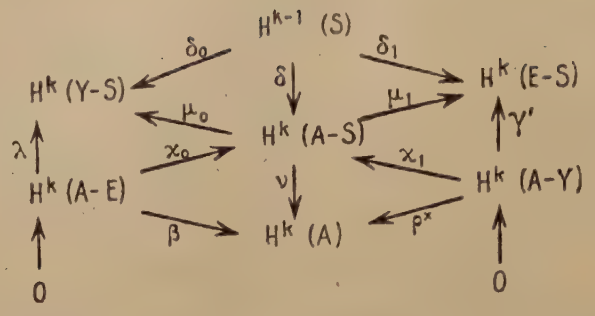
Revenons maintenant à la classe c^k; le résultat auquel nous faisions allusion plus haut s'énonce : (Steenrod, th. 37.15 [20]) la classe c^k est définie par la formule (où γ' est biunivoque) :

$$c^k = \rho^* \gamma'^{-1} \delta_1(s).$$

Pour comparer entre elles, les classes W^k et c^k, on complétera le diagramme précédent par l'adjonction de l'espace A — S. Nous obtenons ainsi le diagramme,

où tout est commutatif

(12)



et où les flèches alignées appartiennent à des suites exactes. Partons de la classe $U \in H^k(A - E)$; comme

$$\lambda U = \delta_0 s = \mu_0 \delta s, \qquad \mu_0(\chi_0 U - \delta s) = 0.$$

Il existe par suite une classe $X \in H^k(A - Y)$, telle que

$$\chi_0 U - \delta s = \chi_1 X. \tag{13}$$

Appliquons μ_1; il restera

$$-\delta_1 s = \gamma' X$$

et, comme γ' est biunivoque pour la dimension considérée,

$$\rho^* X = -c^k.$$

Appliquons ν à l'égalité (13); reste

$$U = -c^k, \qquad \text{d'où} \qquad W^k = -c^k.$$

Théorème I.6. — *Les classes* W^k *et* c^k, *définies à partir de la même orientation de la fibre* S^{k-1}, *sont opposées.*

Remarque. — Le résultat sur la classe c^k auquel nous avons référé suppose explicitement que la dimension k de la fibre est > 1; le cas où $k = 1$, qui est celui du revêtement à deux feuillets, nécessite une définition particulière de la classe caractéristique fondamentale. Signalons cependant que la suite exacte (10) demeure valable en ce cas; les suites exactes obtenues en faisant $F = Z$, ou T, sont à rapprocher des suites exactes de la théorie des transformations périodiques de Smith, le revêtement étant alors un espace où opère sans point fixe un groupe d'ordre 2.

Une formule importante. — Si dans (8), on fait $x = W^k$, il vient

$$\varphi^* W^k = j W^k \cup U = U \cup U. \tag{14}$$

Dans cette formule, W^k est une classe tordue (coefficients dans T), de même que U; $\varphi^* W^k$ et $U \cup U$ sont des classes non tordues.

Remarque. — La formule (14), démontrée par Gysin, semble avoir été trouvée indépendamment (toujours dans le cas des variétés) par Whitney [25] (p. 119, th. 13).

COROLLAIRE I.7. — *Si k est impair,* $U \cup U = -U \cup U$; *donc* $2W^k = 0$, $2W^k = 0$. *La classe fondamentale d'un espace fibré par des sphères de dimension paire est d'ordre* 2. *Résultat classique* [8].

Observons que ce résultat vaut, en général, en cohomologie tordue; donnons-en une application : dans une variété de dimension impaire n, paracompacte, le groupe $H^n(V, T)$ est isomorphe à $H_0(V, Z)$ (théorème de dualité 0.3); c'est donc un groupe sans torsion; il en résulte que la classe W^k qui est dans le cas différentiable la classe caractéristique de l'espace fibré des vecteurs tangents, est identiquement nulle. (Si V est compacte, on retrouve la propriété bien connue de la caractéristique d'Euler-Poincaré).

Terminons par une remarque générale sur la suite exacte (10); elle permet, si les coefficients sont pris dans un corps et si E est orientable, la détermination de la structure additive de la cohomologie de E à partir de celle de B : il suffit de connaître, dans l'anneau de cohomologie de B, l'idéal engendré par W^k, et l'idéal des annulateurs de W^k. Par contre, les résultats précédents ne suffisent pas en général pour déterminer la structure multiplicative.

IV. — Cas où la base B est une variété.

Dans le cas où la base B est une variété de dimension n, il résulte de l'hypothèse de trivialité locale que A′ est une variété de dimension $n+k$; A est une *variété à bord* de bord E (*cf.* chap. V).

On va donner, dans ce cas, une interprétation particulièrement simple de l'isomorphisme φ^*.

Soit f l'application de B dans A′, sur la section centrale B_0; les familles (Φ) et les coefficients étant définis comme au paragraphe 1, a, f induit un homomorphisme f_* de $H_p^{\Phi_1}(B)$ dans $H_p^{\Phi_1}(A')$; de même les conditions 1°, 2°, 3° (§ V, a, Introduction) étant vérifiées, la projection p induit un homomorphisme de $H_r^{\Phi_1}(A')$ dans $H_r^{\Phi_1}(B)$; comme $p \circ f =$ identité, et que $f \circ p$ est évidemment homotope à l'identité, f induit un isomorphisme de $H_r^{\Phi_1}(B, S)$ sur $H_r^{\Phi_1}(A', S)$; désignons par T_1 et T' les systèmes locaux d'entiers tordus relatifs à l'orientation des variétés B et A′ respectivement.

Soit z_1^n une n-boule dans B, et $z^{n+k} = p^{-1}(z_1^n)$ son image inverse dans A′; l'orientation de z^{n+k} est le produit de l'orientation de z_n par l'orientation de la boule fibre b^k; il en résulte que les systèmes locaux d'entiers T′ et $T_1 \bigcirc T$ sont isomorphes, T désignant, comme précédemment, le système local d'entiers tordus associé à l'espace fibré A′ sur B. Toutefois, cet isomorphisme peut être

réalisé de deux manières distinctes, et nous allons préciser laquelle doit être choisie.

L'application f induit un isomorphisme f_* de $H_p^{\Phi_1}(B, F)$ sur $H_p^{\Phi'}(A', F)$; par dualité dans les variétés B et A', on en déduira un isomorphisme : $H_{\Phi_1}^{n-p}(B, F \bigcirc T)$ sur $H_{\Phi'}^{n-p+k}(A', F \bigcirc T')$. Posons $n-p=r$, et $F=T$; nous obtenons un isomorphisme ψ^* de

$$H_{\Phi_1}^{r}(B, Z) \text{ sur } H_{\Phi'}^{r+k}(A', T_1 \bigcirc T').$$

Par ailleurs, on a défini l'isomorphisme, si $\Phi_1 = \mathcal{F}$,

$$\varphi^* : \quad H_{\mathcal{F}}^{r}(B, Z) \text{ sur } H_{\varphi'}^{r+k}(A', T).$$

Choisir un isomorphisme $T' = T_1 \bigcirc T$ entre les deux possibles, c'est également définir un isomorphisme de T sur $T_1 \bigcirc T'$, donc aussi de $H^k(A', T_1 \bigcirc T')$ sur $H^k(A', T)$; soit j_1 cet isomorphisme. Supposons d'abord B connexe; alors, les groupes $H_{\Phi'}^{k}(A', T_1 \bigcirc T')$, $H_{\Phi'}^{k}(A', T)$ sont tous deux isomorphes à $H_{\mathcal{F}}^{0}(B, Z)$ donc à Z. Soit $\omega = \lambda(1)$, la classe unité de $H_{\mathcal{F}}^{0}(B, Z)$; on aura dès lors, puisque $\varphi^*\omega$ et $\psi^*\omega$ sont tous deux générateurs de groupes cycliques libres

$$j_1 \psi^* \omega = \pm U. \tag{15}$$

On supposera l'isomorphisme $T_1 \bigcirc T \to T'$ *choisi de telle façon que, dans la formule* (15), *on ait le signe plus.*

Si la variété B n'est pas connexe, on écrira la formule (15) pour chacune des composantes connexes, et l'on déterminera l'isomorphisme $T_1 \bigcirc T \to T'$ pour chacune des composantes, donc l'isomorphisme sera défini pour les faisceaux en entier; avec cette convention, nous aurons la formule

$$\varphi^* \omega = \psi^* \omega = U,$$

même si B n'est pas connexe.

Or on a vu que, pour une τ-cohomologie quelconque, l'homomorphisme jouissait de la propriété multiplicative

$$\psi^*(f^* y) = y \cup \psi^* \omega$$

qu'on peut également écrire, en remarquant que dans le cas actuel f^* admet un isomorphisme inverse $\bar{j}$:

$$\psi^*(y') = \bar{j} y' \cup \psi^* \omega = \bar{j} y' \cup U. \tag{16}$$

Dans la formule (16), la classe $\bar{j}(y)$ est une classe de $H_{\mathcal{F}}^{r}(A')$; soit j : $H^r(B) \to H^r(A)$ l'isomorphisme du théorème I.1; u désignant une classe quelconque de $H_{\Phi'}^{*}(A')$, on a

$$\bar{j}(y') \cup u = j(y') \cup u,$$

par suite

$$\psi^*(y') = j(y') \cup U.$$

Comparant avec la formule (7) qui donne φ^*, on en déduira

$$\varphi^* = \psi^*.$$

THÉORÈME I.8. — *Si la base* B *est une variété paracompacte, l'homomorphisme d'espace fibré* φ^* *coïncide avec l'homomorphisme de Gysin* ψ^*, *moyennant une identification convenable des faisceaux d'orientation* $T_1 \bigcirc T \to T'$.

CHAPITRE II.

I. — Généralités sur les carrés de Steenrod.

Soit K un complexe simplicial sur lequel est donné un système local F d'*entiers* tordus; la multiplication des entiers définit canoniquement (*cf.* chap. I) un homomorphisme de $F \bigcirc F$ dans le faisceau simple Z. A cet homomorphisme on peut associer, comme le fait Steenrod dans [18], un système de cup-*i*-produits, c'est-à-dire un ensemble d'applications bilinéaires des groupes de cochaînes :

$$C^r(K, F) \otimes C^s(K, F) \to C^{r+s-i}(K, Z)$$

qui satisfait, vis-à-vis du cobord, à une formule bien déterminée [formule (5.1) de [18]]. Ces opérations permettent alors de définir les *carrés de Steenrod*, qui sont des homomorphismes :

$$\begin{aligned} Sq_i &: H^m(K, F) \to H^{2m-i}(K, Z) && \text{pour } (m-i) \text{ impair,} \\ Sq_i &: H^m(K, F) \to H^{2m-i}(K, Z_2) && \text{pour } (m-i) \text{ pair,} \end{aligned}$$

dont on montre ensuite l'invariance topologique.

En fait, cette construction formelle peut s'effectuer, non seulement sur des cochaînes simpliciables, mais aussi sur des cochaînes d'Alexander-Spanier dont les supports sont pris dans une famille (Φ) d'un espace E, et les valeurs dans un faisceau localement simple d'entiers F; on pourra définir ainsi les carrés de Steenrod dans la Φ-cohomologie de l'espace E, prise par rapport au faisceau de coefficients F. Rappelons ici les principales propriétés de ces opérations.

Nous adopterons, ici et pour toute la suite, la notation « supérieure » : $Sq^i u = Sq_{m-i} u$ sur une classe de dimension m; avec cette notation, u désignant toujours une classe de degré $H^m(E, F)$:

1° $Sq^i u = 0$ pour $i > m$;

2° $Sq^i u = 0$ pour i pair est une classe de $H^{m+i}(E, Z_2)$; pour i impair, c'est une classe de $H^{m+i}(E, Z)$ d'ordre 2.

Remarque. — On considérera fréquemment l'opération Sq^i déduite de la précédente par réduction mod 2 des coefficients; alors Sq^i applique $H^m(E, Z_2)$ dans $H^{m+i}(E, Z_2)$ sans considération sur la parité de i.

3° $\mathrm{Sq}^m u = u \cup u$.

Les Sq^i jouissent également des propriétés suivantes de nature topologique :

4° Soient E un espace muni d'une famille (Φ), et E′ muni de la famille (Φ'); supposons donnée une application continue $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ telle que f induise un homomorphisme $f^* : \mathrm{H}^r_{\Phi'}(\mathrm{E}') \to \mathrm{H}^r_{\Phi}(\mathrm{E})$ (c'est le cas si $\Phi \subset f^{-1}(\Phi')$), alors on a

$$\mathrm{Sq}^i f^* = f^* \mathrm{Sq}^i.$$

5° Soit Y un sous-espace fermé de l'espace X : écrivons la suite exacte de cohomologie (Introduction, § II, n° 4) par rapport à un faisceau G de coefficients entiers pour le moment non précisé :

$$\to \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{G}}} \mathrm{H}^r(\mathrm{Y}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}} \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{X} - \mathrm{Y}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\gamma_{\mathrm{G}}} \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \to$$

alors chacun des homomorphismes de cette suite commute avec Sq^i, à condition, bien entendu, d'effectuer le changement convenable de coefficients si $\mathrm{G} \neq \mathrm{Z}_2$; par exemple :

pour i pair :

$$\alpha_{\mathrm{Z}_2} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \alpha_{\mathrm{G}}, \qquad \delta_{\mathrm{Z}_2} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \delta^*_{\mathrm{G}}, \qquad \gamma_{\mathrm{Z}_2} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \gamma_{\mathrm{G}};$$

pour i impair :

$$\alpha_{\mathrm{Z}} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \alpha_{\mathrm{G}}, \qquad \delta_{\mathrm{Z}} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \delta^*_{\mathrm{G}}, \qquad \gamma_{\mathrm{Z}} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \gamma_{\mathrm{G}}.$$

6° Soit B un espace paracompact, muni d'une famille (Φ_1); formons le produit $\mathrm{B} \times \mathrm{I}$ et soit p la projection canonique de $\mathrm{B} \times \mathrm{I}$ sur B; munissons $\mathrm{B} \times \mathrm{I}$ de la famille $\Phi = p^{-1}(\Phi_1)$ composée des fermés contenus dans les fermés de la forme $p(\varphi_1)$, où φ_1 parcourt Φ_1. Soit Y le sous-ensemble fermé $\mathrm{Y} = \mathrm{B} \times \{0\} \cup \mathrm{B} \times \{1\}$; soit A′ le complémentaire ouvert $\mathrm{B} \times \mathrm{I} - \mathrm{Y}$, homéomorphe à $\mathrm{B} \times \mathrm{R}$; munissons A′ de la famille (Φ') de tous les fermés de (Φ) contenus dans A′; nous avons dès lors l'isomorphisme du chapitre I :

$$\varphi^* : \quad \mathrm{H}^r_{\Phi_1}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{H}^{r+1}_{\Phi'}(\mathrm{A}').$$

Par ailleurs, considérons la suite exacte de l'injection de $\mathrm{E} \times \{0\}$:

$$\to \mathrm{H}^r_{\Phi_1}(\mathrm{B} \times \{0\}) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{H}^{r+1}_{\Phi'}(\mathrm{A}') \to \mathrm{H}^{r+1}_{\Phi}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B} \times \{0\}) \to.$$

Or les groupes $\mathrm{H}^i_{\Phi}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B} \times \{0\})$ sont tous nuls; en effet appliquons à l'espace fibré $\mathrm{A}' \cup \mathrm{B} \times \{0\}$ sur la base B le raisonnement du chapitre I; la fibre est le demi-segment $[0 - 1]$, et sa cohomologie à supports compacts est *identiquement nulle;* par suite $\mathrm{H}^r_{\Phi}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B} \times \{0\}) = 0$.

Par ailleurs δ^* jouit d'une propriété multiplicative évidente : si x est une classe de $\mathrm{H}^r(\mathrm{B} \times \mathrm{I})$ et f l'injection $\mathrm{B} \times \{0\} \subset \mathrm{B} \times \mathrm{I}$, on a

$$\delta^*(f^* x \cup y) = (-1)^r x \cup \delta^* y, \tag{17}$$

en conséquence directe de la formule du cobord d'un cup-produit.

Dans B paracompact, *supposé de plus connexe*, soit ω la classe-unité, générateur de $H^0_\Phi(B, Z)$; le groupe $H^1_{\mathcal{K}}(A')$, qui lui est isomorphe, admet pour générateur $\delta^*(\omega)$ et $\varphi^*(\omega)$; de là résulte

$$\varphi^*(\omega) = \pm\,\delta^*(\omega). \tag{18}$$

En comparant la formule (11) avec la formule multiplicative (7) de φ^*, on voit qu'ainsi $\delta^* = \pm\,\varphi^*$, sans qu'on puisse d'ailleurs préciser le signe.

Puisque Sq^i commute avec δ^*, Sq^i commute également avec φ^*, soit

$$\varphi'^* Sq^i = Sq^i \varphi^*, \tag{19}$$

où l'on a marqué d'un $'$ le φ^* du premier membre pour montrer qu'il peut être éventuellement nécessaire de changer de coefficients, donc l'isomorphisme φ^*. Il n'est pas nécessaire de donner à la formule (19) un signe $\pm$, comme dans (18), car si un carré de Steenrod n'est pas nécessairement défini mod 2, il est, d'après 2°, égal à son opposé. Si B n'est pas connexe, la formule (19), valable dans chacune des composantes connexes de B, est valable pour B en entier.

Ce résultat valable pour un espace fibré de la forme $B \times R$, s'étend par itération (grâce à une relation presque évidente de transitivité des φ^*) à un espace de la forme $A' = B \times R^k$. Ici encore, la (Φ')-cohomologie à prendre dans A' est la famille (Φ') des fermés de A' qui se projettent sur B suivant un fermé de (Φ_1), et qui rencontrent toute fibre R^k suivant un compact. Pour un tel espace fibré trivial, nous aurons

$$\varphi'^* Sq^i = Sq^i \varphi^*. \tag{19'}$$

7° Soient deux espaces paracompacts $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, munis respectivement des familles Φ et ψ; $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ l'espace-produit qu'on supposera également paracompact et muni d'une famille τ. Soient $p_1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{X}$, $p_2(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{Y}$ les projections canoniques de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ sur les facteurs. Supposons que tout fermé $\tau \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, dont les projections $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$ appartiennent à Φ, ψ resp., appartienne à la famille τ. Dans ces conditions, on peut définir un homomorphisme

$$\mu : \quad H^p_\Phi(\mathcal{X}) \otimes H^q_\psi(\mathcal{Y}) \to H^{p+q}_\tau(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \qquad (cf.\ [2],\ \text{exp. 19, § 6, p. 8}). \tag{20}$$

Si, en particulier, Φ, ψ, τ se réduisent à la famille $\mathcal{K}$ des compacts, et si les coefficients sont dans un corps, μ est un isomorphisme du produit tensoriel

$$H^p_{\mathcal{K}}(\mathcal{X}) \otimes H^q_{\mathcal{K}}(\mathcal{Y}) \text{ sur } H^{p+q}_{\mathcal{K}}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}).$$

Supposons que les coefficients des cohomologies de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ soient les entiers mod 2; le carré de Steenrod dans la cohomologie $H^{p+q}_\tau(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ satisfait alors à la formule

$$Sq^i[\mu(x \otimes y)] = \mu(\Sigma_j Sq^{i-j} x \otimes Sq^j y) \tag{21}$$

(formule généralisant la formule de H. Cartan en [3]).

Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ et si d^* désigne l'homomorphisme induit par l'injection diagonale $d : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, le cup-produit de deux classes x et y est défini par

$$x \cup y = d^* \mu [x \otimes y].$$

Comme d^* commute avec Sq^i, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Sq}^i(x \cup y) &= \mathrm{Sq}^i d^* \mu(x \otimes y) = d^* \mathrm{Sq}^i \mu(x \otimes y) \\ &= d^* \mu(\Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} x \otimes \mathrm{Sq}^j y) \circ = \Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} x \cup \mathrm{Sq}^j y, \end{aligned}$$

d'où la formule

$$\mathrm{Sq}^i(x \cup y) = \Sigma_j \mathrm{Sq}^{j-j} x \cup \mathrm{Sq}^j y, \tag{22}$$

où le cup-produit est à valeurs dans la $(\Phi \cap \psi)$ — cohomologie de $\mathfrak{X}$.

Remarque. — La formule précédente (19) $\varphi^* \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \varphi^*$ peut être considérée — en cohomologie mod 2 — comme un cas particulier de (22); il suffit de supposer que l'espace Y est une k-boule ouverte b^k dont on prend la cohomologie à supports compacts.

II. — Les classes généralisées W^i.

Ces généralités étant terminées, revenons maintenant à l'espace fibré E en sphères S^{k-1} sur la base B tel qu'il a été défini au chapitre I.

L'isomorphisme du théorème 1. 2 :

$$\varphi^* : \quad H^r_{\Phi_1}(B, F) \to H^{r+k}_{\Phi}(A', F \bigcirc T)$$

permet de définir dans la Φ_1 -cohomologie de la base B des opérateurs θ^i transformés des Sq^i : il suffit de poser

$$\varphi'^* \theta^i_{\Phi_1} = \mathrm{Sq}^i \varphi^*. \tag{23}$$

Ainsi Θ^i applique $H^r_{\Phi_1}(B, F)$ dans $H^{r+i}_{\Phi}(B, Z_2)$ pour i pair, dans $H^{r+i}(B, T)$ pour i impair. Ces opérateurs θ^i sont déterminés par la structure fibrée; en particulier, si la structure est triviale (A′ produit $B \times R^k$), la formule (19) montre que $\theta^i_{\Phi_1} = \mathrm{Sq}^i$.

Écrivons maintenant les suites exactes (9) ou (10) du chapitre I; d'après (16), la propriété (énoncée en 5°) de commutation des Sq^i avec les homomorphismes de la suite exacte se transpose pour les θ^i en

$$\psi \mathrm{Sq}^i = \theta^i \psi, \qquad \mu \theta^i = \mathrm{Sq}^i \mu; \tag{24}$$

formules qui sont utiles pour déterminer les carrés de Steenrod dans l'espace E connaissant les carrés de Steenrod de la base.

Supposons qu'on ait pris dans B paracompact la famille $\mathfrak{F}$ de tous les fermés;

soit, comme toujours, ω la classe-unité de $H^0(B, Z)$; posons comme chapitre I :

$$U = \varphi^*(\omega), \tag{25}$$

où U est une classe de $H^i_\Phi(A', T)$.

On appellera *classes caractéristiques généralisées*, les classes W^i définies dans la $\mathcal{F}$-cohomologie de B par les formules

$$W^i = \theta^i_{\mathcal{F}}(\omega) \quad \text{ou} \quad \varphi^* W^i = \mathrm{Sq}^i U, \tag{26}$$

W^i pour i pair est une classe mod 2; pour i impair, c'est une classe tordue. Nous avons alors le théorème :

THÉORÈME II.2. — *Les homorphismes $\theta^i_{\Phi_1}$ sont entièrement déterminés (en coefficients* mod 2*) par les classes généralisées W^i et les carrés de Steenrod dans la Φ_1-cohomologie de la base.*

Soit x, en effet, une classe de Φ_1-cohomologie de B; on aura, par définition :

$$\varphi^* \theta^i x = \mathrm{Sq}^i \varphi^* x.$$

Or, d'après la formule (8) du chapitre I :

$$\varphi^* x = j x \cup U.$$

Par application de la formule (22) qui donne le Sq^i d'un cup-produit :

$$\varphi^* \theta^i_{\Phi_1} x = \mathrm{Sq}^i(j x \cup U) = \Sigma_s (^1)\ \mathrm{Sq}^{i-s} j x \cup \mathrm{Sq}^s U.$$

Comme j commute avec Sq^i :

$$\varphi^* \theta^i_{\Phi_1} x = \Sigma_s j \mathrm{Sq}^{i-s} x \cup \varphi^* W^s$$

et, par application inverse de (4') :

$$\theta^i_{\Phi_1} x = \Sigma_s \mathrm{Sq}^{i-s} x \cup W^s. \tag{27}$$

Il est clair que dans cette formule les W^s de degré impair sont, non pas des classes tordues, mais leurs images (mod 2).

L'appellation de classes *généralisées* est justifiée par le théorème suivant, qui constitue le résultat fondamental de ce travail :

THÉORÈME II.2. — *Si l'espace fibré* E *admet comme groupe de structure le groupe orthogonal, les classes caractéristiques généralisées W^i sont les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée.*

Avant de donner la démonstration de ce théorème, rappelons d'abord la définition et les principales propriétés des classes de Stiefel-Whitney.

---

(1) La lettre Σ placée en tête d'une formule indique une sommation par rapport à l'indice dont cette lettre est affectée.

III. — Les classes de Stiefel-Whitney.

A l'espace E, fibré par des sphères S^{k-1}, dont le groupe de structure est le groupe orthogonal, on associe une série d'espaces fibrés de même base B, dont la fibre est la variété de Stiefel V_r^k : V_r^k est la variété constituée par tous les systèmes de r vecteurs orthogonaux unitaires dans R^k. On sait [22] que le premier groupe d'homotopie (donc d'homologie) non nul de V_r^k est $\Pi_{k-r}(V_r^k)$; c'est un groupe cyclique libre pour $k-r$ pair ou $r=1$, groupe cyclique d'ordre 2 pour $k-r$ pair avec $r>1$; considéré dans chaque fibre au-dessus de B, ce groupe $\Pi_{k-r}(V_r^k)$ est le groupe-fibre d'un faisceau localement simple G (ceci à cause de l'hypothèse de trivialité locale). G est isomorphe au faisceau simple Z_2 pour $k-r$ impair et $r>1$; pour $k-r$ pair ou $r=1$, G n'est autre que le faisceau d'entiers tordus T.

Soit, dans la cohomologie $H^{k-r}(V_r^k, \Pi_{k-r}(V_r^k))$, Z la classe fondamentale; puisque la cohomologie de V_r^k est nulle pour les dimensions inférieures à $k-r$, l'opération de transgression fait correspondre à Z une classe $c^{k-r+1} \in H^{k-r+1}(B)$ [16], univoquement déterminée; c'est cette classe qu'on appelle par définition la $(k-r+1)^{\text{ième}}$ classe caractéristique de Stiefel-Whitney : on voit que c'est une classe mod 2 pour les dimensions paires et une classe tordue pour les dimensions impaires (ceci tout au moins si l'on exclut la classe de dimension maximum k, qui est toujours une classe tordue, mais dont on considérera seulement l'image mod 2 pour les dimensions paires).

Ceci est la définition récente des classes de Stiefel-Whitney; nous utiliserons toutefois la définition plus ancienne des classes de Stiefel-Whitney comme classes-obstruction; cette définition suppose essentiellement la base *triangulée*; mais comme nous le verrons plus loin, cela ne diminue en rien la généralité du résultat.

« Ancienne » définition des classes de Stiefel-Whitney. — Dans B supposé triangulé, soit K^r le r-squelette; sur K^r, il est toujours possible de construire un champ de $(k-r)$ vecteurs unitaires et orthogonaux; si l'on veut prolonger ce champ à K^{r+1}, on est amené à définir un cocycle-obstruction c^{r+1}, comme suit : sur le bord $\delta\sigma$ d'une $(r+1)$-cellule σ de K^{r+1}, le champ donné des $(k-r)$-vecteurs définit une application g de la r-sphère $\delta\sigma$ dans la variété de Stiefel V_{k-r}^k; l'élément de $\Pi_r(V_{k-r}^k)$ défini par g est par définition la valeur du cocycle c^{r+1} sur la cellule σ. On montre alors que la classe de cohomologie du cocycle c^{r+1} ne dépend pas du champ donné sur K^r : c'est par définition la classe de Stiefel-Whitney c^{r+1} de dimension $r+1$ pour la structure sphérique E.

On a vu que pour i pair, c^i est une classe (mod 2); pour i impair, c^i est une classe entière tordue; lorsque l'espace fibré E est *orientable*, Whitney a montré

que c^{2i+1} provenait de c^{2i} par

$$c^{2i+1} = \frac{1}{2}\delta\omega c^{2i}, \tag{28}$$

c'est-à-dire par l'homomorphisme de Bockstein pour $p = 2$ (*cf.* [25]). Revenons maintenant à la démonstration du théorème II.2, dans les hypothèses précédentes : B est un complexe, qu'on supposera seulement *paracompact* et localement fini; la cohomologie de B est alors isomorphe, comme il est bien connu, à la cohomologie du complexe B formée à partir des cochaînes infinies. Soit, dans l'espace A′, D'^{r+k} l'image réciproque du squelette K^r : la subdivision cellulaire de B donne ainsi naissance à une subdivision de A′; cette subdivision ne peut être, comme on l'a vu au chapitre I, considérée comme une triangulation; elle en aura toutefois toutes propriétés si l'on prend dans A′, D'^{r+k}, ..., la (Φ')-cohomologie des fermés de A *contenus* dans A′; en particulier, la (Φ')-cohomologie de A′ s'identifie à la cohomologie du complexe formé par la subdivision des D'^{r+k}, cette cohomologie étant formée à partir des cochaînes infinies.

Cela étant, l'injection de K^r dans B induit un homomorphisme $j_r^* : H^i(B) \to H^i(K^r)$ qui est biunivoque pour toute dimension $i \leqq r$; de même, l'injection $h : D'^{r+k} \to A'$ définit une application $h^* : H^j_\Phi(A') \to H^j_\Phi(D'^{r+k})$ biunivoque pour tout $j \leqq r+k$, et, dans le diagramme :

$$\begin{cases} H^{i+k}(A') \xrightarrow{h^*} H^{i+k}(D'^{r+k}) \\ \varphi^* \uparrow \qquad\qquad \uparrow \varphi_r \\ H^i\ (B) \xrightarrow{j_r^*} H^i\ (K^r) \end{cases} \tag{29}$$

il y a commutativité (propriété 2° du paragraphe III, chap. I). De plus, la structure fibrée de D'^{r+k} est induite de celle de A′ par l'injection j_r; donc la classe de Stiefel-Whitney c'^r_r de D'^{r+k} est l'image par j_r de la classe c^r de A′.

Soit sur le squelette K^r de B, F un champ de $(k-r)$ vecteurs unitaires et orthogonaux; soit dans la fibre R^k de A′, b^k la r-boule ouverte orthogonale à F; b^r définit un espace fibré D'^r, sous-espace fibré de D'^{r+k}; on vérifie les propriétés suivantes :

1° la classe de Stiefel-Whitney $c'^r_r = c^r(D'^{r+k})$ n'est autre que la classe $c'^r(D'^r)$; si, en effet, on s'est donné sur K^{r-1} un champ de $k-r+1$ vecteurs de la forme F + V, le cocycle obstruction défini pour D'^r par le champ de vecteurs V prend sur toute r-cellule de K^r la même valeur que le cocycle-obstruction défini pour D'^{r+k} par le champ F + V, sous la seule condition de réduire mod 2 cette valeur pour r pair; donc,

$$\begin{cases} c'^r = c'^r_r & \text{pour } r \text{ impair,} \\ c'^r \pmod 2 = c'^r_r & \text{pour } r \text{ pair.} \end{cases} \tag{30}$$

2° Désignons par φ_k et φ_r les isomorphismes φ^* relatifs aux espaces fibrés D'^{r+k}, D'^r; par ailleurs D'^{r+k} est fibré sur la base D'^r; on désignera par φ_r^k l'iso-

morphisme φ^* relatif à cet espace fibré relatif D^{r+k}/D'^r. On voit sans difficulté, en écrivant ces isomorphismes φ^* sous forme multiplicative, qu'on a la relation de transitivité

$$\varphi_k = \varphi_r^k \circ \varphi_r.$$

3° L'espace fibré relatif D^{r+k}/D'^r est trivial; en effet $D^{r+k} = D'^r \times b^{k-r}$, b^{k-r} désignant l'élément linéaire $R^{(k-r)}$ de la fibre R^k de A' engendré par le champ F. Il en résulte qu'on aura (19) :

$$\varphi_r^k \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \varphi_r^k. \tag{31}$$

Posons $U_r = \varphi_r(\omega)$; on aura, d'après le théorème I.6 et la formule (14) :

$$-\varphi_r^* c'^r = \varphi^* W^r = U_r \cup U_r,$$

où c'^r désigne la classe de Stiefel-Whitney de dimension maximum de l'espace D'^r; or, pour r impair c'^r est égale à son opposée; pour r pair, on devra, d'après (30), réduire c'^r mod 2; donc, appliquant (φ_r^k) à

$$\varphi_r c'^r = \mathrm{Sq}^r U_r$$

il vient dans D^{r+k} :

$$\varphi_k c_r^r = \mathrm{Sq}^r \varphi_r^k U_r = \mathrm{Sq}^r \varphi^k(\omega)$$

ou en posant $U_r^k = \varphi_k(\omega)$:

$$\varphi^k c_r^r = \mathrm{Sq}^r U_r^k.$$

En utilisant la commutativité du diagramme (29) et la biunivocité de j_r^*, on obtient, dans A' :

$$\varphi^* c^r = \mathrm{Sq}^r U, \tag{32}$$

ce qui entraîne bien :

$$c^r = W^r. \tag{33}$$

Le théorème II.2 est ainsi démontré dans le cas où la base B est triangulée; s'il n'en est pas ainsi, on se ramènera au cas précédent comme suit : La structure fibrée sphérique E admet par hypothèse le groupe orthogonal pour groupe de structure; par suite, c'est la structure induite par une classe d'applications convenable de la base B dans la grassmannienne réelle, base de la structure universelle. Or cette grassmannienne est un complexe fini, et la formule (32) vaut par suite pour la structure universelle; à cause de la propriété 4° des Sq^i, la même formule vaudra dans la structure induite, sans hypothèse de triangulation pour la base.

Remarque. — La formule (32) rend bien compte de l'analogie formelle entre classes de Stiefel-Whitney et carrés de Steenrod; pour r pair, c^r et Sq^r ne sont définies que mod 2; pour r impair c^r et Sq^r sont des classes entières d'ordre 2.

IV. — Applications du théorème fondamental II.2.

1. La formule (28) de Whitney est à rattacher au théorème 12.2 de Steenrod dans [18], qui exprime que Sq^{2r+1} provient de Sq^{2r} par l'homomorphisme de Bockstnein pour $p=2$. H. Cartan a établi dans [1] la formule

$$Sq^1 Sq^r = (1+r)\,Sq^{1+r}.$$

Appliquons-la à la classe U; il vient

$$Sq^1 \varphi^* W^r = (1+r)\,\varphi^* W^{1+r},$$

soit, en introduisant les θ^i :

$$\varphi^* \theta^1 W^r = (1+r)\,\varphi^* W^{1+r}. \tag{34}$$

Développant par la formule (27), reste

$$Sq^1 W^r = W^1 W^r + (1+r)\,W^{1+r}. \tag{35}$$

Si l'espace E est orientable, $W^1 = 0$, et l'on retouve la formule (28) en remarquant, comme dans [1], que Sq^1 est l'homomorphisme de Bockstein pour $p=2$, réduit mod 2.

Wu Wen-Tsün, dans [28], a établi pour les classes de Stiefel-Whitney des formules analogues à (35), donnant $Sq^i c^r$; mais ces formules sont établies à partir de la cohomologie de la grassmannienne, et supposent par suite que le groupe orthogonal est groupe de structure; on peut cependant penser qu'elles sont valables également pour les classes généralisées : elles semblent provenir en effet de relations entre Sq itérés de la forme

$$Sq^{2j} Sq^k = \sum \binom{k-i+j-1}{2j} Sq^{k+j+i} Sq^{i-j} \qquad (k > 2i > 0),$$

relations dont on a pu établir l'existence dans quelques cas (1).

Dans un cas particulier toutefois, on peut donner une formule analogue pour la classe fondamentale :

La relation $Sq^j U = \varphi^* W^j = j\,W^j \cup U$, donne, par application de l'homomorphisme β de la suite exacte (9) :

$$Sq^i W^k = W^i W^k, \tag{36}$$

W^k désignant la classe fondamentale de la structure fibrée.

---

(1) D'après une communication de M. Wu Wen-Tsün, ces formules sont applicables à toute classe de cohomologie admettant une réalisation de la forme de $U = \varphi^*(\omega)$, où φ^* est l'isomorphisme associé à un espace fibré sphérique dont le groupe de structure est le groupe orthogonal. Des formules analogues ont été démontrées (en toute généralité), par J. Adem (résultat non publié).

Corollaire II.3. — *Pour qu'une classe* W^k *puisse être la classe caractéristique fondamentale d'une structure fibrée sphérique de dimension* $k-1$ (*sans groupe de structure précisé*), *il faut que les carrés de Steenrod* $Sq^r W^k$ *de cette classe appartienne à l'idéal engendré par* W^k *dans l'anneau de cohomologie de* B. *Les classes* W^i *vérifient alors* (36).

Corollaire. — *Si aucune classe de dimension strictement inférieure à k n'est annulée dans le produit par* W^k [*ce qui veut dire que* p^* *applique* $H^r(B)$ *sur* $H^r(E)$ *pour* $r<k$], *alors les classes de Stiefel-Whitney sont entièrement déterminées par la classe fondamentale* W^k.

2. Les carrés de Steenrod dans l'espace fibré E. — Il est fréquent que des espaces fibrés en sphères, non isomorphes, ont cependant des anneaux de cohomologie isomorphes; on peut alors, parfois, montrer que cet isomorphisme ne s'étend pas aux carrés de Steenrod, et qu'ainsi ces espaces ne sont pas homéomorphes. Exemples :

Sur la sphère S^2 comme base, les espaces de fibre S^k ($k>2$) dont le groupe de structure est le groupe orthogonal $SO(k+1)$ sont définis à un isomorphisme près par un élément du groupe $\Pi_1(SO(k+1))$; on sait qu'un tel groupe est isomorphe à Z_2; à l'élément nul de Z_2 correspond le produit topologique $S^2\times S^k$; à l'élément non nul correspond un espace non trivial E; comme E admet une section, et que la fibre est (pour tout corps de coefficients) totalement non homologue à zéro, l'anneau de cohomologie de E est additivement isomorphe à celui du produit $S^2\times S^k$ et cet isomorphisme s'étend à la structure multiplicative définie par le cup-produit; désignons par s^2 et s^k les générateurs de cet anneau sur le corps Z^2 ($\alpha s^k = U$); comme dans E la classe W^2 n'est pas nulle, et que $Sq^2 s^k = Sq^2 U = \varphi^* W^2 \neq 0$, on voit, d'après la propriété 5°, § I, que $Sq^2 s^k = s^2 \otimes s^k$, classe fondamentale de E; or dans le produit $S^2\times S^k$ on a évidemment $Sq^2(\omega\otimes s^k)=0$. Or tout isomorphisme de l'anneau $H^*(E)$ sur $H^*(S^2\times S^k)$ conserve pour des raisons de degré les classes $s^2\times\omega$ et $\omega\times s^k$; donc E et $S^2\times S^k$ ne peuvent être homéomorphes.

De la même façon, on peut affirmer que les espaces de base S^4, de fibre S^k ($k>4$), ne sont homéomorphes que si la classe W^4 prend la même valeur (mod 2) pour ces espaces; ceci donne une réponse partielle à une question posée par Hsien-Chung Wang [24].

3. Démonstration d'un théorème de Whitney. — Soient deux espaces fibrés A'_1, A'_2, de bases paracompactes B_1, B_2 de fibres R^{k_1}, R^{k_2} resp. On supposera de plus que le produit $B_1\times B_2$ est paracompact. Munissons A'_1, A'_2 des familles Φ_1, Φ_2 qui correspondent à la famille $\mathcal{F}$ des fermés pour les bases B_1, B_2. Si φ_1^*, φ_2^* désignent les isomorphismes pour A'_1, A'_2 et ω_1, ω_2 les classes-unités de $H^0(B_1)$, $H^0(B_2)$ resp., on posera

$$U_1=\varphi_1^*(\omega_1),\qquad U_2=\varphi_2^*(\omega_2).$$

Formons le produit $A'_1 \times A'_2$: il est fibré sur $B_1 \times B_2$; munissons l'espace paracompact $B_1 \times B_2$ de la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés; il existe alors, d'après le n° 7, un homomorphisme (en cohomologie mod 2) :

$$\mu_1 : \quad H^p_{\mathcal{F}}(B_1) \otimes H^q_{\mathcal{F}}(B_2) \to H^{p+q}_{\mathcal{F}}(B_1 \times B_2)$$

et la classe-unité $\omega \in H^0(B_1 \times B_2)$ est donnée par

$$\omega = \mu_1[\omega_1 \otimes \omega_2].$$

Soit Φ la famille de $A'_1 \times A'_2$ qui correspond à la famille $\mathcal{F}$ de la base $B_1 \times B_2$ et soit $\varphi^* : H^i(B_1 \times B_2) \to H^{i+k_1+k_2}(A'_1 \times A'_2)$ l'isomorphisme associé. Il existe alors un homomorphisme [défini comme en (20)] :

$$\mu : \quad H^{p+k_1}_{\Phi_1}(A'_1) \otimes H^{q+k_2}_{\Phi_2}(A'_2) \to H^{p+q+k_1+k_2}_{\Phi}(A'_1 \times A'_2),$$

qui satisfait à la relation de commutativité :

$$\mu[\varphi_1^*(x) \otimes \varphi_2^*(y)] = \varphi^*[\mu_1(x \otimes y)]. \tag{37}$$

Pour établir (37), il suffit de montrer que, si U désigne la classe $\varphi^*(\omega)$, on a

$$U = \mu(U_1 \otimes U_2). \tag{38}$$

En effet, en écrivant les isomorphismes φ^* sous la forme multiplicative (7) on déduira (38) de (37).

Or la classe $\mu(U_1 \otimes U_2)$ prend sur le cocycle-fibre $R^{k_1+k_2}$ la valeur 1, comme U. Puisque l'homomorphisme $\lambda : H^{k_1+k_2}_{\Phi}(A'_1 \times A'_2) \to H^{k_1+k_2}_{\mathcal{K}}(R^{k_1+k_2})$ est biunivoque [*cf.* diagramme (11)], c'est que $U = \mu[U_1 \otimes U_2]$.

Soient maintenant W'_1, W'_2 et W^i les classes généralisées de A'_1, A'_2 et $A'_1 \times A'_2$ resp. Les classes W^i sont définies par

$$\varphi^* W^i = \mathrm{Sq}^i U = \mathrm{Sq}^i \mu(U_1 \otimes U_2)$$

ou d'après (21) :

$$\varphi^* W^i = \mu(\Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} U_1 \otimes \mathrm{Sq}^j U_2) = \mu(\Sigma_j \varphi_1^* W_1^{i-j} \otimes \varphi_2^* W_2^j)$$

ou d'après (37) :

$$W^i = \mu_1(\Sigma_j W_1^{i-j} \otimes W_2^j). \tag{39}$$

Si l'on suppose que $B_1 = B_2$, l'image inverse dans $A'_1 \times A'_2$ de la diagonale B dans $B \times B$ constitue un espace fibré de fibre $R^{k_1-k_2}$, l'*espace-joint* des deux espaces fibrés A'_1, A'_2 donnés sur B. Les classes W^i de cet espace-joint sont alors données par la formule (*cf.* 22) :

$$W^i = \Sigma_j W_1^{i-j} \cup W_2^j. \tag{40}$$

CHAPITRE III.

I. — Généralités sur les voisinages d'un sous-ensemble fermé.

1. Soit Y un sous-espace fermé d'un espace E; l'ensemble des voisinages de Y dans E, muni de la relation d'ordre définie par l'inclusion, constitue un ensemble filtrant décroissant qu'on désignera par $\mathcal{V}_Y^E$. L'espace E étant supposé *normal* au voisinage de Y, les voisinages ouverts U constituent dans l'ensemble $\mathcal{V}_Y^E$ un système fondamental; il en va de même pour les voisinages fermés. Dans ce qui suit, on considérera seulement les voisinages *ouverts*.

A tout voisinage ouvert $U \in \mathcal{V}_Y^E$ attachons son groupe d'homologie singulière finie $H_p(U)$; si $U' \subset U$, il existe un homomorphisme canonique $(f_{UU'})_* : H_p(U') \to H_p(U)$; ces homomorphismes satisfont aux conditions classiques de transitivité et permettent par suite de définir le groupe $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$ limite projective des $H_p(U)$ suivant l'ensemble $\mathcal{V}_Y^E$. L'injection $j : Y \to U$ définit un homomorphisme $(j_{UY})_* : H_p(Y) \to H_p(U)$. donc aussi un homorphisme canonique : $j_* : H_p(Y) \to H_p(\mathcal{V}_Y^E)$. Si h_u désigne l'homomorphisme canonique $H_p(\mathcal{V}_Y^E) \to H_p(U)$, on a $h_u \circ j_* = (j_{UY})_*$. On se propose de donner des conditions suffisantes pour que l'homomorphisme j_* soit un isomorphisme de $H_p(Y)$ sur $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

2. Théorème III.1. — *Si les conditions suivantes sont satisfaites* :

1° Y, *sous-espace fermé de* E, *est rétracte de l'un de ses voisinages* U_0 *dans* E : *il existe une application* $r : U_0 \to Y$, *telle que* $r(x) = x$ *pour tout point* $x \in Y$.

2° *Pour chaque voisinage ouvert* U *de* Y, *contenu dans* U_0, *il existe un voisinage ouvert* U' *de* Y *contenu dans* U *tel que la restriction à* U' *de la rétraction r soit, dans* U, *homotope à l'identité* mod Y : *autrement dit : il existe une application* $F : U' \times I \to U$, *telle que* $F : U' \times \{0\} = r$, *et* $F : U' \times \{1\} =$ *application identique, avec* $F(x, t) = x$ *pour tout* $x \in Y$, *et tout* $t \in I$.

Alors l'homomorphisme j_* *est un isomorphisme de* $H_p(Y)$ *sur* $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

Démonstration. — Puisque le produit $r_* \circ (j_{UY})_*$ est l'identité, $(j_{UY})_*$ est biunivoque, donc aussi l'homomorphisme $j_* : H_p(Y) \to H_p(\mathcal{V}_Y^E)$. Par ailleurs, soit x un élément de $H_p(\mathcal{V}_Y^E))$, $x_u = h_u(x)$ la classe correspondante dans $H_p(U)$; la condition 2° entraîne que l'image de l'homomorphisme $(f_{UU'})_*$ est contenue dans l'image de $(j_{UY})_*$ dans $H_p(U)$; comme $x_u = (f_{UU'})_*(x_{u'})$ il existe donc une classe $z \in H_p(Y)$ telle que $x_u = (j_{UY})_*(z)$; cette classe z ne dépend pas de l'ouvert U considéré; si pour un autre ouvert $U_1(U)$ on avait trouvé une classe $z_1 \in H_p(Y)$ telle que $x_{u_1} = (j_{U_1Y})_*(z_1)$, on aurait

$$(f_{UU_1})_*(j_{U_1Y})_*(z_1) = (j_{UY})_*(z_1) = x_u = (j_{UY})_*(z),$$

et, puisque $(j_{UY})_*$ est biunivoque, $z = z_1$. Donc $x \in H_p(\mathcal{V}_Y^E)$ est l'image par $(j_{UY})_*$ de la classe z : j_* est un isomorphisme de $H_p(Y)$ sur $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

3. Une définition. — On considérera par la suite les espaces E jouissant de la propriété suivante : il existe un voisinage V de la diagonale Δ dans $E \times E$ et une application $f(x, y; t)$, continue dans $V \times I$, à valeurs dans E, telle que

$$f(x, y; 0) = x, \qquad f(x, y; 1) = y, \qquad f(x, x; t) = x \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

Dans sa thèse, J. P. Serre a considéré ces espaces auxquels il a donné la dénomination d'espaces U. L. C. (1). On peut en donner la définition suivante :

Est U. L. C. tout espace E dont la diagonale admet dans $E \times E$ un voisinage dont elle est un rétracte par déformation dans $E \times E$. De nombreux espaces sont U. L. C., en particulier :

Lemme III.2. — *Tout rétracte absolu de voisinage* (A. N. R.) *séparable, de dimension finie est un* U. L. C.

Soit E un A. N. R. séparable de dimension finie; s'il n'est pas déjà compact, rendons-le compact par l'adjonction d'« un point à l'infini » a; en vertu des théorèmes classiques d'immersion, le compact obtenu $E \cup a$ peut être plongé dans un espace euclidien R^m de dimension m assez grande, donc aussi dans la sphère S^m dont ce sera un sous-ensemble fermé; par suite, E sera un sous-ensemble fermé de $S^m - a$, donc de R^m, en tant que A. N. R., E admettra dans R^m un voisinage U dont il sera rétracte, dans la rétraction $r : U \to E$. Soient x, y deux points de E assez voisins pour que le segment rectiligne $\overline{xy}$ soit tout entier dans U, on posera

$$f(x, y; t) = r(x_t),$$

x_t désignant le point qui partage le segment $\overline{xy}$ dans le rapport t.

Remarque. — Bien d'autres espaces que les A. N. R. sont U. L. C. Par exemple : si E est un U. L. C., l'espace L des applications continues d'un compact K dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme, est encore un U. L. C.

Avec cette notion, les hypothèses du théorème III.1 peuvent être remplacées par celles que voici, plus facilement utilisables :

Théorème III.3. — *Si* V *est un rétracte absolu de voisinage et si* E *est un* U.L.C. *alors l'homomorphisme* j_* *est un isomorphisme* $H_p(Y)$ *sur la limite projective* $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

En effet, Y, étant un A. N. R., admet dans E un voisinage ouvert U_0 dont il

(1) [16]. Ces espaces ont été également considérés, dans des conditions légèrement différentes, par R. Fox dans [7].

est rétracte par la rétraction r : la condition 1° du théorème III.1 est donc vérifiée; il en va de même pour la condition 2°; pour tout voisinage $U \subset U_0$, soit U' l'ensemble des points $x \in U$ tels que :

$$f(x, r(x); t) \subset U \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

Cet ensemble U' n'est pas vide, car il contient Y; de plus c'est un ouvert, car s'il contient un point $x \in U$, il contient aussi tout point de U assez voisin (à cause de la compacité du segment I). L'application $f : U' \times I \to U$ définit bien une homotopie mod Y reliant r à l'identité; la condition 2° est ainsi vérifiée.

4. Généralisation a l'homologie des chaines infinies. — Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème III.1, et supposons de plus : Y *paracompact* et E *localement compact*. Soit r une rétraction sur Y d'un voisinage U_0 de Y dans E; on va montrer que Y possède dans E un voisinage fermé *paracompact* $A \subset U_0$, tel que la restriction de r à A soit *propre* [1]. A tout point $x \in Y$ associons un voisinage compact $V(x)$ de x dans Y. Dans E localement compact, $U(x)$ possède un voisinage compact qu'on peut supposer contenu dans U_0; soit $W(x)$ l'intersection de ce voisinage avec $r^{-1}(U(x))$; $W(x)$ est compact, et c'est un voisinage pour tout point intérieur à $V(x)$. Puisque Y est supposé paracompact, il existe un recouvrement localement fini de Y avec les intérieurs d'ensembles $V(x_i)$. Soit A la réunion des $W(x_i)$ correspondants. A est un voisinage de Y, car tout point de Y est intérieur à un $V(x_i)$, donc à un $W(x_i)$ correspondant; A est paracompact, car les intérieurs des $W(x_i)$ constituent pour A un recouvrement localement fini.

Soit K un compact de F; K ne rencontre qu'un nombre fini de $V(x_i)$; donc $r^{-1}(K) \cap A$ ne rencontre qu'un nombre fini de $W(x_i)$; contenu dans leur réunion, qui est compacte, c'est donc un compact.

Désignons par (Φ_U) la famille constituée par les fermés de E contenus dans U; formons pour chaque voisinage U son groupe de Φ_U-homologie $H_p^{\Phi_U}(U)$; si $U' \subset U$, on a encore des homomorphismes $(f_{UU'})_* : H_p^{\Phi_{U'}}(U') \to H_p^{\Phi_U}(U)$, satisfaisant aux conditions classiques de transitivité qui permettent de définir la limite projective $H_p^{\Phi}(\mathcal{V}_Y^E)$. Si l'on suppose U assez petit pour être contenu dans A, la rétraction r satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 2 (§ V) de l'Introduction; elle induit par suite un homomorphisme $(r_{XU})_* : H_p^{\Phi_U}(U) \to H_p^{\mathcal{F}}(Y)$, tel que $(r_{XU})_* \circ (j_{UY})_* =$ identité; donc, ici comme au théorème III.1, $(j_{UY})_*$, et par suite $j_* : H_p^{\mathcal{F}}(Y) \to H_p^{(\Phi)}(\mathcal{V}_Y^E)$ est biunivoque. Supposons de plus que E soit U. L. C.; alors, dans U, on pourra trouver $U' \subset U$ tel que la rétraction r soit homotope (mod Y) à l'identité dans U; ceci veut dire qu'il existe une application G de produit $U' \times I$ dans U, telle que $G(U' \times \{0\}) = r$ et $G(U' \times \{1\}) =$ identité; l'espace $U' \times I$ étant muni de la famille (Φ_1) de tous les fermés dont la

[1] *Voir*, pour la définition d'une application *propre*, Introduction (§ V, n° 3).

projection canonique $p : U' \times I$ sur U' appartient à (Φ), la Φ_1-homologie de $U' \times I$ est isomorphe à la Φ-homologie de U'; l'application G satisfait également (pour la famille Φ_1) aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 2, de l'Introduction; en effet :

1° si φ est un fermé de E contenu dans U', l'image $G(\varphi \times I)$ est un fermé de E contenu dans U;

2° on peut supposer que U a été pris assez petit pour que $G(U' \cap W(x_i) \times I)$ soit tout entier contenu dans $\cup W(x_j)$, où les $W(x_j)$ sont les ensembles, en nombre fini, du recouvrement (W) qui rencontrent $W(x_i)$; par suite, si K est un compact de U, l'image $p(G^{-1}(K))$ est tout entière contenue dans la réunion :

1° Des $W(x_j)$ (en nombre fini) qui rencontrent K;

2° des $W(x_k)$, toujours en nombre fini, qui rencontrent les $W(x_i)$. Elle est par suite compacte, et la condition n° 3 de l'Introduction (§ V, n° 2) est vérifiée. Comme au théorème III.1 on en conclura que l'image de $(f_{UU'})_*$ est contenue dans l'image de $(j_{UY})_*$ et le même raisonnement conduira à :

THÉORÈME III.4. — *Si* Y *est un espace paracompact rétracte absolu de voisinage plongé comme sous-ensemble fermé dans un espace* E, localement compact, *et* U. L. C., *alors l'homomorphisme d'injection j est un isomorphisme de l'homologie* $H_r^{\mathcal{F}}(Y)$ *sur la limite projective* $H_r^{\Phi}(\mathfrak{V}_Y^E)$, (Φ) *désignant la famille de tous les fermés (paracompacts) de* E.

II. — Cas des variétés plongées.

Dans tout ce qui suit on ne considérera que des variétés séparables (donc paracompactes), c'est-à-dire ne comportant qu'une infinité au plus dénombrable de composantes connexes; une telle variété est un espace métrisable localement contractile, c'est donc, en vertu d'un théorème de Liao [14], un rétracte absolu de voisinage, et d'après le lemme III.2, un U. L. C.

I. DÉFINITION. — On dira qu'une variété V de dimension p est plongée dans une variété M de dimension $n (n > p)$, si l'on s'est donné une application *biunivoque* f de V dans M telle que l'image $f(V)$ soit un sous-ensemble *fermé* de M.

Sous les hypothèses faites plus haut sur V et M, les hypothèses des théorèmes III.3 et III.4 sont satisfaites. Il existera donc des isomorphismes

$$j_* : \quad H_r^{\mathcal{C}} V \to H_r^{\mathcal{C}}(\mathfrak{V}_V^M), \qquad j_* : \quad H_r^{\mathcal{F}}(V) \to H_r^{\Phi}(\mathfrak{V}_V^M)$$

entre l'homologie de la variété plongée et la limite projective des homologies des voisinages.

2. Les coefficients dans la limite projective. — Soit F un faisceau localement simple sur le sous-ensemble fermé paracompact Y de E; un tel faisceau peut être prolongé sur un voisinage assez petit de Y dans E. Par suite, on peut définir les groupes $H_p(U, F)$ pour tout voisinage U assez petit, et par suite le groupe $H_p(\mathcal{V}_Y^E, F)$ peut être défini : il y a donc isomorphisme entre faisceaux de coefficients sur Y, et ceux qu'on peut définir pour la limite projective.

Considérons pour tout voisinage ouvert U de V dans M, le groupe de cohomologie à supports compacts $H_{\mathcal{K}}^r(U, F)$; un tel groupe est isomorphe, puisque U est une variété de dimension n au groupe d'homologie finie $H_{n-r}^{\mathcal{K}}(U, F \bigcirc T)$, où T désigne le faisceau d'entiers tordus liés à l'orientation locale de U; les homomorphismes $(f_{UU'})$ définis tant pour l'homologie que pour la cohomologie, commutent avec cet isomorphisme (Introduction, § V, n° 5); cet isomorphisme s'étend par suite aux limites projectives, et l'on peut affirmer :

Théorème III.5. — *La limite projective* $H_{\mathcal{K}}^r(\mathcal{V}_V^M, F)$ *des cohomologies à supports compacts des voisinages ouverts* U *de* V *dans* M *est canoniquement isomorphe à la limite projective* $H_{n-r}^{\mathcal{K}}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T)$, *donc d'après* III.3, *à* $H_{n-r}^k(V, F \bigcirc T_V)$ *où* T_V *désigne le faisceau d'entiers tordus induit par* T *sur la sous-variété* V.

Désignons par T_1 le faisceau d'entiers tordu attaché à l'orientation locale de V; l'isomorphisme de dualité $H_r^{\mathcal{K}}(V, F) \simeq H_{\mathcal{K}}^{n-r}(V, F \bigcirc T_1)$, permet de définir un homomorphisme réciproque $\bar{\psi}_V : H_{\mathcal{K}}^{n-r}(V, F) \to H_{\mathcal{K}}^{n-r}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T \bigcirc T_1)$ qui, d'après III.3, est un isomorphisme de $H_{\mathcal{K}}^{n-r}(V, F)$ sur $H_{\mathcal{K}}^{n-r}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T \bigcirc T_1)$.

De même le théorème III.4 permet d'identifier l'homologie $H_r^{\mathcal{F}}(V, F)$ à la limite projective $H_{\Phi}^{n-r}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T)$ où désigne Φ_U la famille des *fermés* de E contenus dans le voisinage ouvert U; on définira de même un *isomorphisme réciproque* $\bar{\psi}_{\mathcal{F}}$ de $H_{\mathcal{F}}^{n-r}(V, F)$ sur $H_{\Phi}^{n-r}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T \bigcirc T_1)$. Si V est compacte, il est clair que les isomorphismes $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}_{\mathcal{F}}$ coïncident.

Définition des classes normales généralisées W^i. — Soit ω la classe-unité de $H_{\mathcal{F}}^0(V; Z)$; posons

$$u = \bar{\psi}_{\mathcal{F}}(\omega), \qquad u \in H_{\Phi}^{n-p}(\mathcal{V}_V^M, T \bigcirc T_1). \tag{41}$$

On a vu que les carrés de Steenrod Sq^i commutent avec les homomorphismes $f_{UU'}^*$ associés à l'ensemble filtrant $\mathcal{V}_V^M$; par suite, on peut définir les opérations Sq^i dans la limite projective (éventuellement inductive) des cohomologies des ouverts U. Définissons des classes W^i par la relation

$$\bar{\psi}_{\mathcal{F}} W^i = Sq^i u, \tag{42}$$

W^i est une classe de $H^i(V, T \bigcirc T_1)$ pour i impair, de $H^i(V, Z_2)$ pour i pair; en effet, pour i impair $Sq^i u \in H^{n-p+i}(\mathcal{V}_V^M, Z)$, et pour i pair $Sq^i u \in H^{n-p+i}(\mathcal{V}_V^M, Z_2)$.

Remarque. — Si M' est une sous-variété ouverte de M contenant V, les classes W^i relatives au plongement $V \to M'$ sont évidemment les mêmes que celles

relatives au plongement $V \to M$; les classes W^i apparaissent ainsi comme des *invariants d'immersion locale* de la variété V. Il est à noter que ces classes peuvent être définies pour toute immersion topologique de V dans M, donc pour les immersions qui (telles que la sphère « cornue » d'Alexander, les « wild knots », etc.) sont habituellement considérées comme tératologiques; nous verrons tout à l'heure que les classes W^i (en cohomologie mod 2) sont en fait des invariants du type d'homologie mod 2 de l'application $f: V \to M$. L'appellation « classes normales généralisées » est justifiée par le théorème qui suit dans le cas d'un plongement différentiable.

3. Cas des variétés différentiablement plongées. — Supposons la variété ambiante M munie d'une structure différentiable de classe C^r; on dira que la variété plongée V est q-fois différentiablement plongée ($q < r$), si au voisinage de tout point $x \in f(V)$, il existe une carte de la structure q-fois différentiable de M (induite par la structure donnée de classe C^r), telle que l'image d'un voisinage de x dans $f(V)$ soit un sous-espace vectoriel de dimension p.

Supposons que V, paracompacte, soit trois fois différentiablement plongée dans M, munissons M d'une métrique riemannienne de classe C^2, et formons dans le voisinage de V dans M les géodésiques normales à V; ces géodésiques normales définissent une *fibration* d'un voisinage U de V dans M, par des $(n-p)$-boules géodésiques normales; c'est dire que dans tout voisinage U de V dans M, il est possible de trouver un voisinage U' fibré en R^{n-p} par ces cellules normales, et dont le groupe de structure, en vertu des hypothèses de différentiabilité, est le groupe orthogonal : ceci exige seulement qu'on ait défini le « rayon » ρ du voisinage fibré en un point x de V comme fonction 2-fois différentiable de x : une telle fonction pourra être définie en utilisant le recouvrement localement fini $W(x_i)$ défini au théorème III.4 : sur chaque $W(x_i)$, on prend $\rho = \varepsilon_i$, assez petit, et l'on raccorde ensuite ces ρ à l'aide d'une partition de l'unité.

C'est dire que, dans le filtre $\mathcal{V}_V^M$ des voisinages ouverts, il en existe un *système fondamental* dont chacun présente cette structure fibrée.

Or, les classes de Stiefel-Whitney c^i d'un tel voisinage fibré (définies au chapitre II, § III) ne sont autres que les classes de Stiefel-Whitney de l'espace fibré des vecteurs normaux à V. Ceci va nous permettre de démontrer le

Théorème III.6. — *Si la variété paracompacte* V *est trois fois différentiablement plongée dans une variété* M, *les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs normaux à* V (*structure, comme il est bien connu, indépendante de la métrique*) *sont les* classes normales généralisées.

Soit U en effet, un voisinage fibré par les géodésiques normales; dans un tel voisinage, on a, en Φ-cohomologie :

$$\mathrm{Sq}^i u = \varphi^* c^i$$

et, comme $\varphi^* = \psi^*$ (théorème I.8) :

$$\mathrm{Sq}^i u = \psi^* c^i.$$

Cette relation, étant vérifiée dans tous les ouverts fibrés, donc dans un système fondamental de $\mathfrak{V}_V^M$, est vérifiée dans la limite projective :

$$\mathrm{Sq}^i u = \bar{\psi}_{\mathfrak{F}} c^i.$$

La comparaison avec (42) montre que

$$c^i = \mathrm{W}^i.$$

Corollaire III.7. — *Si une variété* V *est plongée (trois fois différentiablement) dans* M *suivant deux structures différentiables distinctes* S *et* S', *les classes de Stiefel-Whitney de l'espace fibré des vecteurs normaux pour ces deux structures sont les mêmes.*

En effet, la définition des W^i, purement topologique, ne fait intervenir aucune structure différentiable.

III. — Classes tangentes.

1. Une définition des classes caractéristiques de la structure tangente. — Soit V une variété différentiable, supposée dotée d'une métrique riemannienne; soit $V \times V$ le produit de V par elle-même, supposé doté de la métrique somme. La diagonale Δ est, dans $V \times V$ une variété plongée r-fois différentiablement, si la structure différentiable de V est de classe C^r; on peut dès lors, en un point (x, x) de Δ, considérer l'espace des vecteurs normaux à Δ, sous-espace linéaire de l'espace tangent à $V \times V$. Tout vecteur de cet espace est de la forme (T, —T), où T désigne un vecteur arbitraire tangent à V au point x. L'application $T \to (T, -T)$ définit par suite un *isomorphisme canonique* de l'espace des vecteurs tangents à V au point x sur l'espace des vecteurs normaux à (Δ) au point (x, x). Comme cet isomorphisme, qui est d'ailleurs indépendant de la métrique, est défini globalement, on voit que la structure de l'espace des vecteurs normaux à la diagonale est isomorphe à la structure fibrée tangente de V. Ceci justifie la définition :

2. Définition. — On appellera *classes caractéristiques tangentes* d'une variété connexe V les classes normales généralisées de la diagonale dans $V \times V$ (Notation $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$). Ces classes sont des classes mod 2 pour i pair; pour i impair, ce sont des classes définies en cohomologie tordue $\mathrm{H}^i(V, T)$: ce sont donc des classes entières si V est orientable. En effet, le voisinage de Δ dans $V \times V$ est

orientable, puisque son faisceau d'orientation locale est $T \bigcirc T = Z$; par suite l'isomorphisme $\bar{\psi}_{\mathcal{F}}^{*}$ qui définit W_T^i par

$$\bar{\psi}_{\mathcal{F}} W_T^i = Sq^i \bar{\psi}_{\mathcal{F}} \omega$$

applique $H^p(V, F)$ dans $H^{n+p}(\mathcal{V}_{\Delta}^{V\times V}, F \bigcirc T \bigcirc Z) \simeq H^{n+p}(\mathcal{V}_{\Delta}^{V\times V}, F \bigcirc T)$. Cette définition s'applique aux variétés non supposées différentiables, et, dans le cas différentiable, redonne les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée tangente, au moins si la structure est de classe C^r pour $r > 3$. En fait, cette condition n'est nullement restrictive : un théorème de Whitney [26] affirme en effet : si une variété est une fois différentiable, elle peut être munie d'une structure de classe $C^r (r > 1)$, telle que les structures fibrées tangentes soient isomorphes. Le corollaire III.7 donne ainsi :

Théorème III.8. — *Les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée tangente à une variété différentiable sont indépendantes de la structure différentiable.*

Dans le cas où V est *compacte*, les classes W_T^i (donc les c^i) peuvent être déterminées aisément : soit ψ^* l'homomorphisme réciproque attaché à l'injection diagonale f de V dans $V \times V$, $\Delta = \psi^*(\omega)$ la classe de cohomologie qui, par la « dualité » dans $V \times V$ correspond à l'image du cycle fondamental de la diagonale. Parmi les voisinages de la diagonale, prenons $V \times V$ lui-même; la formule (42) donnera

$$Sq^i \Delta = \psi^* W^i. \tag{43}$$

Cette formule détermine univoquement les classes W^i; soit p, en effet, la projection du produit $V \times V$ sur le premier facteur; puisque V est compacte, p induit un homomorphisme p_* de l'homologie $H_r(V \times V)$ dans $H_r(V)$; comme $p \circ f = \text{identité}$, on a aussi $p_* \circ f_* = \text{identité}$, ce qui montre que l'homomorphisme f_* induit par f est biunivoque; donc aussi l'homomorphisme réciproque ψ^*.

Remarque. — C'est un fait bien connu que la classe de Stiefel-Whitney de dimension maximum pour une variété compacte est donnée par la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété, c'est-à-dire par la self-intersection du cycle diagonale dans $V \times V$; la formule (43) généralise ce résultat aux classes de dimension inférieure par l'introduction des carrés de Steenrod.

3. Formules de Wu. — La détermination explicite des classes W^i en coeff. mod 2 à partir des invariants de cohomologie de la variété V compacte a été faite par Wu Wen-Tsün dans [27]; reproduisons ici l'essentiel de son calcul :

Soient, en cohomologie mod 2, X_α^p et X_α^{n-p} deux bases duales de $H^p(V)$ et $H^{n-p}(V)$; la classe Δ s'exprime alors par

$$\Delta = \Sigma_{p,\alpha} \; X_\alpha^p \otimes X_\alpha^{n-p}.$$

En substituant dans (43) et développant par la formule (21) du produit, on obtient, par identification sur le coefficient de $\omega \otimes X^n$, l'expression des W^i en fonction des X^j; pour éliminer ceux-ci, Wu Wen-Tsün introduit les classes U^k (qu'il appelle *classes canoniques*) définies par

$$U^k \cup y = Sq^k y \quad \text{pour tout } y \in H^{n-k}(V). \tag{44}$$

On obtient alors

$$W^i = \Sigma_j \; Sq^{i-j} U^j. \tag{45}$$

Ces formules permettent de retrouver par un calcul direct les résultats partiels antérieurement démontrés par Whitney et de leur donner toute leur généralité (*cf.* [25]).

IV. — Extension de la théorie de Whitney.

Soit K un sous-ensemble *fermé* d'une variété M qui satisfait aux conditions du théorème III.4 : K sera par exemple localement contractile; attachons dès lors à tout voisinage ouvert U de K son groupe $H^r_\Phi(U)$, où la famille Φ est, comme toujours la famille des fermés de M contenus dans U; $H^r_\Phi(U)$ est isomorphe à $H^\Phi_{n-p}(U)$ (pris par rapport au système associé); par suite, la limite projective des $H^p(U)$ soit $H^r_\Phi(\mathcal{V}^M_K)$ est isomorphe à $H^\Phi_{n-p}(\mathcal{V}^M_K)$, c'est-à-dire d'après III.4, à $H^{\bar{\varphi}}_{n-p}(K)$; soit χ^* cet isomorphisme de $H_r(K, F)$ sur $H^{n-r}(\mathcal{V}^M_K, F \bigcirc T)$.

1. Définition des homomorphismes $\mathfrak{S}^M_i(K)$. — Par l'isomorphisme inverse $\overset{-1}{\chi^*}$, les opérateurs Sq^i, qui augmentent le degré de i unités dans $H^m(\mathcal{V}^M_K)$, sont transformés en des opérateurs $\mathfrak{S}_i$, qui, dans l'homologie $H^{\bar{\varphi}}_r(K)$ diminuent la dimension de i unités. Par définition, on aura

$$Sq^i \chi^* = \chi^* \mathfrak{S}_i, \tag{46}$$

où $\mathfrak{S}_i$ applique $H_r(K, F)$ dans $H_r(K, Z_2)$ pour i pair, dans $H_r(K, F \bigcirc T)$ pour i impair, T désignant le faisceau induit sur K par le faisceau d'orientation locale de M.

Il est clair que ces homomorphismes $\mathfrak{S}_i$ dépendent de l'immersion de K dans M; nous allons, dans ce paragraphe, donner quelques propriétés de ces $\mathfrak{S}_i$, et même dans certains cas, les déterminer.

2. Théorème de la double immersion. — *Soit, comme tout à l'heure* K *un* A. N. R. *paracompact plongé dans la variété* M, *et soient* $\mathfrak{S}^M_i$ *les homomorphismes associés; supposons la variété* M *elle-même plongée dans une variété* E; *on posera* $\dim M = q$, $\dim E = n$; *soit* f *l'injection de* K *dans* M; *le plongement de* K *dans* E *permet également de définir des homomorphismes* $\mathfrak{S}^E_i$; *soient* W^i *les classes normales généralisées relatives à l'immersion* $M \to E$.

On peut préciser les relations entre $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}$ et $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{E}}$ grâce au théorème suivant :

THÉORÈME III.9. — *Les homomorphismes* $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}$ *sont donnés, lorsque les coefficients sont les entiers* mod 2 *par la formule*

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z) \cap f^*(\mathrm{W}^{k-i}). \tag{47}$$

Notons toujours $\mathrm{H}_\Phi^*(\mathfrak{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$, $\mathrm{H}_\Phi^*(\mathfrak{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}})$ les limites projectives des Φ-cohomologies des voisinages ouverts de K dans M et E resp., par $\mathrm{H}_\Phi^*(\mathfrak{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{E}})$ celle relative à l'immersion $\mathrm{M} \rightarrowtail \mathrm{E}$. Ces différences limites entrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{q-r}(\mathfrak{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}}) & \to & \mathrm{H}^{q-r}(\mathrm{M}), \\ {\scriptstyle\lambda^*}\downarrow & & {\scriptstyle\mu^*}\downarrow \\ \mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}) & \to & \mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{E}}), \end{array}$$

où λ^* et μ^* sont les homomorphismes de Gysin canoniquement définis, et où les homomorphismes horizontaux sont induits par l'injection.

Nous allons définir un cup-produit :

$$\mathrm{H}^p(\mathfrak{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}}) \otimes \mathrm{H}^q(\mathfrak{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{E}}) \to \mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}) \tag{48}$$

qui jouit de la propriété définie par la formule

$$(x \cup \mu^* y) = \lambda^*(x \cup y), \tag{49}$$

où le cup-produit du second membre est celui déduit du cup-produit naturel de la cohomologie de M par la Φ-cohomologie d'un voisinage ouvert U de K dans M, à valeurs dans cette Φ-cohomologie.

Rappelons dans ce but quelques propriétés de la Φ-cohomologie d'un sous-ensemble fermé :

Soit Y un sous-ensemble fermé d'un espace X, et soient W les voisinages fermés de Y dans X; les groupes $\mathrm{H}_\Phi^q(\mathrm{W})$ définissent une limite inductive $\mathrm{H}^p(\mathfrak{W})$ c'est une propriété très connue de la cohomologie que cette limite inductive $\mathrm{H}_\Phi^q(\mathfrak{W})$ s'identifie à la Φ-cohomologie $\mathrm{H}_\Phi^q(\mathrm{Y})$ de Y. De plus, soient W′ les voisinages ouverts de Y dans X; on peut munir W′ d'une $\bar{\Phi}$-cohomologie ($\bar{\Phi}$ famille des intersections des fermés de la famille Φ de $\overline{\mathrm{W}'}$ par W′), telle que, si l'on a $\mathrm{W}_1 \subset \mathrm{W}' \subset \mathrm{W}_2$, on a une suite d'homomorphismes :

$$\to \mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W}_2) \to \mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W}') \to \mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W}_1) \to .$$

Il en résulte que la Φ-cohomologie de Y, $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{Y})$, s'identifie, soit à la limite inductive des Φ-cohomologies des voisinages fermés $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W})$, soit à la limite inductive des $\bar{\Phi}$-cohomologies des voisinages ouverts. Cet isomorphisme j^* est d'ailleurs induit par l'injection $\mathrm{Y} \to \mathrm{W}$.

Désignons par U_α un voisinage ouvert de K dans M, par V_β un voisinage ouvert de M dans E; soit $\overline{\mathrm{V}}_\beta$ son adhérence; on supposera $\overline{\mathrm{V}}_\beta$ assez petit pour qu'il existe une rétraction r de $\overline{\mathrm{V}}_\beta$ sur M, rétraction choisie une fois pour toutes, indépendante de β.

Considérons alors les sous-espaces :

$$W'_{\alpha\beta} = r^{-1}(U_\alpha) \cap V_\beta, \qquad W_{\alpha\beta} = r^{-1}(U_\alpha) \cap \bar{V}_\beta.$$

Munissons les $W_{\alpha\beta}$ (qui ne sont ni ouverts, ni fermés dans E) de la Φ-cohomologie, Φ désignant la famille des fermés de E contenus dans W; les $W'_{\alpha\beta}$ sont des ouverts dans E et $W_{\alpha\beta}$; on les munira de la $\Phi_{\alpha\beta}$-cohomologie, $\Phi_{\alpha\beta}$ désignant la famille Φ intersection de la famille Φ de $W_{\alpha\beta}$ par l'ouvert $W'_{\alpha\beta}$; alors la limite inductive (suivant l'indice β) des groupes $H^r_\Phi(W_{\alpha\beta})$ et $H^r_\Phi(W'_{\alpha\beta})$, va s'identifier à la Φ-cohomologie $H^r_\Phi(U_\alpha)$; donc la limite projective suivant α des limites inductives (suivant β) des groupes $H^r_\Phi(W'_{\alpha\beta})$ va s'identifier à $H^r_\Phi(\mathcal{V}^M_K)$.

Or on a un cup-produit, défini comme usuellement, entre la Φ-cohomologie $H^{p'}_{\Phi_1}(W'_{\alpha\beta})$ et la Φ_β-cohomologie $H^{p''}_{\Phi_\beta}(V_\beta)$, à valeurs dans la Φ-cohomologie $H^{p+q}_\Phi(W'_{\alpha\beta})$: car $\Phi = \Phi_\beta \cap \Phi$. Comme les homomorphismes qui interviennent dans les définitions des limites projectives (suivant α et β), et inductive [suivant β pour $H^r_\Phi(W'_{\alpha\beta})$] sont compatibles avec ce cup-produit, on pourra, par passage à la limite, définir un cup-produit :

$$H^p(\mathcal{V}^M_K) \otimes H^q(\mathcal{V}^E_M) \to H^{p+q}(\mathcal{V}^E_K)$$

qui sera le cup-produit annoncé plus haut en (48).

La formule (49) résulte alors immédiatement de la formule (4) de l'Introduction démontrée par l'homomorphisme de Gysin $\psi^*_\beta : H^{q-r}(M) \to H^{n-r}(V_\beta)$. Appliquons ψ^*_β au cup-produit de la classe $j^*(x)$, $x \in H^*_\Phi(W'_{\alpha\beta})$, par la classe y de $H^*(\mathcal{W})$; on obtiendra

$$\psi^*_\beta(j^*(x) \cup y) = x \cup \psi^*_\beta(y).$$

Passons à la limite (inductive) suivant β; j^* est alors un isomorphisme de $H^p_\Phi(\mathcal{W}_{U_\alpha})$ sur $H^p_\Phi(U_\alpha)$ de sorte que, pour toute classe $x_1 \in H^q_\Phi(U_\alpha)$, on aura

$$\bar{\psi}^*_\alpha(x_1 \cup y) = j^{*-1}(x_1) \cup \mu^* y$$

puisque μ^* est l'homomorphisme limite des ψ^*_β, et où $\bar{\psi}^*_\alpha$ applique $H^{q-r}_\Phi(U_\alpha)$ dans $H^{n-r}_\Phi(\mathcal{V}_{U_\alpha})$. Passons à la limite (projective) suivant α : il viendra

$$\lambda^*(x_1 \cup y) = j^{*-1}(x_1) \cup \mu^* y$$

ce qui est bien (49).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule (47) du théorème III.9. Introduisons les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H_r(K) & \xrightarrow{\chi^*} & H^{q-r}(\Upsilon^M_K), \\ \downarrow & & \lambda^* \downarrow \\ H_r(K) & \xrightarrow{\chi'^*} & H^{n-r}(\Upsilon^E_K) \end{array}$$

On a

$$\chi'^* = \lambda^* \chi^*.$$

Par définition :

$$\chi^*\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}} = \mathrm{Sq}^i\chi^*, \qquad \chi'^*\mathfrak{S}_k^{\mathrm{E}} = \mathrm{Sq}^k\chi'^*,$$

avec la formule des classes correspondantes (3)

$$\chi^*(f^*(x)\cap z) = x\cup\chi^*(z), \qquad \text{où} \quad x\in \mathrm{H}^r(\mathrm{M}), \qquad z\in \mathrm{H}_s^{\mathfrak{F}}(\mathrm{K})$$

f désignant l'injection de K dans M.

Soit z une classe d'homologie quelconque $\mathrm{H}_s^{\mathfrak{F}}(\mathrm{K})$; on aura, en donnant à λ^* sa forme multiplicative [ω classe-unité de $\mathrm{H}_{\mathfrak{F}}^0(\mathrm{M})$] :

$$\chi'(z) = \lambda^*\chi^*(z) = \chi(z)\cup\lambda^*(\omega).$$

Comme il s'agit ici d'un cup-produit usuel, ou de cup-produits qui s'en déduisent, la formule (22) des carrés de Steenrod est encore vérifiée. Prenons donc les Sq^k des deux membres :

$$\chi'^*\mathfrak{S}_k^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \chi^*\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z)\cup\lambda^*(\mathrm{W}^{k-i}).$$

Le premier membre est $\mu^*(\chi\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}(z))$; le deuxième, par application de (40), devient

$$\mu^*(\Sigma_i\chi^*\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z)\cup\mathrm{W}^{k-i})$$

et comme μ^* est biunivoque :

$$\chi^*\mathfrak{S}_k^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \chi\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z)\cup\mathrm{W}^{k-i}.$$

Appliquons (2) au deuxième membre :

$$\chi^*\mathfrak{S}_k^{\mathrm{E}}(z) = \chi^* \quad (\Sigma_i\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z)\cap f^*(\mathrm{W}^{k-i})).$$

La biunivocité de χ^* donne finalement :

$$\mathfrak{S}_k^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z)\cap f^*(\mathrm{W}^{k-i})$$

ce qui est bien la formule (47) à démontrer.

3. Application aux variétés plongées. — Supposons que le sous-espace K du théorème précédent soit une variété V de dimension p; il résulte immédiatement de la définition des $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}$ que les classes normales X^i de l'immersion de V dans M sont les classes correspondantes aux classes $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}\mathrm{V}$, V classe fondamentale d'homologie de V. Nous avons alors le théorème :

Théorème III.10. — *Soit* V *variété de dimension* p, *plongée dans* M *de dimension* q, *elle-même plongée dans* E *de dimension* n; *soit* f^* *l'homomorphisme induit sur les cohomologies par l'injection* f : V → M, X^i *les classes normales de* V *dans* M, Z^i *celles de* U *dans* E; W^k *désignant toujours les classes normales de* M *dans* E, *on aura la formule*

(50)
$$\mathrm{Z}^k = \Sigma_i\,\mathrm{X}^i\cup f^*\mathrm{W}^{k-i}.$$

Appliquons la formule (17) du théorème III.9 à la classe fondamentale c de V :

$$\mathfrak{S}_k^{\mathrm{V}}(c) = \Sigma_i \mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(c) \cap f^*(\mathrm{W}^{k-i}).$$

Prenons les classes correspondantes; en utilisant (3), il reste bien (50).

Corollaire III.11. — *Soit* V *de dimension* n, *plongée dans* M *de dimension* q; *soit* f *l'application* $\mathrm{V} \to \mathrm{M}$, f^* *l'homomorphisme induit sur les cohomologies; désignons par* $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^i$ *les classes normales de l'immersion de* V *dans* M, *par* $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$ *et* W^k *les classes tangentes de* V *et* M *respectivement, alors on a, en cohomologie* mod 2 :

$$f^*\mathrm{W}^k = \Sigma_i \mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i \cup \mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{k-i}. \tag{51}$$

Démonstration. — L'immersion $\mathrm{V} \to \mathrm{M}$ définit canoniquement un immersion de $\mathrm{V}\times\mathrm{V}$ dans $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$: soit V_Δ la diagonale dans $\mathrm{V}\times\mathrm{V}$. Appliquons la formule (50) à l'immersion double :

$$\mathrm{V}_\Delta \to \mathrm{V}\times\mathrm{V} \to \mathrm{M}\times\mathrm{V}.$$

Les classes normales de V_Δ dans $\mathrm{V}\times\mathrm{V}$ sont, par définition, les classes tangentes $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$; les classes normales de $\mathrm{V}\times\mathrm{V}$ dans $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ ont pour images dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{V}_\Delta)$ les classes normales $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^i$ de V dans M; enfin, les classes normales de V dans $\mathrm{M}\times\mathrm{V}$ sont les images par f^* dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{V}_\Delta)$ des classes normales de l'immersion de M dans $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$, c'est-à-dire les classes tangentes W^k de M. On obtient ainsi la formule (51) du corollaire III.11.

Cette formule permet le calcul des classes normales $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^i$ connaissant seulement f^*, c'est-à-dire le type d'homologie mod 2 de l'application f. En effet, les classes $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^r$ étant supposées connues jusqu'à la dimension $k-i-1$, (51) permet de calculer $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{k-i}$ dont le coefficient est la classe unité ω. Nous retrouvons ainsi un théorème connu de Whitney [25].

Corollaire III.12. — *Les classes normales* W_{N}(mod 2) *d'une immersion* f : $\mathrm{V}\to\mathrm{M}$ *sont des invariants du type d'homologie* mod 2 *de l'application* f.

Corollaire III.13. — *Les classes normales de l'immersion d'une variété* V *dans l'espace euclidien* R^m *ne dépendent ni de cette immersion, ni de l'entier* m.

En effet, d'après la formule (51), ces classes normales, que Whitney désigne par la notation $\overline{\mathrm{W}}^i$, se calculent à partir des classes tangentes $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$ par les formules

$$\overline{\mathrm{W}}^0 = \omega, \qquad \Sigma_i \mathrm{W}^i\, \overline{\mathrm{W}}^{k-i} = 0. \tag{52}$$

Ceci prouve le corollaire; on peut ainsi étendre certains théorèmes de Whitney au cas d'immersions purement topologiques, sans aucune hypothèse de différentiabilité. Rappelons dans ce but un théorème de Whitney [25].

LEMME III.14. — *Soit* U *un ouvert de l'espace euclidien* R^m; *alors, pour toute classe* u *de cohomologie à supports compacts de* $H^r_{\mathfrak{C}}(U)$, *on a*

$$u \cup u = 0. \tag{53}$$

Démonstration. — L'assertion est évidente si $r = n$. Supposons donc $r < n$. Soit $\overline{U}$ l'adhérence de U, prise dans S^n, sphère obtenue par l'adjonction à R^n d'un point à l'infini; soit g^* l'homomorphisme canonique de $H^r_{\mathfrak{C}}(U)$ dans $H^r_{\mathfrak{F}}(U)$. On a évidemment

$$u \cup u = u \cup g^* u.$$

Or l'homomorphisme g^* se décompose en un produit de deux homomorphismes :

$$H^r(U) \xrightarrow{g_1} H^r(S^n) \to H^r_{\mathfrak{F}}(\overline{U}).$$

Pour toute dimension $r < n$, g_1 est nul, car pour $0 < r < n$, $H^r(S_n) = 0$, et pour $r = 0$, $H^0(U)$ est nul. Le lemme est ainsi démontré.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une variété ouverte* U *de dimension n puisse être plongée comme sous-espace ouvert de* R^n, *il faut que le cup-carré de toute classe de cohomologie à supports compacts soit nul.*

COROLLAIRE III.15. — *Si une variété compacte* V *de dimension p peut être plongée dans* R^n *sa classe normale* $\overline{W}^{n-p}$ *de dimension* $(n-p)$ *est nulle.*

Soient U en effet un voisinage ouvert de la variété plongée V, et u la classe de $H^{n-p}_k(U)$ définie par $u = \psi^*(\omega)$; d'après

$$u \cup u = Sq^{n-p}(u) = \psi^*(\overline{W}^{n-p}) = 0.$$

Comme ψ^* peut être supposé biunivoque (il l'est dans la limite projective $H^{n-p}(\mathfrak{V}^{R^n}_V)$), on en déduit bien : $\overline{W}^{n-p} = 0$.

Le résultat précédent vaut également, non seulement pour la cohomologie à supports compacts, mais aussi pour la Φ-cohomologie où Φ désigne la famille des fermés de R^n contenus dans U^n; on a par suite le théorème, valable sans hypothèse de compacité :

THÉORÈME III.16. — *Pour qu'une variété* V *de dimension p puisse être plongée dans l'espace euclidien* R^{p+k}, *il faut que ses classes* $\overline{W}^i$ *vérifient*

$$\overline{W}^i = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq k. \tag{54}$$

Remarque. — Ce théorème vaut pour une immersion purement topologique, sans hypothèse de différentiabilité; en ce sens, il est plus général que celui de Whitney ([25], th. 23.1, p. 35); il l'est moins, si l'on remarque que l'immersion a été supposée biunivoque; or le théorème de Whitney s'applique également à des immersions différentiables de rang maximum, non nécessairement biunivoques (*immers*).

V. — Généralisation de la théorie.

1. Nous considérons ici des espaces K qui sont des espaces séparables, de dimension finie, localement contractiles; ces espaces sont des A. N. R. et, plongés dans des variétés séparables comme sous-espaces fermés, ils satisfont aux conditions des théorèmes III.3 et III.4.

Soient $\mathfrak{S}_i^M$ les homomorphismes $\mathfrak{S}_i$ attachés à une immersion de K dans la variété M; nous avons alors le lemme :

LEMME III.17. — *Soit* K^0 *un sous-espace fermé (séparable, de dimensions finie, localement contractile) de* K, *f l'injection* $K^0 \to K$; *désignons par* $\mathfrak{S}_i^{0M}$ *les homomorphismes associés à l'immersion* $K^0 \to M$. *On a alors la relation de commutation :*

$$\mathfrak{S}_i^M f_* = f_* \mathfrak{S}_i^{0M}. \tag{55}$$

Démonstration. — Soient U un voisinage ouvert de K dans M, U^0 un voisinage de K^0 qui est ouvert dans U; soit g^* l'homomorphisme canonique de $H^r(U^0)$ dans $H^r(U)$; comme Sq^i permute avec g^*, le passage à la limite projective suivant l'ensemble filtrant décroissant des U et U^0, va donner

$$Sq^i \bar{g}^* = \bar{g}_* Sq^i,$$

où g^* est l'homomorphisme canonique de $H^r(\mathfrak{V}_{K_0}^M)$ dans $H^r(\mathfrak{V}_K^M)$; si χ^* et χ^{*0} désignent les isomorphismes de $H_r(K)$, $H_r(K^0)$ resp. sur $H^{n-r}(\mathfrak{V}_K^M)$, $H^{n-r}(\mathfrak{V}_{K^0}^M)$ resp., alors, on a la relation $\bar{g}^* \chi^{*0} = \chi^* f_*$ d'après la suite exacte des variétés ouvertes (Introduction, § V, n° 5); il en résulte bien (55).

Considérons maintenant un cas particulier important : celui où l'espace K est plongé dans l'espace euclidien R^m; nous allons démontrer le théorème :

THÉORÈME III.18. — *Les homomorphismes* $\mathfrak{S}_i$ *attachés à l'immersion de l'espace (séparable, localement contractile, de dimension finie)* K *dans un espace euclidien sont indépendants de cette immersion, ainsi que de la dimension de cet espace euclidien.*

Démontrons tout d'abord la seconde assertion; nous avons le

LEMME III.19. — *Soit* K *(séparable, localement contractile, de dimension finie) plongé dans* R^m *et soient* $\mathfrak{S}_i$ *les homomorphismes correspondants;* R^m *étant plongé comme sous-espace vectoriel de* R^{m+n}, *soient* $\mathfrak{S}'_i$ *les homomorphismes associés à l'immersion :* $K \to R^{m+n}$; *alors* $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i$.

Soit U un système fondamental de voisinages ouverts de K dans R^m; alors K admet dans R^{m+n} un système fondamental de voisinages homéomorphes à $U \times b^n$,

b^n n-boule ouverte à rayon éventuellement variable; il existe par suite entre les limites projectives des Φ-cohomologies un isomorphisme :

$$\varphi^* : H^r(\mathfrak{V}_k^m) \to H^{r+n}(\mathfrak{V}_k^{m+n}),$$

avec lequel Sq^i commute (*Cf.* chap. II, § 1.6°).

Soient

$$\chi : \quad H_r(K) \to H^{m-r}(\mathfrak{V}_K^m), \qquad \chi' : \quad H_r(K) \to H^{m+n-r}(\mathfrak{V}_K^{m+n})$$

les isomorphismes canoniques qui définissent les $\mathfrak{I}_i$; comme $\chi' = \varphi^* \chi$; on en déduit bien $\mathfrak{I}_i = \mathfrak{I}_i^1$.

Remarque. — En cohomologie mod 2, ce lemme résulte immédiatement de la formule (47) du théorème III.9; il suffit d'observer que les classes normales W^i de l'immersion de R^m dans R^{m+n} sont nulles, à l'exception de W_0.

Lemme III.20. — *Soient données deux applications biunivoques de* K : f_0 *dans l'espace* R^p, f_1 *dans* R^q : *il existe alors une application biunivoque* F *du produit* $K \times I$ *dans l'espace euclidien* R^{p+q+1}, *telle que, si* h^0, h^1 *désignent les injections des espaces* R^p, R^q *resp. comme facteurs dans la somme directe* $R^{p+q+1} = R^p \times R^q \times R$, *on ait*

$$h^0 f_0(x) = F(x \times \{0\}), \qquad h^1 f_1(x) = F(x \times \{1\}).$$

Pour tout point (x, t) de $K \times I$, $(t \in I)$, il suffit de poser

$$F(x, t) = ((1-t) f_0(x), t f_1(x), t).$$

Ces lemmes étant établis, démontrons maintenant le théorème III.18; soient $\mathfrak{I}_i^F$ les homomorphismes $\mathfrak{I}_i$ relatifs au plongement de $K \times I$ dans R^{p+q+1}; soient g_0, g_1 les applications de K dans $K \times I$ définies par

$$g_0(x) = x \times \{0\}, \qquad g_1(x) = x \times \{1\};$$

g_0, g_1 induisent sur les homologies des homomorphismes $(g_0)_*$, $(g_1)_*$: $(g_0)_*$, $(g_1)_*$ sont des isomorphismes de $H_i(K)$, $H_i(K)$ resp. sur $H_i(K \times I)$, et l'on a $(g_0)_* = (g_1)_*$.

Désignons par F_0, F_1 les applications biunivoques de K dans R^{p+q+1} définies par $F_0 = F \circ g_0$, $F_1 = F \circ g_1$. D'après le lemme III.19, l'homomorphisme $\mathfrak{I}_i^0$ (défini dans l'homologie de K) est le même pour les immersions f_0 et $F_0 = h^0 f_0$: on le note $\mathfrak{I}_i^0$; il en va de même pour f_1 et F_1 (notation $\mathfrak{I}_i^1$). Le lemme III.17 donna alors :

$$\mathfrak{I}_i^{(F)}(g_0)_* = (g_0)_* \mathfrak{I}_i^0, \qquad \mathfrak{I}_i^{(F)}(g_1)_* = (g_1)_* \mathfrak{I}_i^1$$

et, comme $(g_0)_*$ et $(g_1)_*$ sont des isomorphismes sûrs et que $(g_0)_* = (g_1)_*$:

$$\mathfrak{I}_i^0 = \mathfrak{I}_i^1.$$

Les opérateurs $\mathfrak{I}_i$, dont on a ainsi montré l'invariance, apparaissent comme des invariants attachés à l'espace K; on montrera qu'ils sont susceptibles d'une définition indépendante de l'espace K, au moins si K est compact.

2. Les $\mathfrak{S}_i$ en cohomologie mod 2. — Soit f une application de l'espace K dans une variété M; nous allons déterminer les homomorphismes $\mathfrak{S}_i^M$ attachés à cette immersion, tout au moins en coefficients mod 2.

Plongeons la variété M dans l'espace euclidien, de façon par ailleurs arbitraire; on sait que les classes normales de M sont alors les classes $\overline{W}^i$, définies en III.13, qui sont des invariants topologiques de M. De plus, les opérateurs $\mathfrak{S}_i$ attachés à l'immersion de K dans R^m sont également des invariants; la formule (47) du théorème III.9 :

$$\mathfrak{S}_k = \Sigma_i \mathfrak{S}_i^M \cap f^*(\overline{W}^{k-i}),$$

détermine alors les $\mathfrak{S}_i^M$ sous la seule condition que les classes $f^*(\overline{W}^i)$ soient connues. Nous obtenons ainsi le

Théorème III.21. — *Les homomorphismes $\mathfrak{S}_i^M$ attachés à l'immersion f d'un espace* K *dans la variété* M *sont des* invariants du type d'homologie (mod 2) *de l'application f.*

Nous allons établir, toujours en cohomologie mod 2, une formule multiplicative des homomorphismes $\mathfrak{S}_i$ à l'égard du cap-produit; rappelons que si χ^* désigne l'isomorphisme

$$\chi^* : \quad \Pi_r(K) \to H_K^{m-r}(\mathfrak{V}_K^M)$$

on a vis-à-vis du cap-produit la formule :

$$\chi^*(u \cap z) = ju \cup \chi^*(z), \qquad u \in \Pi^p(K), \qquad z \in H_\eta^k(K), \tag{56}$$

où j désigne l'isomorphisme canonique de $\Pi^p(K)$ sur la limite inductive $H_{\mathfrak{F}}^p(\mathfrak{V}_K^M)$ des $\mathfrak{F}$-cohomologies des voisinages ouverts de K. Or on a un cup-produit, défini comme usuellement, entre $H_{\mathfrak{F}}^p(\mathfrak{V}_K^M)$ et $H_{\mathfrak{K}}^q(\mathfrak{V}_K^M)$, à valeurs dans $H_{\mathfrak{K}}^{p+q}(\mathfrak{V}_K^M)$: c'est celui qui figure au second membre de (56).

Appliquons aux deux membres de (56) l'opérateur Sq^r. Il vient

$$Sq^r \chi^*(u \cap z) = Sq^r(ju \cup \chi^*(z)),$$

soit, en développant par (22) :

$$\chi^* \mathfrak{S}_r(u \cap z) = \Sigma_i \, Sq^i(ju) \cup Sq^{r-i} \chi^*(z)$$

ou, d'après la formule (56) :

$$\chi^* \mathfrak{S}_r(u \cap z) = \Sigma_i \, \chi(Sq^i(ju) \cap \mathfrak{S}_{r-i}(z))$$

car Sq^i commute avec j.

Puisque χ^* est biunivoque, reste finalement :

$$\mathfrak{S}_r(u \cap z) = \Sigma_i \, Sq^i(u) \cap \mathfrak{S}_{r-i}(z). \tag{57}$$

formule valable pour une immersion quelconque de K dans M.

3. Démontrons finalement, dans le cas où les $\mathfrak{S}_i$ sont les homomorphismes associés à l'immersion de K dans l'espace euclidien, une propriété importante :

LEMME III.22. — *Si z désigne une classe d'homologie de dimension $r>0$ de l'espace séparable localement contractile de dimension finie* K, *et si les $\mathfrak{S}_i$ désignent les homomorphismes attachés à l'immersion de* K *dans l'espace euclidien, on a la relation*

$$\mathfrak{S}_r(z)=0. \tag{58}$$

Démonstration. — On peut toujours supposer K connexe; car si (58) est démontrée pour un espace connexe, elle sera valable (par décomposition de la classe z suivant les composantes connexes de K) pour un espace K non connexe. Soit donc K connexe, plongé dans R^n; on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_r(K) & \xrightarrow{f_*} & H_r(R^n) \\ {\scriptstyle \mathfrak{S}_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{S}_r^*} \\ H_0(K) & \xrightarrow{f_*^0} & H_0(R^n) \end{array}$$

où les $\mathfrak{S}_i^*$ désignent les homomorphismes associés à l'immersion de R^n dans R^{n+m}, homomorphismes nuls puisque $H_r(R^n)=0$.

D'après le lemme III.17 il y a commutation :

$$\mathfrak{S}_r^* f_* = f_*^0 \mathfrak{S}_r.$$

Sur toute classe $z\in H_r(K)$, on a

$$f_0\mathfrak{S}_r(z)=\mathfrak{S}_r f_*(z)=0;$$

or $f_0 : H_0(K)\to H_0(R^n)$ est biunivoque, donc :

$$\mathfrak{S}_r(z)=0. \tag{58}$$

3. CAS DES ESPACES COMPACTS EN COHOMOLOGIE mod 2. — Nous supposons qu'en sus des hypothèses précédentes (K séparable, localement contractile, de dimension finie), K est supposé *compact. Sur le corps* Z_2, la cohomologie $H^r(K)$ est alors en dualité avec l'homologie $H_r(K)$; on peut par suite définir, dualement aux $\mathfrak{S}_i$, des homomorphismes Q^i dans la cohomologie, qui élèvent la dimension de i unités, par la formule :

$$\langle x, \mathfrak{S}_i(z)\rangle = \langle Q^i(x), z\rangle \quad x\in H^r(K), \qquad z\in H_{r+i}(K). \tag{59}$$

Nous allons déterminer explicitement les homomorphismes Q^i; rappelons dans ce but que le produit scalaire entre homologie et cohomologie de même dimension peut être défini par le cap-produit, de sorte qu'on peut écrire la relation (59) comme

$$x\cap\mathfrak{S}_i(z)=Q^i(x)\cap z.$$

Formons alors les opérateurs T^r :

$$T^r=\Sigma_i Q^{r-i}\,Sq^i \qquad (r>0).$$

Nous allons considérer le cap-produit :

$$T^r(x)\cap z, \qquad \text{où} \quad x\in H^q(K), \qquad z\in H_{r+q}(K).$$

Ceci s'écrit

$$\Sigma_i Q^{r-i}\,Sq^i(x)\cap z = \Sigma_i Sq^i(x)\cap \mathfrak{S}_{r-i}z,$$

par définition des $\mathfrak{S}_{r-i}$. Appliquons χ^* :

$$\chi(T^r(x)\cap z) = \chi^*\Sigma_i Sq^i(x)\cap \mathfrak{S}_{r-i}(z) = \Sigma_i j\,Sq^i(x)\cup Sq^{r-i}\chi(z),$$

d'où :

$$\chi(T^r(x)\cap z) = Sq^r(jx\cup\chi^*(z)) = Sq^r(\chi^*(x\cap z)) \quad [Cf.\ (57)]$$

d'où la relation

$$(T^r(x)\cap z) = \mathfrak{S}_r(x\cap z) = 0$$

d'après le lemme III.22. Comme cette relation doit être satisfaite pour toute classe x (et z de dimension appropriée), on en déduit que l'opérateur T^r est identiquement nul.

Théorème III.23. — *Les opérateurs* Q^i *sont déterminés à partir des* Sq^i *par les relations*

$$T^r = \Sigma_i Q^{r-i}Sq^i = 0, \qquad r>0. \tag{60}$$

Corollaire III.24. — *Dans toute application* f *d'un espace* E *dans un espace* E', *les carrés de Steenrod commutent avec l'homomorphisme induit* f^* ; *par suite de la relation* (60), *la même propriété vaut pour les* Q^i ; *par dualité les homomorphismes* $\mathfrak{S}_i$ *commutent avec l'homomorphisme* f_* :

$$Q^i f^* = f^* Q^i, \qquad f_*\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_i f_*.$$

4. Valeurs de Q^i pour les petites valeurs de i. — En explicitant (60) et usant de la relation (35) sur $Sq^1\,Sq^i$, on obtient pour les petites valeurs de i :

$$Q^1 = Sq^1, \qquad Q^2 = Sq^2, \qquad Q^3 = Sq^2\,Sq^1, \qquad Q^4 = Sq^4 + Sq^2\,Sq^2;$$
$$Q^5 = Sq^4\,Sq^1 + Sq^2\,Sq^2\,Sq^1, \qquad \ldots$$

Si l'on tient compte de la relation conjecturale $Sq^2\,Sq^2 = Sq^3\,Sq^1$ l'expression de Q^5 se simplifie en $Q^5 = Sq^4\,Sq^1$. Les opérateurs Q^i (et leurs duaux $\mathfrak{S}_i$) ont été introduits par Wu Wen-Tsün par une voie entièrement différente dans un exposé [29] au Colloque de Topologie de Strasbourg (Wu y dénote les Q^i S^i). Ces opérateurs semblent avoir une certaine importante pour une théorie générale de l'immersion des espaces dans l'espace euclidien comme en témoigne le théorème suivant :

Théorème III.25. — *Pour qu'un espace compact séparable, localement contractile, de dimension finie, puisse être plongé dans l'espace euclidien* R^m, *il faut que sur toute classe* $x\in H^r(K)$, *on ait*

$$Q^i(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad r+2i \geqq m.$$

Si en effet K est plongé dans R^m, dans un voisinage ouvert U de K, on aura $Sq^i u = 0$ (th. III.15) sur toute classe $u \in H^i(U)$, donc, sur toute classe $z \in H_{m-i}(K)$, on aura $\mathfrak{I}_i z_{m-i} = 0$, donc $Q^i x = 0$ pour toute $x \in H^{m-2i}(K)$.

Exemples. — Le plan projectif complexe P_c; si d désigne le générateur de $H^2(P_c)$, on a $Sq^2 d = Q^2 d = d^2 \neq 0$; donc P_c ne peut être plongé dans R^6.

L'espace projectif réel P^4 de dimension 4; désignons par t le générateur de $H^1(P^4)$; on a $t^4 = Sq^2 Sq^1 t = Q^3 t \neq 0$, donc P^4 ne peut être plongé dans R^7.

Remarque. — La théorie précédente pourrait être reprise en remplaçant les Sq^i par d'autres opérateurs; il suffit que ces opérateurs commutent avec les homomorphismes de la suite exacte, et admettent une formule de produit analogue à (22); c'est le cas des « puissances réduites » que Steenrod a récemment définies [21].

CHAPITRE IV.

Ce chapitre est consacré à quelques théorèmes d'invariance concernant la structure fibrée tangente d'une variété différentiable, théorèmes qui présentent sous un autre aspect l'invariance topologique des classes de Stiefel-Whitney.

I. — Un théorème d'invariance sur les variétés plongées.

Soit V une variété de dimension p, paracompacte, trois fois différentiablement plongée dans une variété M de dimension n. Rappelons ici ce que cela signifie :

1° V est un sous-espace fermé de M.

2° Au voisinage de tout point x de V, il existe une carte locale de la structure trois fois différentiable de M, dans laquelle un voisinage de x dans V a pour image un sous-espace vectoriel de dimension p.

Munissons M d'une métrique riemannienne de classe C^2, les théorèmes classiques sur l'existence et l'unicité des géodésiques permettent alors d'affirmer que par tout point y de M assez voisin de V il passe une et une seule géodésique (G) normale à V. Il existe donc un voisinage ouvert U de V qui admet une fibration définie par ces géodésiques; la fibre se compose des points dont les géodésiques (G) aboutissent en un point donné x de V : cette fibre définit au voisinage de x le $(n-p)$-plan normal en x à V.

Ainsi, à tout point x de V, on peut associer un voisinage dans M qui présente cette structure fibrée; définissons, comme au chapitre III, un recouvrement localement fini de V par des voisinages ouverts $V(x_i)$ relativement compacts dans V. Chaque $V(x_i)$ admet un voisinage fibré $W(x_i)$, composé des points

dont la distance géodésique normale à V est inférieure à un nombre donné ε_i. Il est clair qu'on pourra définir sur V une fonction $\varepsilon(x)$, continue, deux fois différentiable, telle que : si x appartient à $V(x_i)$, alors $\varepsilon(x) < \varepsilon_i$. Si V est compacte, les ε_i sont en nombre fini, et ε peut être pris constant; sinon, on devra définir la fonction à l'aide d'une partition différentiable de l'unité. L'ensemble des points (Σ) dont la distance géodésique à V est égale à ε constitue une variété de dimension $(n-1)$ qu'on appellera la *variété tube*.

On a alors le théorème :

Théorème IV.1. — *Supposons qu'il existe deux structures différentiables* (S), (S′) *de* M *suivant lesquelles la variété* U *est plongée trois fois différentiablement dans* M*; soient* (Σ), (Σ') *les variétés-tubes correspondantes. Alors* (Σ) *et* (Σ') *ont même type d'homotopie.*

Démonstration. — Soit, pour la structure (S), U un voisinage fibré par les géodésiques normales (G); (Σ) est plongé dans U; soit de même pour (S) U′ un voisinage fibré par les géodésiques normales (G′). On peut supposer les rayons ε, ε' des tubes (Σ), (Σ') tels que $\Sigma \subset U'$ et $\Sigma' \subset U$. On définit une application f : $U \to \Sigma$ comme suit : soit P un point U′, par P passe une géodésique G'_P du système G, et une seule, et cette géodésique rencontre Σ' en un point unique P′. On pose $f(P) = P'$. De la même façon, l'application $g : U' \to \Sigma$ est définie comme suit : $g(P)$ est le point unique où la géodésique G_P du système G issue de P rencontre Σ. Prenons les restrictions des applications précédentes à Σ et Σ'. Nous obtenons deux applications $f : \Sigma \to \Sigma'$; $g : \Sigma' \to \Sigma$. Nous allons voir que les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité.

Montrons-le par exemple pour $g \circ f$: soit P_t le point qui partage le segment PP′ de la géodésique G'_P dans le rapport t. On définira l'homotopie par

$$F(P, t) = g(P_t).$$

On a bien, en effet :

$$F(P, 0) = \text{identité},$$
$$F(P, 1) = g(P') = g \circ f(P).$$

De même $f \circ g$ est homotope à l'identité, et le théorème est démontré.

Soit maintenant V une variété différentiable de classe C^3, paracompacte; la diagonale Δ dans le produit $V \times V$ est trois fois différentiablement plongée; appliquons-lui le théorème IV.1. On obtient :

Corollaire IV.2. — *Le type d'homotopie de l'espace fibré des vecteurs unitaires tangents à une variété différentiable de classe* C^3 *paracompacte, ne dépend pas de la structure différentiable considérée.*

Toutefois, dans ce cas particulier, ce résultat peut revêtir une forme plus précise. Ceci nécessite une nouvelle définition.

Définition. Type d'homotopie fibré. — Deux espaces fibrés E, E′ de même

base, de même fibre F, seront dits de même type d'homotopie fibré, s'il existe des applications $f : E \to E'$ et $g : E' \to E$ telles que :

1° L'image de la fibre F_x est dans F'_x; de même $g(F'_x)$ est dans F_x.

2° Les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité dans des déformations qui conservent les fibres (compatibles avec la relation d'équivalence définie par la fibration). Si, en particulier E et E′ sont fibrés en sphères, les applications f et g sont sur chaque fibre de degré 1 et par suite, sont des applications Sphère sur Sphère (mais, bien entendu, non nécessairement biunivoques).

On a alors le théorème :

THÉORÈME IV.3. — *Le type d'homotopie fibré de l'espace des vecteurs tangents à une variété différentiable paracompacte de classe* C^3 *est indépendant de la structure différentiable.*

Soient (S) et (S′) deux structures différentiables de classe C^3 sur V; à (S) on associe une métrique riemannienne de classe C^2, qui définit un système local de géodésique G. Soit de même le système local de géodésique G′ associé à (S′). Définissons comme au théorème IV.1 des fonctions $\varepsilon(x)$ et $\varepsilon'(x)$, telles que si la distance MP est inférieure à $\varepsilon(P)$, il existe une géodésique du système G (ou G′) et une seule reliant M à P dans un voisinage de P.

Soient dès lors O un point de V, X un vecteur d'origine O relatif à (S), et soit G_x la géodésique du système G tangente en O à X. Prenons sur G_x un point M tel que $OM = \varepsilon(O)$; par M on fait passer la géodésique G'_M unique qui joint M à O. Soit X′ le vecteur (relatif à S′) tangent en O à G′. On posera alors $X' = f(X)$. On définit parallèlement l'application $g(X') = X$ en joignant à O par une géodésique (G) le point M′ tel que $OM' = \varepsilon'$ sur G; on montre, comme au théorème IV.1 que f est une homotopie-équivalence : soit M_t le point qui partage le segment MM′ de la géodésique G′ dans le rapport t; on posera

$$F(X, t) = g(M_t);$$

on a alors

$$F(X, 0) = \text{identité}, \qquad F(X, 1) = g \circ f.$$

II. — Invariants d'homologie du type d'homotopie fibré.

Soient deux espaces fibrés E_0 et E_1, ayant pour fibres des sphères de même dimension $k-1$, de bases B_0, B_1 resp.; soit f une application de E_0 dans E_1, qui applique chaque fibre de E_0 dans une fibre de E_1. Alors f se prolonge en une application qu'on notera encore f des espaces fibrés associés $A_0 \to A_1$, donc de A'_0 dans A'_1. Le faisceau de la carapace des cochaînes d'Alexander-Spanier de A'_1 soit T_1, est appliqué par f dans celui de A'_0, d'où un homomorphisme du faisceau T_1 (sur B_1) dans le faisceau T_0 (sur B_0) obtenus par projec-

tion des carapaces précédentes. Cet homomorphisme (et l'application f de B_1 dans B_0) définissent un homomorphisme f des groupes de cohomologie à supports dans $\mathfrak{F}$: $H^r(B_1, T_1) \to H^r(B_0, T_0)$. Plus généralement, si l'on a un faisceau de coefficients F_0 sur B_0, un faisceau F_1 sur B_1, et un homomorphisme $F_1 \to F_0$ compatible avec f, on obtient un homomorphisme

$$H^r(B_1, F_1 \bigcirc T_1) \to H^r(B_0, F_0 \bigcirc T_0), \tag{61}$$

Considérons sur A_0 et A_1 les faisceaux F_0 et F_1 ; l'homomorphisme $F_1 \to F_0$ donne naissance alors à un homomorphisme

$$H^{r+k}(A'_1, F_1) \to H^{r+k}(A'_0, F_0). \tag{62}$$

En remontant à la définition de l'isomorphisme φ^*, tel qu'il provient de la projection des carapaces, on constate que φ^* transforme l'homomorphisme (61) dans l'homomorphisme (62). Supposons maintenant que B_0 et B_1 sont le même espace B et que l'application f de E_0 sur E_1 soit une homotopie-équivalence au sens précédent, alors l'homomorphisme $T_1 \to T_0$ des faisceaux de cohomologie est un isomorphisme de T_1 sur T_0. Si l'on a posé $F_0 = F_1 = F$, l'homomorphisme (1) devient un isomorphisme de

$$H^r(B, F \bigcirc T_1) \text{ sur } H^r(B, F \bigcirc T_0).$$

Donc f^* est un isomorphisme de

$$H^{r+k}(A'_1, F) \text{ sur } H^{r+k}(A'_0, F)$$

et l'on a la formule de commutation

$$\varphi_0^* = f^* \varphi_1^*, \tag{63}$$

où φ_0^*, φ_1^* désignent les isomorphismes φ^* relatifs à A'_0 et A'_1. La relation (63) a pour conséquence le

THÉORÈME IV.4. — *Les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney sont des invariants du type d'homotopie fibré.*

En effet appliquons (63) à la classe-unité $\omega \in H^0_{\mathfrak{F}}(B, Z)$; puis l'opération Sq^i donnera

$$\varphi_0^* W_0^i = Sq^i \varphi_0^*(\omega) = Sq^i f^* \varphi_1^*(\omega) = f^* Sq^i \varphi_1^*(\omega) = f^* \varphi_1^*(W_1^i)$$

d'où, en comparant les égalités extrêmes,

$$W_1^i = W_0^i.$$

Remarque. — Soit Λ un opérateur sur la cohomologie qui jouisse de la

propriété suivante : si f^* est l'homomorphisme induit par une application f, alors

$$f^*\Lambda = \Lambda f^*.$$

(Au chapitre V, ces opérateurs seront appelés des *dépendances homologiques.*) Supposons que l'opérateur Λ augmente de degré de i unités; alors, dans tout espace fibré en sphères, on peut définir une classe « caractéristique » X^i associée à l'opérateur Λ par la formule

$$\Lambda\varphi^*(\omega) = \varphi^* X^i.$$

Il est clair que la classe X^i ainsi définie est un invariant du type d'homotopie fibré. On a vu que cette construction donne, pour $\Lambda = \mathrm{Sq}^i$, les classes de Stiefel-Whitney lorsque l'espace fibré admet le groupe orthogonal pour groupe de structure : on pourrait se demander, s'il n'est pas possible d'obtenir par un mécanisme analogue d'autres invariants du type d'homotopie fibré : les puissances de Steenrod [27] permettent à cet égard d'en définir d'autres, dont Wu Wen-Tsün a montré le rapport avec les classes caractéristiques de Pontrjagin [29]; par exemple : les classes de Pontrjagin (qui sont des classes entières), réduites mod 3, sont des invariants du type d'homotopie fibré qui correspondent aux puissances de Steenrod St^i_p pour $p = 3$. Mais on doit remarquer que cette méthode a ses limites : ainsi les classes de Pontrjagin réelles ou rationnelles ne correspondent à aucun opérateur Λ du type précédent; en effet, d'après un résultat que m'a communiqué J. P. Serre [16] il n'existe en cohomologie rationnelle, d'autre opérateur commutant avec f^* que le cup-produit et ses combinaisons linéaires. Or (pour des raisons évidentes de degré), l'opérateur Λ qui donnerait les classes de Pontrjagin ne peut s'exprimer par des puissances. Il semble donc que l'invariance des classes de Pontrjagin entières, bien que très vraisemblable, relève d'un mécanisme plus profond.

La notion de type d'homotopie fibré soulève d'ailleurs un grand nombre de problèmes, citons :

1° Si deux espaces fibrés en sphères ont même type d'homotopie fibré, on ne peut évidemment en conclure qu'ils sont isomorphes, même si l'on prend pour groupe de structure *tous* les automorphismes de la sphère; le même problème se pose *a fortiori* si le groupe de structure est le groupe orthogonal; cependant, même en ce cas, aucun contre-exemple ne nous est connu.

2° A un espace dont le groupe de structure est le groupe orthogonal, on peut associer quantité d'autres espaces fibrés dont la fibre est définie par la structure linéaire : tenseurs, p-formes, variétés de Stiefel, grassmanniennes, etc. ; si deux tels espaces ont même type d'homotopie fibré, en va-t-il de même pour les espaces associés ?

3° Que peut-on dire de la classification des types d'homotopie d'espaces fibrés en sphères sur une base donnée ? Existe-t-il un espace classifiant permettant cette classification ?

CHAPITRE V.

I. — Les variétés à bord.

1. Définition. — On appelle *variété à bord* de dimension $n+1$ un espace localement compact M, dans lequel on s'est donné un sous-espace fermé *non vide* V, le *bord* de M, tel que :

a. V est une variété de dimension n;

b. le complémentaire ouvert $M - V$ est une variété de dimension $n+1$;

c. pour tout point x du bord V, il existe un homéomorphisme d'un voisinage U de x dans M sur un demi-espace euclidien fermé, homéomorphisme qui applique $U \cap V$ sur l'hyperplan de dimension n qui limite le demi-espace.

2. Les coefficients locaux sur M. — Soient S_M la carapace des chaînes singulières à coefficients entiers dans M, S_V la sous-carapace des chaînes à support dans V, et S_M/S_V la carapace quotient. La suite exacte : $0 \to S_V \to S_M \to S_M/S_V \to 0$ engendre pour les faisceaux de ces carapaces la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to (S_V) \to F(S_M) \to F(S_M/S_V) \to 0. \tag{64}$$

Explicitons ces différents faisceaux et leurs faisceaux d'homologie :

a. $F(S_V)$, faisceau des chaînes singulières de la variété V, admet, comme on sait (*cf.* th. 0.3), un faisceau d'homologie nul pour tout degré, sauf pour le degré $r = n$; $H_n(F(S_V))$ est alors le faisceau des entiers tordus T_V lié à l'orientation locale de V.

b. $F(S_M)$, faisceau des chaînes singulières de M, admet, pour faisceau d'homologie le faisceau ainsi défini : en tout point x de $M - V$, $H_r(F(S_M))$ est nul, sauf pour $r = n+1$ et $H_{n+1}(F(S_M))$ est le faisceau des entiers tordus lié à l'orientation locale de $M - V$. En un point y du bord V, le faisceau d'homologie de $F(S_M)_y$ s'identifie à l'homologie : $H_r(B \bmod (B - y))$, où B désigne une $(n+1)$-boule fermée dont y est un *point de la sphère-bord. Or une telle homologie est nulle;* en effet : on a la suite exacte

$$\to H_r(B - y) \to H_r(B) \to H_r(B \bmod B - y) \to H_{r-1}(B - y) \to.$$

Comme $(B - y)$ est contractile, et que les groupes ici considérés sont des groupes d'homologie finie, on en déduit $H_i(B - y) = 0$ pour $i > 0$, donc

$$H_i(B \bmod B - y) \simeq H_i(B) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > 0.$$

Pour $i = 0$, on a

$$H_0(B - y) \xrightarrow{i} H_0(B) \to H_0(B \bmod B - y) \to 0$$

et, comme j applique $H_0(B-y)$ sur $H_0(B)$, $H_0(B \bmod (B-y)) = 0$. En conclusion, le faisceau d'homologie $H_{n-1}(F(S_M))$ induit sur $(M-V)$ le faisceau T_{M-V} des entiers tordus lié à l'orientation locale de la variété ouverte $(M-V)$ et induit zéro sur V.

c. $F(S_M/S_V)$, faisceau des chaînes singulières de M modulo les chaînes de V ne diffère pas, pour son homologie, de $F(S_M)$ en tout point de $M-V$; soit toujours y un point de V; la suite exacte des carapaces induites en y :

$$0 \to (S_V)_y \to (S^M)_y \to (S_M/S_V)_y \to 0$$

induit, pour les homologies, la suite exacte

$$\to H_r(S_V)_y \to H_r(S_M)_y \to H_r(S_M/S_V)_y \to H_{r-1}(S_V)_y \to,$$

dont la seule partie non nulle se réduit à

$$0 \to H_{n+1}(S_M/S_V)_y \xrightarrow{S_y} H_n(S_V)_y \to 0. \tag{65}$$

Il en résulte qu'au point y de V, le faisceau d'homologie $H_r(S_M/S_V)$ est nul, sauf pour $r = n+1$; ainsi, en tout point de M, $H_{n+1}(S_M/S_V)$ définit un système local d'entiers tordus qu'on désignera par T_M et ce système local induit T_{M-V} sur $(M-V)$. La suite exacte des faisceaux d'homologie déduite de la suite exacte (64) se réduit ainsi à

$$0 \to H_{n+1}(F(S_M)) \to H_{n+1}(F(S_M/S_V)) \to H_n(F(S_V)) \to 0$$

soit

$$0 \to T_{M-V} \to T_M \to T_V \to 0. \tag{66}$$

Nous en déduirons le

LEMME V.1. — *Le faisceau d'entiers tordus* T_V *induit sur* V *par le faisceau d'entiers tordus* T_M *lié à l'orientation locale de* M *est lui-même lié à l'orientation locale de* V. *Donc, si* M *est orientable* (T_M *simple*), V *est elle-même orientable, et toute orientation de* M *induit canoniquement une orientation de* V.

3. LES THÉORÈMES D'ISOMORPHISME DES VARIÉTÉS A BORD. — Supposons, plus généralement, que les coefficients de la carapace de chaînes singulières S_M soient pris dans un faisceau localement simple de groupes abéliens F, et que les supports en soient pris dans une famille (Φ) de l'espace M; soit S_{M-V} la sous-carapace formée des chaînes de S_M dont le support est contenu dans $M-V$ [ou encore, dans la famille (Φ_{M-V}) des fermés de Φ contenus dans $M-V$]. Soit $\Upsilon = S_M/S_{M-V}$ la carapace-quotient; Υ, considérée comme carapace sur M, est fine et Φ-complète; son faisceau d'homologie en un point x de $M-V$ est évidemment nul; en un point y de V, la carapace induite n'est autre que $(S_M)_y$; son faisceau d'homologie a été calculé au n° 2 *b*, et on l'a trouvé identiquement nul; il en résulte que le faisceau d'homologie de Υ est identiquement nul et, par suite, d'après le théorème 0.1, les groupes d'homologie de la carapace Υ

qu'on représente par $H_r(M \bmod (M - V))$ sont tous nuls; or ces groupes apparaissent dans la suite exacte d'homologie déduite de $o \to S_{M-V} \to S_M \to \Upsilon \to o$ soit $H_r^\Phi(M - V) \to H_r^\Phi(M) \to H_r^\Phi(M \bmod (M - V))$. On en déduira

Théorème V.2. — *L'injection* $(M - V) \to M$ *induit un isomorphisme de* $H_r(M - V, F)$ *sur* $H_r(M, F)$.

Reprenons maintenant la sous-carapace S_V des chaînes à support dans V et la carapace-quotient $\Upsilon = S_M/S_V$; on a déjà (en 2, *c*), déterminé son faisceau d'homologie; si l'on fait par suite sur cette carapace le changement de graduation défini par $r' = n + 1 - r$, on sera dans les conditions d'application du théorème 0.1, et l'on obtiendra :

Théorème V.3. — *L'homologie relative* $H_r^\Phi(M \bmod V, F)$ *est canoniquement isomorphe à la cohomologie* $H_\Phi^{n+1-r}(M, F \bigcirc T_M)$.

Remarque. — La cohomologie $H^r(M)$ opère — en cap-produit — sur l'homologie relative $H_i(M \bmod V)$; l'isomorphisme du théorème précédent jouit de la même propriété multiplicative que l'isomorphisme de dualité des variétés [Introduction, § V, n° 2, formule (3)]; si $z \in H_r^i(M \bmod V)$ correspond à la classe de cohomologie $u \in H^{n+1-r}(M)$, et si x est une classe quelconque de $H^i(M)$, à la classe $x \cap z$ de l'homologie correspond la classe de cohomologie $x \cup u$ [propriété démontrée de la même façon que pour (3)].

4. Les classes fondamentales des variétés a bord. — M étant supposée paracompacte, soit ω la classe-unité de $H_{\mathcal{F}}^0(M, Z)$; on appellera *classe fondamentale* de $M \bmod V$ la classe de $H_{n+1}(M \bmod V, T_M)$ qui correspond à ω par l'isomorphisme du théorème 3; on désignera par $v \in H_n(V, T_V)$ la classe fondamentale de la variété bord V.

Soient y un point de V, B^+ une demi-boule fermée de dimension $n+1$, de centre y, dont le « plan » équatorial sera dénoté E et la demi-sphère bord S^+. B^+ étant un voisinage fermé de y dans M, E voisin de y dans V, nous avons les homomorphismes canoniques du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H_{n+1}(M \bmod V) & \to & H_{n+1}(M \bmod (M - B^+) + V) & \simeq & H_{n+1}^{\mathcal{F}}(B^+ \bmod S^+ + E) \\ \downarrow z & & \downarrow z_y & & \downarrow z_y \\ H_n(V) & & \to H_n \quad (V \bmod V \cap (M - B^+)) & \simeq & H_n^{\mathcal{F}} \quad (E \bmod \partial E) \end{array}$$

où l'on a écrit les isomorphismes bien connus des homologies relatives. L'image $j(m)$ est alors le cycle fondamental de $H_{n+1}(B^+ \bmod S^+ + E)$; l'image $z_y j(m)$ donne alors le cycle fondamental de $H_n(E \bmod \partial E)$; par suite, l'image ∂m induit en chaque point y du bord V le cycle fondamental du voisinage de y dans V. C'est dire qu'on a, globalement :

$$\partial m = v. \tag{67}$$

Remarque. — On a, dans la formule (67), le signe +, parce qu'on a supposé V muni de l'orientation locale induite de celle de M : l'homomorphisme $\Im_\gamma$ n'est autre que l'isomorphisme $\Im_\gamma$ de la suite exacte de 2, *c* (65).

II. — Comparaison des suites exactes d'homologie et de cohomologie.

Rappelons d'abord quelques généralités sur le cap-produit. Soit Y un sous-espace fermé d'un espace X; nous pouvons lui associer :

1° *La suite exacte d'homologie singulière :*

$$\to \mathrm{H}_p(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{H}_p(\mathrm{X}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{H}_p(\mathrm{X} \bmod \mathrm{Y}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_{p-1}(\mathrm{Y}) \to.$$

2° *La suite exacte de cohomologie* (Introduction § II, n° 4) :

$$\to \mathrm{H}^r(\mathrm{X}) \underset{\rho^*}{\to} \mathrm{H}^r(\mathrm{Y}) \underset{\delta^*}{\to} \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) \underset{\rho^*}{\to} \mathrm{H}^r(\mathrm{X}) \to.$$

Soit u un cocycle de $\mathrm{H}^q(\mathrm{X})$, z un cycle de $\mathrm{H}_r(\mathrm{X} \bmod \mathrm{Y})$; d'après la formule du bord d'un cap-produit :

$$\partial(u \cap z) = \delta u \cap z + (-1)^q u \cap \partial z, \tag{68}$$

nous voyons que $u \cap \partial z$ est un cycle de Y dont la classe sera donnée par la formule

$$(-1)^q \partial(u \cap z) = f^* u \cap \partial z. \tag{69}$$

Supposons que x soit une classe de $\mathrm{H}^q(\mathrm{Y})$; z désignant toujours un r-cycle de $\mathrm{H}_r(\mathrm{X} \bmod \mathrm{Y})$, on tire de la formule (68) :

$$x \cap \partial z = (-1)^{q-1} \delta x \cap z,$$

où $\delta x \cap z$ est un cycle de X.

On aura donc la formule

$$f(x \cap \partial z) = (-1)^{q-1} \delta^* x \cap z. \tag{70}$$

Remarque. — Cette formule (68) du bord d'un cap-produit diffère de la formule classique déduite des formules simpliciales usuelles; la formule (68) est seule compatible avec les conventions faites implicitement dans la démonstration des théorèmes 0.1 et 0.2 de l'Introduction.

Cela étant, écrivons concurremment les deux suites exactes précédentes pour V fermé de M. Il vient

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}_r(\mathrm{M}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}^r(\mathrm{V}) & \xrightarrow{\delta^*} & \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{M}-\mathrm{V}) & \xrightarrow{\rho^*} & \mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{M}) \to \\
\downarrow k & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow k \\
\to \mathrm{H}_{n+1-r}(\mathrm{M} \bmod \mathrm{V}) & \underset{\delta}{\to} & \mathrm{H}_{n-r}(\mathrm{V}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}_{n-r}(\mathrm{M}) & \underset{\rho}{\to} & \mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{M} \bmod \mathrm{V}) \to.
\end{array}$$

Les flèches verticales désignent des isomorphismes; i est l'isomorphisme de

dualité dans V, j est le produit par l'isomorphisme du théorème V.2 de l'isomorphisme de dualité dans la variété M — V; k est l'isomorphisme du théorème V.3.

Soit à démontrer $(-1)^r \partial k(x) = i f^*(x)$, si $x \in H^r(M)$; $k(x) = x \cap m$; donc :

$$\partial(x \cap m) = (-1)^r f^* x \cap \partial(m),$$

soit, d'après (69) :

$$\partial(x \cap m) = (-1)^r f^* x \cap v = (-1)^r i f^*(x).$$

2° Soit à comparer $f_* i$ et $j \delta^*$.

Soit $y \in H^r(V)$: $i(y) = y \cap v$, et, d'après (79) :

$$f(y \cap v) = (-1)^{n-r-1} \delta^* y \cap m \qquad \text{puisque} \quad v = \partial m.$$

On en tire

$$f_* i = (-1)^{r-1} j \delta^*.$$

3° Soit à démontrer $\rho j = k \rho^*$.

L'isomorphisme j peut être obtenu comme le cap-produit d'une cochaîne de M — V par une chaîne m de la classe fondamentale de $H_{n-1}(M \bmod V)$; on ne change pas ce cap-produit en remplaçant la cochaîne de M — V par son image dans M.

Cette commutation peut également se voir en remontant aux carapaces de chaînes singulières du n° 2; ρ est induit par le passage au quotient : $S_M \to S_M/S_V$; ceci induit sur les faisceaux de coefficients l'homomorphisme : $T_{M-V} \to T_M$ de la suite exacte (66); et l'on sait que cette suite exacte de coefficients induit précisément la suite exacte de cohomologie, où l'homomorphisme $T_{M-V} \to T_V$ induit l'homomorphisme ρ^*.

Généralisation. — Les raisonnements précédents subsistent mot pour mot, si les coefficients de l'homologie ont été pris dans un faisceau localement simple de groupes abéliens F; de plus, si l'on a pris partout la Φ-cohomologie (et pour $H^r(M - V)$ la Φ_{M-V}-cohomologie), tous les raisonnements précédents subsisteront; en effet, quand on fait le cap-produit par les classes v et m, qui sont des classes de $\mathcal{F}$-cohomologie, on ne sort pas de la famille (Φ); nous obtenons ainsi le théorème :

Théorème V.4. — *Dans le diagramme formé par les deux suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to H^r_\Phi(M, F) & \xrightarrow{f^*} & H^r_{\Phi_V}(V, F) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{r+1}_{\Phi_{M-V}}(M - V, F) & \xrightarrow{\rho^*} & H^{r+1}_\Phi(M, F) & \xrightarrow{f^*} & \\
\downarrow k & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k & & \\
\to H^\Phi_{n+1-r}(M \bmod V, F \bigcirc T) & \xrightarrow{\delta} & H^{\Phi_V}_{n-r}(V, F \bigcirc T) & \xrightarrow{f_*} & H^\Phi_{n-r}(M, F \bigcirc T) & \xrightarrow{\rho_*} & H^\Phi_{n-r}(M \bmod V, F \bigcirc T & &
\end{array}$$

nous avons les relations

$$\partial k = (-1)^r i f, \qquad f_* i = (-1)^{r-1} j \delta; \qquad \rho j = k \rho^*.$$

Remarque. — La plupart des résultats précédents figurent dans la littérature

(*Lefschetz Topology*, 1930, p. 154, th. I; *Hopf-Alexandroff Anhang*, I, 5, n° 66) mais sous des hypothèses de triangulabilité qui ne sont pas nécessaires; il en va de même pour un théorème de Steenrod [19] qui suppose le bord « régulier » (existence d'un voisinage de V homéomorphe à $V \times I$); en fait, tous ces résultats restent valables si l'on fait seulement des hypothèses d'homologie locale; ils s'étendent par suite aux variétés « homologiques », ou variétés généralisées au sens de Van Kampen : espaces en tout point duquel l'homologie locale est celle de l'espace euclidien R^n (ou, en un point du bord, du demi-espace euclidien R^{n+1}).

Désignons par K le noyau de l'homomorphisme f_* (par K_p le sous-groupe de K constitué des éléments de degré p); par A (A^p pour les éléments de degré p) l'image de l'homomorphisme f^*. Le théorème admet alors le

COROLLAIRE V.5. — *Le noyau* K_p *et l'image* A^{n-p} *se correspondent dans l'isomorphisme de dualité* i : $\varphi \cap A = K$.

Ce résultat peut être particularisé par des hypothèses supplémentaires sur les coefficients; afin de n'avoir pas à introduire de systèmes locaux, on supposera que V est bord de M *orientable*; les coefficients étant pris dans un anneau principal, on peut définir dans la cohomologie un cup-produit et dualement, dans l'homologie, une opération d'intersection $S(x, y)$; puisque A est une algèbre pour le cup-produit, nous obtenons :

COROLLAIRE V.6. — *Si deux classes* x, y *appartiennent à* K, *il en est de même de leur intersection* $S(x, y)$; *en particulier pour* V *connexe, l'intersection d'un élément de* K_p *par un élément de* K_{n-p} *est nulle.*

Supposons de plus que les coefficients soient pris dans un corps et que la variété à bord M soit *compacte*. Il y a alors dualité entre les espaces vectoriels $H^i(M)$ et $H_i(M)$; comme les homomorphismes f_* et f^* sont transposés l'un de l'autre, on en déduit qu'il y a dualité entre les espaces vectoriels : A^p et $H_p(V)/K_p$. Nous obtenons le théorème :

THÉORÈME V.7. — *Si* V orientable *est bord de* M compacte orientable, *et si les coefficients sont dans un corps, alors, des deux espaces vectoriels* A^p *et* A^{n-p} ($0 < p \leq n$), *chacun d'eux est, pour le cup-produit, l'annulateur de l'autre.*

Désignons par r^k le rang de A^k, et par $b_k(V)$ le $k^{\text{ième}}$ nombre de Betti de V. Nous avons alors le :

COROLLAIRE V.8. — *Entre les rangs de* A^k *et* A^{n-k}, *on a la relation :*

$$r_k + r_{n-k} = b_k(V) = b_{n-k}(V). \tag{71}$$

Remarque. — Les théorèmes V.6, V.7 et V.8 demeurent exacts même si V et M ne sont pas orientables, à condition d'opérer dans un corps de caractéristique 2.

III. — Applications à diverses variétés à bords.

1. Supposons V compacte, orientable et connexe et de dimension paire $n = 2m$; si V est bord de M orientable (même non compacte), le théorème V.6 permet d'affirmer :

Le noyau K_m ne peut contenir tout $H_m(V)$; comme $S(K_m, K_m) = 0$, on peut affirmer que le rang de K_m ne peut excéder $b_m(V)/2$. On retrouve ainsi, en un cas très particulier, un théorème déjà ancien de H. Kneser [11] : si une surface compacte est bord d'une variété à trois dimensions M, il existe au moins un 1-cycle de la surface qui n'est pas, en coefficients rationnels, homologue à zéro dans M.

2. Si la variété à bord M compacte a l'homologie d'une $(n+1)$-cellule, son bord V a l'homologie d'une n-sphère; car, d'après (71), $b_k(V) = 0$ pour n'importe quel corps de coefficients.

3. Soit V une variété compacte fibrée par des sphères S^{k-1}; alors V est bord de la variété A définie au chapitre I, mapping cylinder de l'application fibrée p. Le théorème V.11 donne alors : les espaces vectoriels A^r et A^{n-r} images par l'homomorphisme p_* induit par l'application p sont chacun l'annulateur de l'autre (*cf.* Leray [13], th. 13.1); la relation donne, en tenant compte de l'inégalité évidente $r_j < b_j(B)$, B base de la fibration, l'inégalité de Gysin-Leray :

$$P(V) < P(B)(1 + t^{k-1})$$

portant sur les coefficients des polynomes de Poincaré $P = \Sigma_i b_i t^i$ de V et de la base B.

4. Variétés bordées par un produit de deux sphères. — Si M compacte orientable admet pour bord le produit $S^p \times S^q$ de deux sphères S^p et $S^q (p \neq q)$, on peut affirmer, d'après V.8, que l'un des cycles (et un seul : $S^p \times 1$ ou $1 \times S^q$) est homologue à zéro dans M.

Dans le cas $p = q$, on a une conclusion analogue, en remarquant toutefois qu'il n'existe pas, en ce cas, de base canonique pour $H_p(V)$; signalons enfin un phénomène assez curieux : la variation possible du noyau K avec le domaine des coefficients; donnons-en un exemple : soit U la variété $S_1 \times S_2$; paramétrons le cercle S_1 par l'angle θ et soit φ l'angle polaire sur un grand cercle fixe de S_2; la relation $\varphi = \frac{\theta + 2k}{3}$ définit un cercle simple C dans U. Prenons pour voisinage de C dans U un tore plein Q d' « âme » C, dont le bord est un tore $T = S_1 \times S_2$; désignons par x le méridien, y le parallèle de T (x homotope à zéro dans Q); la variété à bord considérée est $N = U - Q$. On vérifie

aisément que x est $\not\simeq 0$ dans N, mais que $3x \simeq 0$ dans N; si le domaine des coefficients ne contient pas de torsion d'ordre 3, $x \sim 0$ et $y \not\simeq 0$; si au contraire, on a pour coefficients Z_3, alors $x \not\simeq 0$ et $y \simeq 0$: en effet, dans N, y est homologue à $3(S_4 \times 1)$.

IV. — Le problème des variétés-bords.

Une variété V quelconque est toujours le bord d'une variété à bord : prendre par exemple le produit de V par le segment ouvert à droite $[0, 1[$. Par contre, une variété compacte V n'est pas toujours le bord d'une variété à bord compacte M : nous en verrons de nombreux exemples. Steenrod (1) a posé la question, de donner des critères permettant de déterminer si une variété V donnée est le bord d'une variété à bord compacte M. Les théorèmes précédents vont nous permettre de donner des conditions *nécessaires* portant sur l'homologie de la variété V; la recherche de conditions suffisantes est un problème beaucoup plus difficile.

Définition. — Une variété *compacte orientée* V est dite *variété-bord*, si elle est le bord d'une variété à bord compacte *orientable* M, et si M peut être munie d'une orientation telle qu'on ait $\partial m = v$, m et v désignant les classes fondamentales de M et V définies par ces orientations.

Si V est compacte *connexe* et orientable, il n'est pas nécessaire de préciser l'orientation : si V est variété-bord pour une orientation, elle est évidemment un bord pour l'orientation opposée.

Si V, orientable ou non, est bord d'une variété à bord compacte M, orientable ou non, on dira que V est une *variété-bord* (mod 2).

Rappelons tout d'abord un résultat bien connu dans le cas des variétés triangulées : par suite de la relation (70), on obtient :

Théorème V.9. — *La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété-bord* mod 2 *est paire.*

Les seules variétés orientables de caractéristique χ impaire sont de dimension $n \equiv 0 \bmod 4$, aussi peut-on se demander si pour les variétés de dimension $n = 4k$, la condition $\chi \equiv 0 \bmod 2$ n'est pas une condition suffisante pour que la variété soit une variété-bord; nous allons voir qu'il n'en est rien.

Soit donc V une variété orientable de dimension $4k$, et supposons les coefficients pris dans un corps. Alors le cup-produit $x \cup y$ de deux classes $x, y \in H^{2k}(V)$ définit sur l'espace vectoriel $H^{2k}(V)$ une forme bilinéaire symétrique Φ par la relation

$$\Phi(x, y) = \langle v, x \cup y \rangle \qquad (v \text{ cycle fondamental de V}).$$

(1) Cf. *Problems in topology* (*Ann. Math.*, 50, 1949, p. 247-260).

Soit $\Phi(u, u)$ la forme quadratique associée; appelons *indice d'inertie* de la forme Φ le rang maximum des sous-espaces linéaires contenus dans le « cône » défini par $\Phi(u, u) = 0$. Si V est une variété-bord, on a $\Phi(x, x) = 0$ pour toute classe $x \in A^{2k}$; or d'après le théorème V.8, le rang de A^{2k} est égal à $\frac{1}{2} b_{2k}(V)$; donc :

Théorème V.10. — *Pour qu'une variété orientée de dimension $4k$ soit une variété-bord, il faut que la forme quadratique définie par le cup-produit sur H^{2k} admette pour indice d'inertie $\frac{1}{2} b_{2k}(V)$.*

Si en particulier le corps des coefficients est le corps des réels ou des rationnels, l'indice d'inertie est égal à $\mathrm{Inf}(p, b_{2k}(V) - p)$, p désignant le nombre des carrés positifs de la forme quadratique. Appelons *index* de la forme quadratique le nombre $\tau = p - (b_{2k}(V) - p)$, excès du nombre des carrés positifs sur celui des carrés négatifs; l'index τ a été introduit par Hodge dans l'étude des variétés algébriques complexes. Comme cas particulier du théorème V.10, on obtiendra :

Corollaire V.11. — *Pour qu'une variété orientée* V *de dimension $4k$ soit une variété-bord, il faut que l'index de la forme quadratique définie par le cup-produit sur la cohomologie réelle de dimension $2k$ soit nul.*

Remarque. — Dans les théorèmes V.10 et V.11, on a supposé V *orientée;* si V n'est pas connexe, cette précaution est indispensable; en effet, l'indice d'inertie (de même que τ) dépendent de cette orientation, comme le montre l'exemple suivant : soit P^+ le plan projectif complexe, muni de son orientation naturelle (induite par la structure complexe); ce n'est pas une variété-bord, ni même une variété-bord $(\mathrm{mod}\, 2)(\chi(P^+) = 3)$. La variété constituée par deux plans projectifs complexes munis de la même orientation $(P^+ + P^+)$ n'est pas une variété-bord $(\tau = 2)$; par contre, la même variété, mais munie de l'orientation définie par $P^+ + P^-$, est un bord (bord de $P \times I$).

Les théorèmes précédents ne sont en fait que des cas particuliers d'un théorème général que nous énoncerons, après avoir au préalable donné deux définitions :

Définition 1. — Soit E un espace, $H^*(E)$ sa cohomologie; on dira qu'une classe $u \in H^*(E)$ *dépend homologiquement* de classes $x, y \ldots$ de dégré inférieur, si pour toute application f de E dans un espace arbitraire E', u vérifie la condition suivante : si l'image A de $H^*(E')$ par l'homomorphisme induit f^* contient x, y, ... elle contient aussi u.

Définition 2. — Soit V une variété compacte (orientée) dont on a formé la cohomologie $H^*(V)$ par rapport à un corps de coefficients; on appellera

algèbre permise dans l'anneau de cohomologie de V un sous-anneau A vérifiant les propriétés suivantes :

1° A^0 contient $H^0(V)$.

2° Si u dépend homologiquement de $x, y, \ldots$ éléments de A, alors u est dans A.

3° Soit A^p l'ensemble des éléments de degré p de A : de A^p et A^{n-p} chacun d'eux est, pour le cup-produit l'annulateur de l'autre.

4° La classe fondamentale de $H^n(V)$ définie par l'orientation donnée de V n'appartient pas à A.

Remarque. — Si V est connexe orientable, la condition 4° est une conséquence de 3° et ceci, pour toute orientation de V; la notion d'algèbre permise peut donc être définie, en ce cas, sans la donnée d'une orientation.

Pour une variété non orientable, on a la notion d'algèbre permise sur le corps Z_2. Si la variété V est une *variété-bord*, l'algèbre image de l'application $f^* : H^*(M) \to H^*(V)$ est une algèbre permise (ceci à cause du théorème V.7); nous avons donc le

Théorème V.12. — *Pour qu'une variété* V *compacte* (*orientable*) *soit une variété-bord, il faut que, pour tout corps de coefficients, l'anneau de cohomologie* $H^*(V)$ *contienne une algèbre permise.*

Ce théorème rend compte de tous les critères connus pour qu'une variété soit une variété-bord; il est malheureusement d'un emploi malaisé, car on ne sait pas formuler explicitement toutes les dépendances homologiques dans $H^*(V)$: parmi les dépendances homologiques, on notera le cup-produit, les carrés de Steenrod (sur Z_2) et leurs récentes généralisations (p-puissances sur Z_p).

Une formulation plus commode, bien que partielle, du critère ci-dessus va nous être offerte par un théorème de Pontrjagin, qui montrera le rapport de la question précédente avec la théorie des classes caractéristiques.

Rappelons tout d'abord quelques généralités sur les classes de Stiefel-Whitney; étant donné, sur un espace B de dimension finie pris pour base, une structure fibrée sphérique dont le groupe de structure est le groupe orthogonal, on sait que cette structure fibrée est définie par une classe d'application f de B dans une grassmannienne G; les classes caractéristiques $W^i \bmod 2$ de la structure fibrée sont alors les images par f des classes W^i de la grassmannienne G; ces classes W^i de G engendrent dans l'anneau de cohomologie (mod 2) de la grassmannienne G une algèbre de polynomes [4], ceci tout au moins jusqu'à une dimension N (dimension classifiante) qu'on suppose supérieure à la dimension de la base B; on appellera plus généralement classe caractéristique une classe quelconque de cette algèbre, qu'on pourra donc exprimer par un polynome par rapport aux W^i. Pour chaque dimension $k < N$, les monomes $\Pi(W^i)^{\nu_i}$ avec $\Sigma i\nu_i = k$ sont linéairement indépendants.

Si, en particulier, V est une variété différentiable *compacte* de dimension n, la structure fibrée tangente de V est induite par une application f de V dans la grassmannienne; on appelle *nombres caractéristiques* de la variété V les valeurs prises par les classes caractéristiques de G sur la classe $f(v)$ image de la classe fondamentale v de $H_n(V)$. Il suffit de calculer ces nombres pour les éléments $\Pi(W_i)^{\nu_i}$, $\Sigma i\nu_i = n$, certains de ces nombres peuvent d'ailleurs être identiquement nuls en raison des formules de Wu.

Pontrjagin a démontré le théorème suivant [15]. *Si une variété (différentiable) compacte est bord (différentiable) d'une variété différentiable compacte* M, *tous ses nombres caractéristiques sont nuls.*

Si, de plus, V est bord de M orientable, le même théorème vaut, non seulement pour les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney, mais aussi pour les classes caractéristiques de Pontrjagin, classes entières de dimension $k \equiv 0 \bmod 4$.

Donnons-en une démonstration : dire que V est bord différentiable de M, c'est dire qu'on peut construire (au moyen de géodésiques normales, par exemple) un voisinage normal de V homéomorphe à $V \times I$; désignons par $\mathfrak{S}$ la structure fibrée des vecteurs tangents à V, par Σ celle des vecteurs tangents à M, par Σ_V la restriction de Σ à V; Σ_V peut être considérée comme le joint de $\mathfrak{S}$ par une structure triviale de fibre I. Il résulte alors immédiatement du théorème II de Whitney [25] que les classes W^i de Σ_V coïncident avec les classes W^i de $\mathfrak{S}$; soit dès lors $g : M \to G$ l'application de M dans la grassmannienne G qui induit la structure Σ; le nombre caractéristique de V correspondant à un produit $\Pi(W_i)^{\nu_i}$, $\Sigma i\nu_i = n$, est donc égal à la valeur prise dans la cohomologie de la grassmannienne par ce produit $\Pi(W_i)^{\nu_i}$ sur le cycle image $g(v)$; or l'application g est définie sur tout M, et $v = \partial m$; donc $g(v) \sim 0$, et le nombre caractéristique $\langle g(v), \Pi(W^i)^{\nu_i} \rangle$ est nul.

On pourrait facilement éliminer de cette démonstration toutes les hypothèses de différentiabilité, par une généralisation convenable du théorème III.11 en considérant V comme sous-variété plongée dans M. Mais il est plus intéressant de rattacher ce théorème au théorème V.11. Nous voulons donc démontrer :

THÉORÈME V.13. — *Pour qu'une variété compacte soit une variété-bord* (mod 2), *il faut que tous ses nombres caractéristiques de Stiefel-Whitney soient nuls.*

La variété n'étant pas supposée différentiable, les classes W^i sont les classes tangentes telles qu'elles ont été définies au chapitre III; elles sont données par les formules de Wu (45) :

$$W_i = \Sigma_k \operatorname{Sq}^{i-k} U^k,$$

où U^k désigne la classe « canonique » définie par

$$U^k \cup x^{n-k} = \operatorname{Sq}^k x^{n-k} \qquad \text{[formule (44)]}.$$

Soit u une classe quelconque de $A^{n-p}\left(\text{avec } p < \left[\frac{n}{2}\right]\right)$; comme le cocycle fondamental n'appartient pas à A^n, on a $Sq^p u = 0$. Donc $U^p \cup u = 0$ pour tout $u \in A^{n-p}$; c'est dire que U^p appartient à l'annulateur de A^{n-p}, donc à A^p : toute algèbre permise sur le corps Z_2 contient nécessairement les classes U de Wu, donc aussi d'après (45) les classes W^i. Par suite, pour que V soit un bord (mod 2), il est nécessaire que le cocycle fondamental de $H^n(V)$ n'appartienne pas à l'idéal engendré par les W^i, donc que tous les nombres caractéristiques soient nuls.

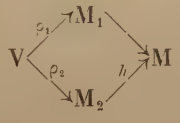
V. — Applications aux problèmes d'immersion.

Soit V une variété compacte connexe de dimension n plongée dans une variété connexe compacte M de dimension $n+1$ comme sous-variété homologue à zéro; ceci veut dire que dans la suite exacte :

$$0 \to H_{n+1}(M) \to H_{n+1}(M \bmod V) \to H_n(V) \to H_n(M) \to$$

l'image $f(c)$ du cycle fondamental c de V est nulle; il en résulte que $H_{n+1}(M \bmod V)$ contient deux (et seulement deux) éléments linéairement indépendants; d'après l'isomorphisme : $H_{n+1}(M \bmod V) \simeq H^0(M - V)$ (Introduction, § V, n° 5), le complémentaire ouvert $M - V$ admet donc deux composantes M'_1 et M'_2. On supposera ici que l'immersion de V est assez régulière pour que $M_1 = \overline{M}'_1$ et $M_2 = \overline{M}'_2$ soient des variétés à bord dont V est le bord commun.

Les injections



donnent naissance aux homomorphismes du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^r(M) & \xrightarrow{h} & H^r(M_1) & \xrightarrow{\partial_1} & H^{r+1}(M'_2) \\ \downarrow & & p_1^* \downarrow & & \downarrow \\ H^r(M_2) & \xrightarrow{p_2^*} & H(V) & \xrightarrow{\partial_2} & H^{r+1}(M'_2) \end{array}$$

Soient A_1, A_2 et A les images dans $H^*(V)$ des homomorphismes p_1^*, p_2^* et $p^* = p_1^* h^*$ resp. Nous allons montrer que :

A est l'intersection de A_1 et A_2.

Il est clair que $A \subset A_1 \cap A_2$; soit u un élément de $A_1 \cap A_2$, de degré r; posons $u = p_1^* u_1 = p_2^* u_2$; puisque u est une image par p_2, on a $\partial_2 u = 0$; donc, à cause de la commutativité du diagramme, $\partial_1 u = 0$, donc u_1 est de la forme $h(x)$, $x \in H^r(M)$ et par suite $u = p^*(x)$. C. Q. F. D.

Dans l'anneau de cohomologie de $H^*(V)$, V compacte connexe sur un corps,

formons alors toutes les algèbres permises; associons-les deux par deux de toutes les manières possibles, et formons les nombres :

$$k_p(V) = \operatorname*{Inf}_{i,j} \operatorname{rang}(A_i^p \cap A_j^p).$$

Ces nombres k_p sont ainsi déterminés intrinsèquement par l'homologie de la variété. Nous obtenons le théorème :

Théorème V.14. — *Pour qu'une variété compacte connexe* V *de dimension n puisse être plongée dans une variété* M *compacte connexe de dimension* $n+1$ *comme sous-variété homologue à zéro, il est nécessaire que les nombres de Betti de* M *vérifient les inégalités* $b_p(M) \geq k_p(V)$ *pour tout corps de coefficients.*

Supposons par exemple que M ait l'homologie de la sphère S^{n+1}; on devra avoir $k_p(V) = 0$ pour $p > 0$, ce qui donne :

Théorème V.15. — *Pour qu'une variété* V *puisse être plongée dans une sphère homologique de dimension* $n+1$ (a fortiori *dans* R^{n+1}), *il faut que son anneau de cohomologie* (*pour tout corps de coefficients*) *soit somme directe* (*à l'exception de* H^0 *et* H^n) *de deux algèbres permises* disjointes.

Sur le corps Z_2, on a vu dans la démonstration du théorème V.13 que toute algèbre permise contenait l'algèbre engendrée par les classes tangentes W^i : on retrouve ainsi le résultat bien connu de Whitney : les classes caractéristiques d'une V^n plongée dans R^{n+1} sont toutes nulles (*cf.* th. III.16).

La méthode précédente, bien que moins puissante que celle exposée à la fin du chapitre III, est cependant plus générale, en ce sens qu'elle n'est pas liée au corps Z_2, et aux carrés de Steenrod comme seule dépendance homologique; montrons-le par quelques exemples :

L'espace projectif réel P^3 de dimension 3 admet sur Z_2 un anneau de cohomologie engendré par des éléments de la forme $(1, d, d^2, d^3)$ pour les degrés 0, 1, 2, 3 resp., d étant la classe duale du cycle porté par la droite projective. Il n'existe qu'une seule algèbre permise, formée par 1 et d^2. Donc P ne peut être plongé dans R^4; le même raisonnement montrerait que l'espace projectif réel à $2k-1$ dimensions ne peut être plongé dans R^{2k}.

Autre exemple : Espaces lenticulaires. — Un espace p-lenticulaire de dimension 3 admet sur Z_p un anneau de cohomologie engendré par des éléments : 1, c, h, m de degrés 0, 1, 2, 3, resp. On a $m = c \cup h$, et la classe h de dimension 2 provient par réduction mod p de la classe entière $\frac{1}{p}\delta^* c$, image de la classe c par l'homomorphisme de Bockstein; par suite h *dépend homologiquement* de c, et il n'existe qu'une seule algèbre permise, engendrée par 1 et h. Donc un espace lenticulaire de dimension 3 ne peut être plongé dans R^4. La même

conclusion s'étend aux espaces lenticulaires de dim $2n-1$, qui ne peuvent être plongés dans R^{2n}.

Les résultats énoncés ici peuvent d'ailleurs être obtenus plus simplement comme conséquence du théorème de dualité d'Alexander-Pontrjagin [9]; nous ne les signalons que pour montrer le caractère très général de la méthode : dans les exemples cités plus haut, en effet, toutes les classes caractéristiques sont nulles.

BIBLIOGRAPHIE.

CARTAN (H.) :

[1] *Séminaire de Topologie algébrique* (*E. N. S.*), 1949-1950.

[2] *Ibid.*, 1950-1951.

[3] *Une théorie axiomatique des i-carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 425).

CHERN (S.) :

[4] *On the multiplication in the characteristic ring of a sphere-bundle* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 2).

CHERN-SPANIER :

[5] *The homology structure of sphere-bundles* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. A.*, t. 36, 1950, p. 248-255).

DIEUDONNÉ (J.) :

[6] *Une généralisation des espaces compacts* (*J. Math. pures et appl.*, t. 23, 1944, p. 65-76).

FOX (R. H.) :

[7] *On fibre-spaces*, II (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 49, 1943, p. 733-735).

GYSIN (W.) :

[8] *Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten* (*Comment. Math. Helv.*, t. 14, 1941, p. 61-121).

HANTZSCHE (W.) :

[9] *Einlagerungen von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume* (*Math. Z.*, t. 43, p. 38-58).

HOPF (H.) :

[10] *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* (*J. Crelle*, t. 163, 1930).

KNESER (H.) :

[11] *Eine Bemerkung über drei dimensionale Mannigfaltigkeiten* (*Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1925, p. 128-130).

LERAY (J.) :

[12] *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue* (*J. Math. pures et appl.*, t. 29, 1950, p. 1-139).

[13] *L'homologie d'un espace filtré dont la fibre est connexe* (*J. Math. pures et appl.*, t. 29, 1950, p. 169-213).

LIAO :

[14] *On locally connected stets and absolute neighbourhood retracts* (*Portugaliae Math.*, t. 8, 1949, p. 137-142).

PONTRJAGIN (L.) :

[15] *Characteristic cycles on differentiable Manifolds* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 21, n° 63, 1947, p. 233-284).

SERRE (J. P.) :

[16] *L'homologie singulière des espaces fibrés. Applications* (*Thèse, Ann. Math.*, 1951, p. 425-505).

STEENROD (N.) :

[17] *Homology with local coefficients* (*Ann. Math.*, t. 44, 1945, p. 10-27).

[18] *Product of cocycles andextensions of mappings* (*Ann. Math.*, t. 48, 1949, p. 290-320).

[19] *Cohomology invariants of mappings* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 4).

[20] *The topology of fiber-bundles*, Princeton, 1951.

[21] *Reduced powers of cohomology classes* (*Cours Collège de France*, mai 1951).

STIEFEL (E.) :

[22] *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* (*Comment. Math. Helv.*, t. 8, 1936, p. 320).

THOM (R.) .

[23] *Classes caractéristiques et i-carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 427), *Variétés plongées et i-carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 507).

WANG (H. C.) :

[24] *The homology groups of the fibre-bundles over a sphere* (*Duke Math. J.*, t. 16, 1949, p. 33-38).

WHITNEY (H.) :

[25] *Michigan Lectures*, 1941, p. 101-141.

[26] *Differentiable Mannifolds* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 645-680).

WU (W. T.) :

[27] *Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 508).

[28] *Les i-carrés dans une variété grassmannienne* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 918).

[29] *Sur les puissances de Steenrod* (*Colloque de Topologie*, Strasbourg, juillet 1951).

RECOUVREMENTS

DE

SURFACES DE RIEMANN

PAR M. L. FOURÈS.

A. — Recouvrements riemanniens.

1. RECOUVREMENTS. — Une surface est une variété à deux dimensions, triangulable, et, dans tout ce qui suit, orientable. Nous prendrons toujours comme famille de voisinages d'un point des domaines élémentaires, c'est-à-dire des ouverts homéomorphes à des cercles.

La notion de surface de recouvrement a été définie et utilisée à plusieurs reprises en Topologie et en Théorie des fonctions. Certains auteurs (De Kerekjarto, Ahlfors [1, 3, 6, 7]), font intervenir deux triangulations correspondantes de la surface donnée et de son recouvrement. Nous donnons ci-dessous des définitions locales du type de celles données en 1938 (1) par Stoïlow [9, 15], dont je regrette de n'avoir pas assez mis en évidence le rôle fondamental dans mon Mémoire de 1951.

Dans ce paragraphe t désignera une représentation continue d'une surface $\mathcal{S}$ dans une autre S de sorte que si $M \in S$, $t^{-1}(M)$ soit un ensemble isolé (formé de points isolés).

DÉFINITION 1. — $P \in S$ *est couvert sans ramification par* $\Delta \subset \mathcal{S}$ *(pour* t*), s'il existe un voisinage* $V(P) \subset S$ *tel que* $E_{V,\Delta} = \Delta \cap t^{-1}[V(P)]$ *ne soit pas vide et que toute composante connexe de* $E_{V,\Delta}$ *soit représentée biunivoquement par* t *sur* $V(P)$.

($\mathcal{S}$*,* t*) est un recouvrement de* S *relativement non ramifié si tout point* $P \in S$ *est couvert sans ramification par* $\mathcal{S}$ *(pour* t*)* (2).

(1) [9], p. 30.

(2) Il nous arrivera de dire que $\mathcal{S}$ est un recouvrement de S, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le choix de la fonction (ici t) qui représente $\mathcal{S}$ sur S.

D'après la première partie, il existe dans chaque composante connexe Γ_i de $E_{v,\Delta}$ un point $\mathfrak{A}_i$ tel que $t(\mathfrak{A}_i) = P$. La deuxième partie implique que t soit une représentation de $\mathfrak{S}$ sur S.

Cas particulier. — Supposons S quasi-simple, doublement connexe; soit $M \in S$; ou bien $t^{-1}(M)$ a un nombre fini n de points dans $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S}$ est alors doublement connexe, et n indépendant de $M \in S$ est l'ordre du recouvrement; ou bien $t^{-1}(M)$ a une infinité de points dans $\mathfrak{S}$ qui est alors simplement connexe; $(\mathfrak{S}, t)$ est le recouvrement universel de S.

Définition 2. — $P \in S$ *est couvert avec ramification par* $\Delta \subset \mathfrak{S}$ *(pour* t*), s'il existe* $V(P) \subset S$ *tel que :*

1° $E_{v,\Delta} \neq \emptyset$.

2° *Soit* Γ_i *une composante connexe quelconque de* $E_{v,\Delta}$: $\mathfrak{A}_i = \Gamma_i \cap t^{-1}(P) \neq \emptyset$.

3° $\Gamma_i^* = \Gamma_i - \mathfrak{A}_i$ *est un recouvrement relativement non ramifié d'ordre fini de* $V^*(P) = V(P) - P$.

$(\mathfrak{S}, t)$ *est un recouvrement de* S *relativement ramifié si tout point* $P \in S$ *est couvert avec ou sans ramification par* $\mathfrak{S}$ *(pour* t*).*

D'après (3°) et le fait que $V^*(P)$ est doublement connexe, Γ_i^* est doublement connexe et $\mathfrak{A}_i$ se réduit à un seul point, puisque $\mathfrak{A}_i$ est déjà un ensemble isolé.

Définition 3. — $P \in S$ *est régulièrement couvert par* $\mathfrak{S}$ *(pour* t*), s'il existe* $V(P) \subset S$ *tel que toutes les composantes connexes* Γ_i *de* $E_{v,\mathfrak{S}}$ *recouvrent* P *avec le même ordre de ramification.*

Si tout point $P \in S$ *est régulièrement couvert par* $\mathfrak{S}$ *(pour* t*),* $(\mathfrak{S}, t)$ *est un recouvrement régulièrement ramifié de* S.

Singularités. — P *est imparfaitement couvert par* $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$ *(pour* t*) si tout point de* $\mathfrak{S}' \cap t^{-1}(P)$ *est intérieur à un domaine* Δ *tel que* P *soit couvert par* Δ *(pour* t*), sans que l'on puisse prendre pour* Δ*, la surface* $\mathfrak{S}'$ *entière.*

En d'autres termes, le choix d'un $V(P)$ fixe pour $\mathfrak{S}$ entière est impossible.

Soit F_1 l'ensemble des points imparfaitement couverts par $\mathfrak{S}$ (pour t). Soit $S^* \subseteq S$ l'image de $\mathfrak{S}$ par t. Désignons par F_2 la frontière de S^* dans S et notons $F = F_1 \cup F_2$.

Remarquons que :

Les points de S^* *couverts avec ramification par* $(\mathfrak{S}, t)$ *sont isolés dans* $S^* - F_1$.

Parmi les éventualités possibles concernant l'aspect du recouvrement de S^* dans le voisinage d'un point isolé P de F, nous signalerons les deux suivantes :

a. Singularité générale logarithmique. — *Soit* $P \in \bar{S}^*$; *il existe* $V(P)$ *tel que* $V(P) - P \subset S^*$ *et tel que toute composante connexe de* $E_{v,\mathfrak{S}}$, *qui ne couvre*

pas P *soit un recouvrement de* $V(P) - P$ *relativement non ramifié et simplement connexe.*

b. Accumulation de points de ramification. — Soit $P \in F_1$. *Quelque petit que soit* $V(P)$ *toute composante connexe de* $E_{V,\mathcal{S}}$ *comprend au moins un point de* $t^{-1}(P)$.

t est une fonction uniforme sur $\mathcal{S}$; t^{-1} n'est pas uniforme sur S^*. Soit $\mathfrak{T} = t^{-1}(P)$ qui définit dans un voisinage de P une branche de t^{-1}. Cette branche admet P pour point de ramification d'ordre n s'il existe $V(P)$ tel que P soit couvert avec ramification d'ordre n, par la composante connexe de $E_{V,\mathcal{S}}$ qui contient $\mathfrak{T}$ (pour t).

2. Recouvrements riemanniens. — Dans les définitions 1, 2, 3 remplaçons les surfaces S et $\mathcal{S}$ par deux surfaces de Riemann R et $\mathcal{R}$, et t par une représentation φ assujettie aux mêmes conditions que t, et en outre conforme biunivoque en tout point où t était seulement biunivoque.

Soit D un domaine doublement connexe, quasi-simple. (Δ, t), $(\hat{o}, \theta)$ deux recouvrements relativement non ramifiés, d'ordre n, de D : toutes les branches de $\theta^{-1} \circ t$ ou $t^{-1} \circ \theta$ sont uniformes. Soit alors C le cercle-unité du plan de la variable z; Γ_1 et Γ_2 les cercles-unités des plans des variables ζ_1 et ζ_2. Notons C^*, Γ_1^*, Γ_2^* les domaines obtenus en retirant l'origine des cercles C, Γ_1, Γ_2. Soient $z = \varphi_1(\zeta_1)$ et $z = \varphi_2(\zeta_2)$ deux fonctions continues dans Γ_1 et Γ_2 avec $\varphi_1(o) = \varphi_2(o) = o$, et telles que (Γ_1^*, φ_1) et (Γ_2^*, φ_2), soient des recouvrements du même ordre de C^*. Alors $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ et ψ^{-1} sont uniformes avec $\psi(o) = o$, $\psi^{-1}(o) = o$. L'origine de Γ_2 est régulière pour ψ qui, par suite, est de la forme $\psi = \alpha\zeta_2$, $|\alpha| = 1$. (Γ_1^*, ζ_1^n) étant un recouvrement d'ordre n de C^*, tous les recouvrements d'ordre n de C^* sont de la forme $(\Gamma^*, k\zeta^n)$, lorsque Γ^* est un cercle-unité privé de l'origine.

Soit $(\mathcal{R}, \varphi)$ un recouvrement ramifié ou non de R. Soit $P \in R$, $\mathfrak{T} \in \mathcal{R}$ tel que $\varphi(\mathfrak{T}) = P$. Il existe $V(P)$ tel que la composante connexe $\mathcal{V}(\mathfrak{T})$ de $E_{V,\mathcal{R}}$ qui contient $\mathfrak{T}$ recouvre P avec l'ordre de ramification n. Les uniformisantes locales de $\mathcal{R}$ et R, respectivement $\mathfrak{T}$ et T, représentent $\mathcal{V}(\mathfrak{T})$ et $V(P)$ conformément sur les cercles-unités Γ et C des plans ζ et z.

Posons $\psi = T \circ \varphi \circ \mathfrak{T}^{-1}$, on a, d'après ce qui précède, $\psi = k\zeta^n$.

Théorème. — *Soit* $(\mathcal{R}, \varphi)$ *un recouvrement de* R *relativement ramifié :*

a. les points où φ *n'est pas biunivoque sont isolés;*

b. soit $P = \varphi(\mathfrak{T})$ *: il est possible de trouver sur* R *et* $\mathcal{R}$ *des voisinages* $V(P)$ *et* $\mathcal{V}(\mathfrak{T})$ *dont les paramètres* z *et* ζ *obtenus par les uniformisantes locales* T *et* $\mathfrak{T}$ *sont tels que* $T \circ \varphi \circ \mathfrak{T}^{-1} = k\zeta^n$.

Ainsi la définition 2 dans laquelle on a remplacé S, $\mathcal{S}$, t par r, $\mathcal{R}$, φ est donc une généralisation du recouvrement riemannien défini par Stoïlow [9]; il

s'agissait alors de la projection d'une surface de Riemann abstraite dans le plan complexe.

Définition 3 *bis*. — φ *est une projection riemannienne d'une surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *sur une autre* R, *si*, P *étant un point quelconque de* R, *il existe pour tout point* $\mathcal{P}_i$ *de* $\varphi^{-1}(P)$, *un domaine* $\Delta_i \subset \mathcal{R}$ ($\mathcal{P}_i \in \Delta_i$) *tel que* P *soit couvert avec ou sans ramification par* Δ_i (*pour la projection* φ).

φ étant une projection riemannienne de $\mathcal{R}$ sur R, $(\mathcal{R}, \varphi)$ ne sera un *recouvrement Riemannien* de R que si $(\mathcal{R}, \varphi)$ est un recouvrement de R au sens de la définition 2.

Ainsi φ peut être une projection riemannienne de $\mathcal{R}$ sur R sans que $(\mathcal{R}, \varphi)$ soit un recouvrement Riemannien de R, par exemple si P est un point singulier du type *b*.

Désignons par $\mathbf{S}u$ toute fonction de la variable u représentable dans un voisinage de $u = 0$ par une série convergente de la forme

$$\mathbf{S}u = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots, \qquad \alpha_1 \neq 0.$$

De même $\mathbf{SS}(u, v)$ représentera une série double en u et v, sans terme constant, convergente dans un voisinage de $u = 0$, $v = 0$:

$$\mathbf{SS}(u, v) = \alpha_{11} u + \alpha_{12} v + \alpha_{21} u^2 + \alpha_{22} uv + \ldots,$$

φ étant une projection riemannienne $M = \varphi(\mathfrak{M})$ on a, pour des uniformisantes locales T et $\mathfrak{T}$ de R et $\mathcal{R}$ opérant sur des voisinages particuliers de M et $\mathfrak{M}$, $z = T \circ \varphi \circ \mathfrak{T}^{-1} = k\zeta^n$. Si nous considérons des uniformisantes locales $z = T(M)$ et $\zeta = \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ pour des voisinages quelconques de M et $\mathfrak{M}$ on déduit de la relation précédente

$$z = \mathbf{S}(\mathbf{S}\zeta)^n = \alpha\zeta^n(1 + \mathbf{S}\zeta) \tag{1}$$

qui est invariante par toute transformation $\mathbf{S}$ effectuée sur ζ et z. Dans (1) les fonctions $\mathbf{S}$ sont complètement arbitraires.

3. Surfaces de Riemann. Points de ramification. — Soit $W = F(Z)$ une représentation d'une surface de Riemann R_Z dans une autre R_W. Cette représentation est analytique si pour tout couple de points Z et W associés par F, on peut trouver deux voisinages $V_Z(Z) \subset R_Z$ et $V_W(W) \subset R_W$ tels que si T_Z et T_W sont les uniformisantes locales de R_Z et R_W représentant V_Z et W_W sur les cercles-unités des plans des variables z et w, on ait dans un voisinage de l'origine

$$w = h(z) = T_W \circ F \circ T_Z^{-1} = \alpha_0 z^{\frac{p}{q}}\left(1 + \alpha_1 z^{\frac{1}{q}} + \alpha_2 z^{\frac{2}{q}} + \ldots\right).$$

Si l'on pose $z^{\frac{1}{q}} = u$, $w^{\frac{1}{q}} = s$ on a $s = \varphi(u)$, où φ est holomorphe univalente nulle à l'origine

$$w = \left[\varphi\left(z^{\frac{1}{q}}\right)\right]^p = \left(\mathbf{S}z^{\frac{1}{q}}\right)^p = az^{\frac{p}{q}}\left(1 + \mathbf{S}z^{\frac{1}{q}}\right) \tag{2}$$

qui est invariante par toute transformation **S** effectuée sur z et w. **S** est complètement arbitraire.

Définition 4. — *La surface de Riemann de la fonction analytique* $W = F(Z)$ *est l'ensemble* $(\mathcal{R}; \psi, \omega)$ *d'une surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *et de deux projections riemanniennes de* $\mathcal{R}$ *sur* R_Z *et sur* R_W : $Z = \psi(M)$, $W = \omega(M)$ $(M \in \mathcal{R})$ *telles que*

1° $F = \omega \circ \psi^{-1}$.

2° *Si une courbe fermée de* R_Z *a, par* F, *une image fermée sur* R_W, *son image dans* $\mathcal{R}$ *par* ψ^{-1} *est aussi fermée.*

Il existe sur R_Z un voisinage $V(Z)$ tel que la composante connexe Δ_V de $\psi^{-1}(V)$, contenant M, soit représentée par une uniformisante locale de $\mathcal{R}$, Θ_V sur le cercle-unité G_V du plan ζ_V, de manière que l'on ait $T_Z \circ \psi \circ \Theta_V^{-1} = \zeta_V^q$ (où T_Z est une uniformisante locale de R_Z qui représente V sur le cercle-unité du plan z). De même il existe sur R_W, $\mathcal{V}(W)$ tel que l'on ait avec des notations analogues aux précédentes $T_W \circ \omega \circ \Theta_{\mathcal{V}}^{-1} = \zeta_{\mathcal{V}}^p$. Soit $\Delta = \Delta_V \cap \Delta_{\mathcal{V}}$, M est intérieur à Δ qui a pour images dans G_V et $G_{\mathcal{V}}$, δ_V et $\delta_{\mathcal{V}}$. Ces images sont en correspondance conforme biunivoque $\zeta_{\mathcal{V}} = \varphi(\zeta_V)$ avec correspondance des origines. Soient D_z et D_w les images de Δ par $T_Z \circ \psi$ et par $T_W \circ \omega$. Remarquons que $\Theta_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \varphi \circ \Theta_V$ est l'identité sur $\mathcal{R}$. On a alors dans D_z :

$$w = f(z) = T_W \circ \omega \circ \psi^{-1} \circ T_Z^{-1} = T_W \circ \omega \circ \Theta_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \varphi \circ \Theta_V \circ \psi^{-1} \circ T_Z^{-1} = \left[\varphi\left(z^{\frac{1}{q}}\right)\right]^p.$$

Montrons que p et q ayant le sens donné au début, le développement de $w = f(z)$ ne peut se mettre sous une forme $w = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q'}}\right)^{p'}$ avec $p' < p$, $q' < q$: si non il y aurait dans V_Z une courbe fermée faisant q' fois le tour de Z à laquelle correspondrait dans $\mathcal{V}_W$ une courbe fermée faisant p' fois le tour de W. Il leur correspondrait sur $\mathcal{R}$ une courbe fermée; mais la projection par ψ d'une courbe fermée de $\mathcal{R}$, entourant M est une courbe fermée faisant au moins q tours autour de Z : donc $q' > q$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème. — *Soit* $(\mathcal{R}; \psi, \omega)$ *la surface de Riemann de* $W = F(Z)$. *Les ordres des projections riemanniennes* $Z = \psi(M)$ *et* $W = \omega(M)$ *sont respectivement les coefficients q et p du développement* $w = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^p$ *obtenu entre les paramètres z et w de voisinages quelconques de* Z *et* W.

B. — Fonctions d'automorphie.

1. Fonctions uniformes. — Soit $w = f(z)$ une fonction uniforme de la variable z. $z' = \varphi(z)$ est fonction d'automorphie de f si $f(z) = f[\varphi(z)]$. φ s'écrit aussi $f^{-1} \circ f$.

Dans le cas où w est méromorphe, si φ est à p déterminations elle est solution de $P(z, z') = 0$, où P est un polynome de degré p en z et en z' (Shimizu) [5]. En particulier pour $p = 1$ si f est rationnelle, φ est homographique (Fatou) [2], si f est transcendante, φ est linéaire (Shimizu, Marty [5, 10]); nous reviendrons dans la section D sur le théorème de Shimizu.

2. Fonctions multiformes. — Soit une fonction algébrique $w(z)$ définie par $P(w, z) = 0$, où P est un polynome de degré m en w, n en z. Écrivons que w prend la même valeur pour z et z' :

$$(A) \qquad P(w, z) = 0, \qquad P(w, z') = 0.$$

La correspondance obtenue entre z et z' par l'élimination de w dans (A) est donnée par $\mathcal{R}(z, z') = 0$, où $\mathcal{R}$ est le résultant de l'élimination de w dans (A).

$\mathcal{R}(z, z') = (z' - z)^m R(z, z')$, où $R(z, z')$ est de degré $m(n-1)$ par rapport à chacune des variables z et z'. Soient $z' = \varphi_1(z)$, $z' = \varphi_2(z)$ deux branches de $z'(z)$ définies par $R(z, z') = 0$. Posons $z'' = \varphi_2(z') = \varphi_2 \circ \varphi_1(z)$, il existe donc w_1 et w_2 tels que

$$P(w_1, z) = 0, \qquad P(w_2, z') = 0,$$
$$P(w_1, z') = 0, \qquad P(w_2, z'') = 0;$$

où l'on peut avoir $w_1 \neq w_2$. Donc la branche de fonction analytique définie localement par $\varphi_2 \circ \varphi_1$ n'est pas fonction d'automorphie.

Définition 5. — *Soit $\mathcal{R}$ la surface de Riemann de la fonction analytique $W = F(Z)$. $M' = \Phi(M)$ est fonction d'automorphie de $w = \omega(M)$ uniforme si $\omega(M) = \omega[\Phi(M)]$. $\Phi = \omega^{-1} \circ \omega$. La relation $Z' = \psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ qui en résulte entre $Z = \psi(M)$ et $Z' = \psi(M')$ est la projection sur R_Z de la fonction d'automorphie de $w = \omega(M)$.*

Dans ces conditions les fonctions d'automorphie de ω forment un hypergroupe.

3. Points de ramification. — Soit $M' = \Phi(M)$ une fonction d'automorphie : $W = \omega(M) = \omega[\Phi(M)]$. Considérons des voisinages de M, M', W (sur les surfaces $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$, R_W), et les uniformisantes locales qui les représentent sur les cercles-unités des plans ζ, ζ', w :

$$w = \alpha\zeta^p(1 + \mathbf{S}\zeta) = \alpha'\zeta'^{p'}(1 + \mathbf{S}\zeta') \qquad \text{ou} \qquad \alpha\zeta^{\frac{p}{p'}}(1 + \mathbf{S}\zeta) = \alpha'\zeta'(1 + \mathbf{S}\zeta') = \mathbf{S}\zeta'.$$

Si $\mathbf{S}\zeta' = u$, $\zeta' = \mathbf{S}u$:

$$(3') \qquad \zeta' = \mathbf{S}\left[\zeta^{\frac{p}{p'}}(1 + \mathbf{S}\zeta)\right],$$

$$(3) \qquad \zeta' = \gamma\zeta^{\frac{p}{p'}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(\zeta^{\frac{p}{p'}}, \zeta\right)\right].$$

Dans la forme (3) invariante par toute transformation **S** effectuée sur ζ et sur ζ', la série double **SS** n'est pas quelconque; (3) peut se mettre sous la forme d'une série simple ne contenant que des termes $\alpha_i \zeta^{\frac{\lambda p+\mu p'}{p'}}$ où $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$.

Projetons $M' = \Phi(M)$ sur la surface R_z par $Z = \psi(M)$:

$$w = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\mathbf{S} z'^{\frac{1}{q'}}\right)^{p'},$$

d'où

$$\mathbf{S} z'^{\frac{1}{q'}} = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p}{p'}}, \qquad z'^{\frac{1}{q'}} = \mathbf{S}\left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p}{p'}};$$

$$z' = \left[\mathbf{S}\left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right]^{q'}, \tag{4'}$$

$$z' = c z^{\frac{p}{p'}\frac{q'}{q}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(z^{\frac{p}{qp'}}, z^{\frac{1}{q}}\right)\right]. \tag{4}$$

Les formes (4) et (4') sont invariantes par toute transformation **S** effectuée sur z et z'. Dans (4) la série double **SS** n'est pas à coefficients quelconques et l'on peut la mettre sous la forme d'une série simple ne contenant que des termes $a_i z^{\frac{\lambda p+\mu p'}{qp'}}$, où $\lambda \geq m$, $\mu > 0$.

THÉORÈME. — *Soit* $M' = \Phi(M)$ *une fonction d'automorphie de la fonction analytique* $W = F(Z)$ *définie sur la surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *de cette fonction. Supposons que* $W = \omega(M)$ *soit d'ordre* p *en* M *d'ordre* p' *en* M', *la projection* $Z = \psi(M)$ *étant d'ordre* q *en* M, *d'ordre* q' *en* M'. *Dans ces conditions le développement de* $M' = \Phi(M)$ *est de la forme*

$$\zeta' = \gamma \zeta^{\frac{p}{p'}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(\zeta^{\frac{p}{p'}}, \zeta\right)\right] \tag{3}$$

qui ne contient que des termes $\zeta^{\frac{\lambda p+\mu p'}{p'}}$, $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$. *La projection de* Φ *par* ψ *soit* $\psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ *est de la forme*

$$z' = c z^{\frac{p}{p'}\frac{q'}{q}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(z^{\frac{p}{p'q}}, z^{\frac{1}{q}}\right)\right] \tag{4}$$

qui ne comprend que des termes $z^{\frac{\lambda p+\mu p'}{p'q}}$, $\lambda \geq m$, $\mu > 0$. *Les points de ramification de* Φ *ou de* $\psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ *ne sont pas du type général* (2) *des points de ramification d'une fonction analytique.*

4. FONCTIONS D'AUTOMORPHIE SANS POINTS DE RAMIFICATION. — Soit $M' = \Phi(M)$ une fonction d'automorphie sans points de ramification et dont l'inverse n'a pas de points de ramification.

Considérons l'uniformisante globale f de $\mathcal{R}$ qui réalise la représentation conforme de $\mathcal{R}$ sur un cercle C (ou le plan entier). f^{-1} est automorphe par les fonctions homographiques d'un groupe G proprement discontinu. Soit Φ_i une

branche quelconque de Φ (définie dans le voisinage d'un point). $g_i = f \circ \Phi_i \circ f^{-1}$ est homographique, donc $\omega \circ f^{-1}$ est automorphe pour une fonction homographique $g_i \notin G$, et pour toutes les fonctions du groupe proprement discontinu Γ obtenu en adjoignant à G la fonction g_i. Le groupe Γ comprend nécessairement toutes les fonctions $g_j = f \circ \Phi_j \circ f^{-1}$. En effet Φ_j s'obtient par prolongement de Φ_i suivant une courbe fermée sur $\mathcal{R}$ dont l'image dans C est ouverte et joint deux points se correspondant par une fonction de G. On a donc $g_j = a \circ g_i \circ b$, où a et $b \in G$, donc $g_j \in \Gamma$. Inversement toute fonction Φ_k obtenue par transposition $\Phi_k = f^{-1} \circ g_k \circ f$ d'une fonction $g_k \in \Gamma$, $g_k \notin G$, est une branche de Φ.

Les images par une même fonction g_j de deux points de C se correspondant par $a \in G$ ne se correspondent pas nécessairement par une fonction de G, dès que Φ a plus d'une branche : $g_j \circ a \circ g_j^{-1} \notin G$ $(a \in G)$.

G *est un sous-groupe invariant de* Γ *si et seulement si* Φ *est uniforme.* En général, le nombre de branches de Φ est égal au nombre de classes γ_i de Γ définies de la manière suivante :

tout g appartenant à Γ et n'appartenant pas à G, appartient à une classe γ_i; g_μ et $g_\nu \in$ même classe si $g_\mu \circ g_\nu^{-1} \in G$.

Il en résulte que Φ *et* Φ^{-1} *ont le même nombre de déterminations.*

5. Nombre de déterminations des fonctions d'automorphie. — *a. Domaines fondamentaux.* — Soit φ_0 une représentation d'une surface de Riemann R sur elle-même. Φ l'hypergroupe engendré par les itérées positives et négatives de φ_0. φ_i désignera une fonction quelconque de Φ. M et M′ sont dits équivalents s'il existe $\varphi_i \in \Phi$ tel que $M' = \varphi_i(M)$. *Supposons qu'il existe une projection riemannienne* π *de* R *sur* F *de sorte que tous les points d'une même classe d'équivalence aient même image sur* F; nous n'exigeons pas qu'un point de F soit l'image d'une seule classe de points équivalents. D'autre part si φ est une fonction d'automorphie, une telle projection existe : $\omega(M)$ elle-même; mais il est aussi possible qu'il existe d'autres projections que $\omega(M)$ satisfaisant à la condition posée et permettant une réalisation plus aisée de la condition suivante :

Supposons que l'on puisse tracer sur F *un système d'arcs simples de Jordan ne s'accumulant nulle part, ne séparant pas* F *et limitant sur* F *un domaine* F* *dans lequel toutes les branches de* π^{-1} *sont uniformes.* Soient d_i les domaines obtenus sur R comme images de F* par π^{-1}. Ces domaines tous étrangers et couvrant R (avec leurs frontières) constituent un pavage de R. Les domaines d_i sont appelés *domaines fondamentaux* de R relativement à π.

b. Les déterminations de φ_0. — Supposons les d_i en nombre fini n. Soit $M \in d_i$: il y a au plus un équivalent de M dans chaque $d_j (j \neq i)$. φ_0 a un

nombre fini p de déterminations. Soit $(\mathcal{R}; \tau, \sigma)$ la surface de Riemann de φ_0 : $\varphi_0 = \sigma \circ \tau^{-1}$. Toute branche d'une φ_j définie dans un d_i lui associe un autre d_k puisque φ associe des points équivalents et que d'après la nature de la frontière de F^*, si un point est frontière d'un d_i tous ses équivalents sont frontières de domaines d_j. Considérons sur $\mathcal{R}$ les images δ_λ des d_i par τ^{-1} : tout point de $\mathcal{R}$ a une image par τ dans un d_i, donc il appartient ou bien à un δ_λ où à la frontière d'un nombre fini d'entre eux; d'autre part si $\lambda \neq \mu$: $\delta_\lambda \cap \delta_\mu = \varnothing$. Les δ_λ constituent donc un pavage de $\mathcal{R}$, chaque domaine du pavage ayant pour image F^* par $\pi \circ \tau$.

L'image de δ_λ par σ est un d_k : appliquons τ et σ à δ_λ. Définie dans $\tau(\delta_\lambda) = d_j$, $\sigma \circ \tau^{-1}$ est une branche de φ_0 qui associe donc à d_j un autre domaine fondamental d_k. Puisque φ_0 a p déterminations, à d_i correspondent par τ^{-1}, p domaines δ_λ distincts, quel que soit d_i. $\mathcal{R}$ est donc pavée par np domaines δ_λ, et σ représente ces np domaines δ_λ sur n domaines d_k. Supposons que $\sigma^{-1}(d_k)$ soit formée de q domaines δ_λ : prolongeons σ^{-1}, depuis d_k jusqu'à $d_{k'}$, en évitant d'éventuels points de ramification de σ^{-1} : les $\delta_{\lambda'}$ obtenus sont tous différents, donc $q' \geqq q$, en désignant par q' le nombre de domaines δ_λ images de d_k, par σ^{-1}; mais en effectuant le prolongement de σ^{-1} depuis $d_{k'}$, jusqu'à d_k on trouvera $q \geqq q'$, donc $q = q' = p$. σ^{-1} étant à p déterminations $\tau \circ \sigma^{-1} = \varphi_0^{-1}$ l'est aussi.

Théorème. — *Soit φ une représentation d'une surface de Riemann* R *sur elle-même. Supposons qu'il existe une fonction π uniforme sur* R *admettant pour fonction d'automorphie φ_0. Supposons de plus que la décomposition de* R *en domaines fondamentaux pour π soit possible et se fasse suivant un nombre fini de domaines.*

Dans ces conditions, φ_0 et toutes les fonctions de l'hypergroupe des itérées de φ_0 ont même nombre de déterminations que leurs inverses.

En particulier : *toutes les fonctions d'automorphie des fonctions algébriques ont même nombre de déterminations que leurs inverses.*

6. Remarque sur les fonctions d'automorphie. — Le théorème du paragraphe 3 prouve que si l'on se donne une représentation analytique $Z' = \Phi(Z)$ d'une surface de Riemann R_Z sur elle-même, il n'existe pas nécessairement de fonction analytique $W = F(Z)$ admettant Φ comme projection de fonction d'automorphie. Mais si l'on considère dans R_Z un domaine D suffisamment petit (pour que Φ représente D sur $D' \subset R_Z$ conformément et biunivoquement, et que certaines conditions de régularité des frontières soient satisfaites) on peut toujours construire un domaine $\Delta \subset R_Z$, $\Delta \supset D$, $\Delta \supset D'$ et une fonction $W = F^*(Z)$ uniforme dans Δ et admettant dans Δ, Φ comme fonction d'automorphie [18].

C. — Arbres topologiques régulièrement ramifiés.

1. Définitions. — Si (Σ, t) est un recouvrement d'une surface B_0 close, de genre zéro, relativement ramifié en un nombre fini de points $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, q)$, on peut représenter Σ par son arbre topologique T. Les côtés sont de q sortes notés $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, a_q$, et se succèdent dans cet ordre si l'on tourne autour d'un nœud $\circ$ dans le sens direct, autour d'un nœud $\times$ dans le sens rétrograde [11, 16].

Nous dirons que T est *tracé sur une surface* S si T est effectivement tracé sur la surface S et si de plus toute portion de S limitée par des côtés de T et ne contenant elle-même aucun côté de T à son intérieur, est simplement connexe.

T étant donné, on peut définir un polygone de T comme étant une surface simplement connexe limitée par une ligne polygonale formée de chaînons des types a_i et a_{i+1} seulement, cette ligne polygonale étant soit fermée soit ouverte, et dans ce dernier cas, comprenant une infinité de chaînons.

Nous ne considérerons ici que des arbres T tracés sur des surfaces S dont ils constituent une triangulation, c'est-à-dire des arbres T dont les polygones ont tous, un nombre fini de côtés.

Désignons par K_i les polygones tracés sur S par T. Dans chaque K_i choisissons un point Ω_i que nous appellerons le « centre » de K_i. Soient $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_q}$ les polygones ayant N_j pour sommet commun. Joignons Ω_{i_k} et $\Omega_{i_{k+1}}$ (k défini mod q) : nous obtenons un polygone K^j. Les K^j constituent une triangulation de S et par l'intermédiaire de cette triangulation on obtient une correspondance topologique entre S et Σ : $\Sigma \overset{\tau}{\to} S$.

Remarque. — (Σ, t) étant par définition un recouvrement de B_0, avec les définitions que nous avons adoptées, il n'y a pas de points de B_0, imparfaitement couvert, et tous les polygones de T ont un nombre fini de côtés.

Nous dirons que *deux nœuds* A *et* B *de* T *sont équivalents* ($A \sim B$) *s'il existe un homéomorphisme de* T *sur lui-même emmenant* A *en* B. T *est régulièrement ramifié s'il y a seulement un nombre fini de classes de nœuds équivalents.*

Un ensemble E de nœuds de T est connexe si l'on peut joindre deux nœuds de E par une chaîne de traits de liaison ne reliant que des nœuds de E.

Dans l'étude qui suit nous supposerons T régulièrement ramifié.

2. Cellules. — *Une cellule est un ensemble connexe fini de nœuds de* T *tel qu'il n'y ait pas dans la cellule deux nœuds équivalents, et que tout nœud de* T *soit équivalent à un nœud de la cellule.*

Construction. — Soit E un ensemble de nœuds de T : $M \notin E$ est dit extrapériphérique pour E, s'il est reliable par un seul trait de liaison à un nœud de E; $N \in E$ est périphérique pour E, s'il est reliable par un seul trait de liaison à un nœud extrapériphérique.

Choisissons un nœud $A = A_0^{m_0} \in T$. Soient $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{n_1}$ les nœuds extrapériphériques pour $A_0^{m_0}$. Construisons C_1 de la manière suivante : ordonnons d'abord l'ensemble des couples d'entiers : $(x, y) < (x', y')$ si $x < x'$ ou bien si $x = x'$ avec $y < y'$.

Dans ces conditions $A_1^\nu \in C_1$ si $A_1^\nu \not\sim A_j^\mu$ où $(j, \mu) < (1, \nu)$. Désignons par $A_0^{m_0}$, $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{m_1}$ les nœuds de C_1, et d'une façon générale $A_0^{m_0}$, $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{m_1}$, $A_2^1, \ldots, A_2^{m_2}, A_3^1, \ldots, A_i^{m_i}$ les nœuds de C_i. Désignons par $A_{i+1}^1, A_{i+2}^1, \ldots, A_{n_{i+1}}^{i+1}$ les nœuds extrapériphériques pour C_i :

$$A_{i+1}^\nu \in C_{i+1} \quad \text{si} \quad A_{i+1}^\nu \not\sim A_j^\mu, \quad \text{où} \quad (j, \mu) < (i+1, \nu).$$

Ainsi tout nœud de C_i appartient aussi à C_{i+1}. Mais la suite des C_i ne peut être croissante puisqu'il n'y a dans T qu'un nombre fini de classes de nœuds équivalents; donc à partir d'un certain rang $C_{k+1} \equiv C_k \equiv C$.

Association des côtés libres de C. — Un côté libre de C est un trait de liaison de T joignant un nœud périphérique de C à un nœud extrapériphérique. Soit Q extrapériphérique : il possède un équivalent R dans C. Soit α un côté libre de C joignant Q à un nœud périphérique Q' : le côté α' de même nature que α et issu de R joint R à R'; $R' \not\equiv Q'$ si non $Q \equiv R$. $R' \sim Q'$ donc $R' \notin C$ et R est périphérique pour C. Ainsi les côtés $RR'(\alpha')$ et $QQ'(\alpha)$ sont tous deux des côtés libres : nous les dirons associés. Il est immédiat que cette association est réciproque et qu'un côté libre n'a qu'un seul associé.

C *est une cellule.* — A partir d'un nœud quelconque P_i de T, équivalent à P de C, on peut construire d'une manière unique un ensemble C_i homologue de C dans l'homéomorphisme de T sur lui-même qui emmène P_i sur P. Deux ensembles C_i sont ou bien confondus ou totalement étrangers.

Tout nœud de T a un équivalent dans C : soit $P \in T$, on peut le joindre à $O \in C$ par une ligne polygonale L d'un nombre fini de côtés. Parcourons L (de O vers P). Soit P_1 le premier point extrapériphérique de L pour C, il a un équivalent P'_1 dans C et l'on peut construire C_1 à partir de P_1 comme C est construit à partir de P'_1; C_1 et C n'ont aucun nœud commun. Soit alors P_2 le premier nœud extrapériphérique pour $C \cup C_1$: il est extrapériphérique pour l'un au moins des ensembles C et C_1 et a donc un équivalent $P'_2 \in C$. Construisons C_2 à partir de P_2 comme C est construit à partir de P'_2, ... Comme $P_2 \neq P_1$ et que L comprend seulement un nombre fini de nœuds, il existe $C_n \ni P$. Donc P a un équivalent dans C, évidemment unique. L'ensemble C constitue bien une cellule que nous noterons $\mathfrak{C}$.

3. T COMME RECOUVREMENT RAMIFIÉ. — Si $\mathfrak{C}$ n'est pas tracée sur le plan, découpons certains côtés de manière à former un ensemble $\mathfrak{C}^*$ tracé sur le plan : $\mathfrak{C}$ s'obtiendra à partir de $\mathfrak{C}^*$ en identifiant certains côtés libres. Bordons $\mathfrak{C}^*$ par un polygone Π de manière que chaque côté libre de $\mathfrak{C}^*$ aboutisse à un côté de Π.

Associons deux à deux les côtés de Π comme les côtés libres de $\mathfrak{C}^*$ qui y aboutissent. L'identification de deux côtés associés transforme Π en une surface close S_0, et $\mathfrak{C}^*$ en un arbre T_0 qui réalise une triangulation de S_0. Désignons par p^* la représentation de T sur T_0 associant à un nœud de T l'image dans T_0 de son équivalent dans $\mathfrak{C}$. Soit K un polygone de S. Chacun de ses côtés a une image unique sur T_0. A la périphérie $\tilde{K}$ de K est alors associée par p^* la périphérie $\tilde{K}_0$ d'un polygone K_0 découpé par T_0 sur S_0. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ tous les nœuds d'une même classe d'équivalence sur $\tilde{K}$ et A_0 leur image sur $\tilde{K}_0$; ν est appelé la *caractéristique* de K. Soit Ω le centre de K auquel nous faisons correspondre un point Ω_0 intérieur à K_0 (centre de K_0). Introduisons dans K_0 le « rayon » $\Omega_0 A_0$ et dans K les rayons $\Omega A_i (i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Établissons une correspondance entre ΩA_i et $\Omega_0 A_0$ de sorte que Ω_0 et A_0 soient les images respectives de Ω et A_i. A la périphérie du secteur $A_i \Omega A_{i+1}$ est associée ainsi par une correspondance $\check{p}$ la périphérie du secteur $A_0 \Omega_0 A_0$ « d'ouverture 2π », la restriction à T de $\check{p}$ étant p^*. $\check{p}$ peut être prolongée en une correspondance topologique entre l'intérieur du secteur $A_i \Omega A_{i+1}$ et l'intérieur du secteur $A_0 \Omega_0 A_0$. Donc p^* se prolonge dans K en une représentation p de K sur K_0 de sorte que (K, p) soit un recouvrement d'ordre ν de K_0 relativement ramifié à l'ordre ν au centre de K_0 et seulement en ce point.

Le prolongement de p^* en p pouvant se faire dans tout polygone de S, (S, p) est un recouvrement de S_0 relativement ramifié aux centres Ω_0' de certains polygones découpés par T_0 sur S_0. Montrons que ce recouvrement est régulier : considérons un polynome K_0 de S_0. On peut caractériser K_0 sur S_0 par la donnée d'un de ces nœuds périphériques, soit N_0, et la nature des deux côtés aboutissant en ce nœud. Tous les polygones de S représentés sur K_0 par p ont chacun parmi leurs sommets au moins un nœud de l'ensemble $p^{-1}(N_0)$. Tous les nœuds de cet ensemble sont équivalents, donc tous les polygones admettant l'un de ces nœuds pour sommet et limités par des côtés de même nature que ceux de K_0, ont la même caractéristique.

Théorème. — *A toute surface Σ représentée par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygone infini, on peut associer une surface Σ_0 close et une représentation π de Σ sur Σ_0 de sorte que (Σ, π) soit un recouvrement de Σ_0 régulièrement et relativement ramifié en un nombre fini de points* (*cf.* définitions 3, A. 1).

En effet $\Sigma \xrightarrow{\sigma} S$ (σ biunivoque bicontinue). (S, p) est un recouvrement de S_0 relativement et régulièrement ramifié. Soit alors Σ_0 la surface (considérée comme associée à une projection de Σ_0 sur B_0 qui en fait un recouvrement de B_0) représentée par $T_0 = p(T)$; Σ_0 est une surface close et $\Sigma_0 \xrightarrow{\sigma_0} S_0$. Donc il existe une représentation $\pi = \sigma_0^{-1} \circ p \circ \sigma$ de Σ sur Σ_0 telle que (Σ, π) est un recouvrement de Σ_0 relativement et régulièrement ramifié.

4. T simplement connexe. — Supposons maintenant T régulièrement ramifié

et simplement connexe, c'est-à-dire tracé sur le plan. Nous avons démontré antérieurement le résultat suivant [17] :

Étant donné sur une surface close S_0, *n points* Ω_0^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et n indices* ν_i *associés aux* Ω_0^i *il existe une surface close* S_1 *et une représentation* p_0 *de* S_1 *sur* S_0 *de sorte que* (S_1, p_0) *soit un recouvrement de* S_0 *régulièrement ramifié à l'ordre* ν_i *aux* Ω_0^i *et seulement en ces points, (sauf si* $n = 2$ *avec* $\nu_1 \neq \nu_2$ *et* S_0 *de genre zéro*).

Dans le cas actuel S est un plan. Choisissons une détermination particulière $\hat{p}_0^{-1}$ de p_0^{-1} et montrons que $p_1 = \hat{p}_0^{-1} \circ p$ est uniforme :

1° *localement :* soit $A \in S$. Si $A \neq \Omega_i$, p_2 est localement biunivoque comme p et $\hat{p}_0^{-1}$. Si $A \equiv \Omega_i$, soient $A_0 = p(A)$, $A_1 = \hat{p}_0^{-1}(A_0)$. Choisissons sur S_0 un voisinage V_0 de A_0 identique ou contenu dans le polygone de S_0 qui contient A_0. Soient V et V_1 les images de V_0 par p^{-1} et $\hat{p}_0^{-1}$. p_1 réalise une correspondance biunivoque entre V et V_1 ;

2° *globalement :* soit C une courbe fermée joignant A à lui-même dans le plan S. D'après 1° on peut, en modifiant C dans un voisinage de A, supposer que A est un nœud de T, et cela sans changer la nature, fermée ou ouverte, de C_1 image de C par p_1. Soient A_1 et A_1' les extrémités de C_1. Désignons par opération (r) l'opération suivante : soit γ un arc de C intérieur ou frontière d'un polygone K ayant avec l'intérieur de C une intersection non vide. Remplaçons γ par la frontière de P intérieure à C. L'opération (r) ne change pas les points A_1 et A_1'.

Par une répétition finie de l'opération (r), on peut réduire C au point A, alors $A_1 \equiv A_1'$. C_1 est donc une courbe fermée.

Dans ces conditions, (S, p_1) est un recouvrement relativement non ramifié de S_1. Soit $T_1 = p_1(T) = \hat{p}_0^{-1}(T_0)$ et soit (Σ_1, τ_1) le recouvrement de B_0 représenté par T_1. $\Sigma_1 \xrightarrow{\sigma_1} S_1$ où σ_1 est bicontinue biunivoque. Posons $\pi_1 = \sigma_1^{-1} \circ p_1 \circ \sigma$, (Σ_1, π_1) est un recouvrement relativement non ramifié de Σ_1. Si nous remarquons que Σ_1 est une surface close on obtient le résultat suivant :

Théorème. — *A toute surface* Σ *simplement connexe représentée par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygone infini, on peut associer une surface* Σ_1 *close et une représentation* π_1 *de* Σ *sur* Σ_1 *de sorte que* (Σ, π_1) *soit un recouvrement de* Σ *relativement non ramifié.*

5. Surfaces de Riemann. — Si B_0 et Σ sont des surfaces de Riemann et (Σ, τ) un recouvrement riemannien de B_0, alors τ_0 et τ_1 sont des projections riemanniennes ainsi que $\pi = \tau_0^{-1} \circ \tau$, $\pi_0 = \tau_0^{-1} \circ \tau_1$ et $\pi_1 = \tau_1^{-1} \circ \tau = \tau_0^{-1} \circ \tau$ puisque π, π_0, π_1 ainsi définis sont uniformes.

THÉORÈME. — *A toute surface de Riemann $\mathcal{R}$ simplement connexe, représentable par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygones infinis, on peut associer une surface de Riemann $\mathcal{R}_1$ close et une représentation riemannienne ω de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}_1$, de sorte que $(\mathcal{R}, \omega)$ soit un recouvrement de $\mathcal{R}_1$ relativement non ramifié.*

Remarquons que toute surface de Riemann close $\mathcal{R}_1$ peut être projetée sur une surface de Riemann close de genre zéro de sorte que $\mathcal{R}_1$ soit représentable par un arbre topologique; le recouvrement universel de $\mathcal{R}_1$ est représentable par un arbre topologique régulièrement ramifié sans polygones infinis.

Les relations entre les diverses surfaces sont résumées dans le tableau ci-dessous où les signes $\leftrightarrow$ indiquent des représentations topologiques (biunivoques), $\rightarrow$ des représentations continues (projections) et $\Rightarrow$ des projections riemanniennes.

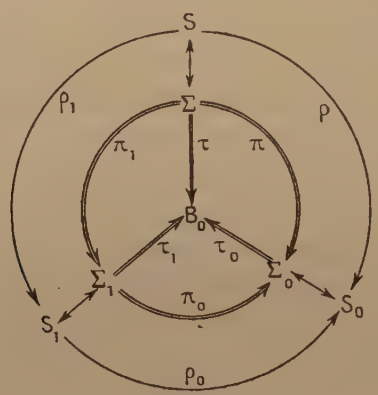


Fig. 1.

D. — Sur un théorème de Shimizu.

1. INTRODUCTION. — Fatou (1919) a montré que si une fonction rationnelle admettait une fonction d'automorphie uniforme, celle-ci était homographique (*cf.* aussi Gunnar of Hällström [2, 12, 14].

Shimizu (1931) a montré que les fonctions d'automorphie uniformes des fonctions méromorphes transcendantes étaient de la forme $e^{i\theta\pi}z + b$, où θ est rationnel. La démonstration de Shimizu utilise une décomposition en facteurs de $f(z') - f(z)$ due à Gronwall et Hahn, et le théorème suivant de Julia [4] :

Le complémentaire du domaine d'existence de $z'(z)$ définie par $g(z', z) = 0$, où g est entière, ne comprend pas de continu.

Dans le cas général où $z'(z)$ est multiforme, ce théorème n'indique pas que le prolongement de $z'(z)$ n'est jamais arrêté par un continu. En d'autres termes considérons la surface de Riemann R de $z'(z)$ et sa projection sur le plan z :

il pourrait arriver que R admette un continu frontière $\mathcal{C}$ se projetant en C et l'on ne sera pas en contradiction avec le théorème de Julia si C est intérieur à la projection d'un domaine de R, non contigu à $\mathcal{C}$.

Si la méthode de Shimizu, peut avec quelques précautions, démontrer la première partie du théorème 11 de son Mémoire qui s'énonce comme suit :

Si $\Phi(z)$ satisfaisant à $f(\Phi)=f$ est uniforme dans un domaine du plan, c'est une fonction entière.

Cette même méthode ne peut servir à démontrer la seconde partie :

Si $\Phi(z)$ est à p déterminations dans un domaine du plan, $\Phi(z)$ est une algébroïde finie.

Nous allons prouver ici par la seule utilisation du théorème d'Iversen que si $\Phi(z)$ est à p déterminations dans un domaine quelconque du plan, $\Phi(z)$ est à p déterminations dans tout le plan, sans autre singularité que des points de ramification.

2. Théorème de Shimizu. — Lemme. — *Soient $f(z)$ méromorphe et φ_0 un élément régulier de $f^{-1}\circ f$ défini en* O. *Soit (b) une bande quelconque contenant* O *et un point ω : il est possible de prolonger φ_0 jusqu'en ω exclusivement suivant une courbe intérieure à (b).*

On peut d'abord en diminuant au besoin le domaine couvert par (b) supposer que (b) ne contient pas de zéros de $f'(z)$, sauf peut-être O ou ω. Ainsi si $f(O)=O_1$, $f(\omega)=\omega_1$, l'image de (b) étant une bande (β), il y a une branche de f^{-1} qui prend en O_1 la valeur zéro et qui par prolongement dans (β) associe à (β) la bande (b). La branche de f^{-1} définie en O_1, qui intervient comme facteur de gauche dans l'expression $\varphi_0=f^{-1}\circ f$, est prolongeable de O_1 jusqu'à ω_1 exclusivement [si cette branche n'est pas uniforme en O_1, on peut la définir en utilisant un point O′ de (b), voisin de O], suivant une courbe A intérieure à (β). φ_0 est donc prolongeable de O jusqu'en ω exclusivement suivant une courbe L intérieure à (b).

Domaine de définition. — D'après le lemme précédent le domaine de définition de Φ obtenu par prolongement de φ_0 est partout dense dans le plan complexe C_z.

Multiformité. — Considérons un système fini d'éléments réguliers φ_i : en prolongeant φ_{i+1} dans la bande définie par le prolongement de φ_i on peut trouver L intérieure à (b) joignant O à ω et suivant laquelle les éléments φ_i et φ_{i+1} sont prolongeables jusqu'à ω exclusivement.

Si Φ est à p déterminations $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ en A, il existe quel que soit B, dans un voisinage de B des points où Φ a au moins p déterminations distinctes obtenues par prolongement de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ suivant une même courbe L. Si deux des éléments ainsi obtenus étaient confondus en φ^*, on devrait pouvoir

prolonger φ^* jusqu'en A suivant L et obtenir deux déterminations distinctes ce qui est impossible puisque L ne contient pas de zéros de f' autres que A et B éventuellement (l'élément initial de ce prolongement astreint seulement à être dans un voisinage de B peut être défini en un point où $f' \neq 0$).

Supposons Φ effectivement à p déterminations dans un domaine D_1 de C_z. En aucun point de C_z, Φ ne peut avoir plus de p déterminations. Φ a donc effectivement p déterminations dans un domaine partout dense de C_z.

Singularités de Φ. — Supposons la branche φ_i définie en A prolongeable suivant γ jusqu'en x exclusivement. Soit x_n une suite de points sur γ tendant vers x, y_n leurs images par φ_i; $\chi_n = f(y_n) = f(x_n)$. Soit y un point limite de la suite (y_n). Si y est à distance finie, $f(y)$ est déterminée et $f(y) = f(x)$; d'après B.3 (p. 188) φ_i qui associe y à x est régulière au point x (peut-être avec ramification). Nécessairement y est rejeté à l'infini.

Soit A régulier pour toutes les branches de Φ. Considérons dans le plan C_z un domaine doublement connexe Δ, tel que $A \in \Delta$, $f(z) \neq f(x)$ pour $z \in \Delta$, $x \notin \Delta$, $\infty \notin \Delta$, Δ séparant x et l'infini, suivant laquelle toutes les déterminations de Φ (en A) sont prolongeables jusqu'en A (ici inclusivement). Désignons par D l'intérieur de L ($D \ni x$, $D \not\ni \infty$).

Soient $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \ldots, \mathcal{L}'_p$ toutes les images par Φ de L; considérées dans leur ensemble elles constituent nécessairement un système de k courbes fermées $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ ($k \leq p$).

Prolongeons φ_i dans D de toutes les manières possibles, on obtient dans C_z un domaine d_x limité en particulier par des courbes $\mathcal{L}_i$: nous supposerons que ces $\mathcal{L}_i$ sont $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_h$, les autres étant $\mathcal{L}_{h+1}, \ldots, \mathcal{L}_k$.

Soit $\mathcal{D}$ l'extérieur de toutes les courbes $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, h$). Choisissons y_0 sur γ suffisamment près de x pour que $\eta_0 = \varphi_i(y_0)$ soit dans $\mathcal{D}$. C'est possible puisque d'après le début de ce paragraphe les y_n tendent vers l'infini [$y_n = \varphi_i(x_n)$, où $x_n \to x$]. Considérons dans $\mathcal{D}$ une bande quelconque $\mathcal{B}$ contenant η_0 et un point arbitraire η. Il est possible de prolonger φ_i^{-1} (déterminé en η_0) dans $\mathcal{B}$ de η_0 jusqu'à η exclusivement, suivant une courbe λ d'image l. l ne peut sortir de L, si non soit m le premier point d'intersection de l avec L; prolongeons φ_i de y_0 jusqu'à m : on définit ainsi en m un élément φ_k de Φ qui représente m en $\mathfrak{M}$ sur une courbe $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, \ldots, h$), puisque φ_k a été obtenu par prolongement de φ_i dans D.

Ainsi d_x est un ouvert partout dense dans $\mathcal{D}$. On peut avoir construit L dans un voisinage de x suffisamment petit pour que si $z \in D$, $|f(z) - f(x)| < a$. Soit alors (u_n) une suite de points du plan z pour lesquels $f(u_n) = U$ avec $f(z) \neq U$ pour $z \in D$. Il y a dans tout voisinage de u_n des points effectivement atteints par prolongement de φ_i dans $\mathcal{D}$. En ces points $f(z)$ prend des valeurs voisines de U. On ne peut avoir $f(\Phi) = f$ pour ces points.

Φ n'a donc pas de singularité dans D. Φ est donc dans tout C_z à p déterminations sauf aux points de ramification. Φ n'a pas non plus de pôle.

Alors Φ peut être définie par l'équation

$$A_0(z)\Phi^p + A_1(z)\Phi^{p-1} + \ldots + A_p(z) = 0,$$

où les $A_i(z)$ sont des fonctions entières; A_0 toujours $\not\equiv 0$ peut être pris constant. On dit que Φ est une algébroïde finie.

Le théorème 11 de Shimizu est ainsi démontré. On peut poursuivre l'étude de Φ comme Shimizu l'a fait en utilisant par exemple les résultats de Fatou sur l'itération des fonctions entières. L'étude est plus difficile dans le cas où $z' = \Phi(z)$ est à $p (p > 1)$ déterminations.

Les résultats sont les suivants :

Si Φ est uniforme dans un domaine du plan, alors $z' = e^{i\theta\pi}z + b$, θ rationnel.
Si Φ est à p déterminations dans un domaine du plan, alors

$$z'^p + az^p + P(z', z) = 0, \qquad \text{où} \quad |a| = 1$$

et où $P(z', z)$ est un polynome en z et z' de degré $\leq p$ par rapport à l'ensemble des variables z et z', de degré $< p$, par rapport à chacune d'elles.

E. — Arbre topologique et fonction d'automorphie (1).

1. Nœuds équivalents. — Soit maintenant $(\mathcal{R}, \omega)$ un recouvrement riemannien d'une surface de Riemann B_0 conformément équivalente au plan privé d'un nombre fini de points. Ces points peuvent être imparfaitement couverts par $\mathcal{R}$ pour ω, ou même peuvent ne pas être couverts du tout.

Conventionellement chaque nœud de T représente un demi-domaine fondamental de $\mathcal{R}$ (pour ω). L'association de deux nœuds de même espèce sur T définit une fonction d'automorphie de ω, dont on peut étudier la multiformité et les points de ramification, sur T lui-même.

Supposons que ω admette une fonction d'automorphie biuniforme (déjà étudiée en B.4). Soient A_1 et A_2 deux nœuds de T, images de deux demi-domaines de $\mathcal{R}$, se correspondant par φ. A tout parcours fermé sur T, d'origine A_1, correspond un parcours fermé d'origine A_2 et inversement, c'est donc que A_1 et A_2 sont équivalents sur T. Inversement si T possède deux nœuds équivalents, la fonction d'automorphie de ω définie par la correspondance entre ces deux nœuds est biuniforme. Si l'on considère alors l'uniformisante globale f de $\mathcal{R}$, $\omega \circ f^{-1}$ est une fonction uniforme dans le plan, ou le cercle, automorphe pour une fonction homographique n'appartenant pas au groupe obtenu par

(1) *Voir* aussi [13].

le recouvrement de $\mathcal{R}$. Si $\omega \circ f^{-1}$ est total automorphe la cellule de T comprend seulement deux nœuds d'espèces différentes, et inversement.

2. Cas particulier. — Nous allons, par exemple, montrer que le théorème de Shimizu de la section D ne peut être étendu au cas des fonctions uniformes dans le cercle-unité.

Prenons pour surface B_0 le plan entier sur lequel nous fixons six points. Construisons alors la surface de Riemann $\mathcal{R}$ recouvrement de B_0 ramifié en ces six points et représentable par l'arbre topologique suivant :

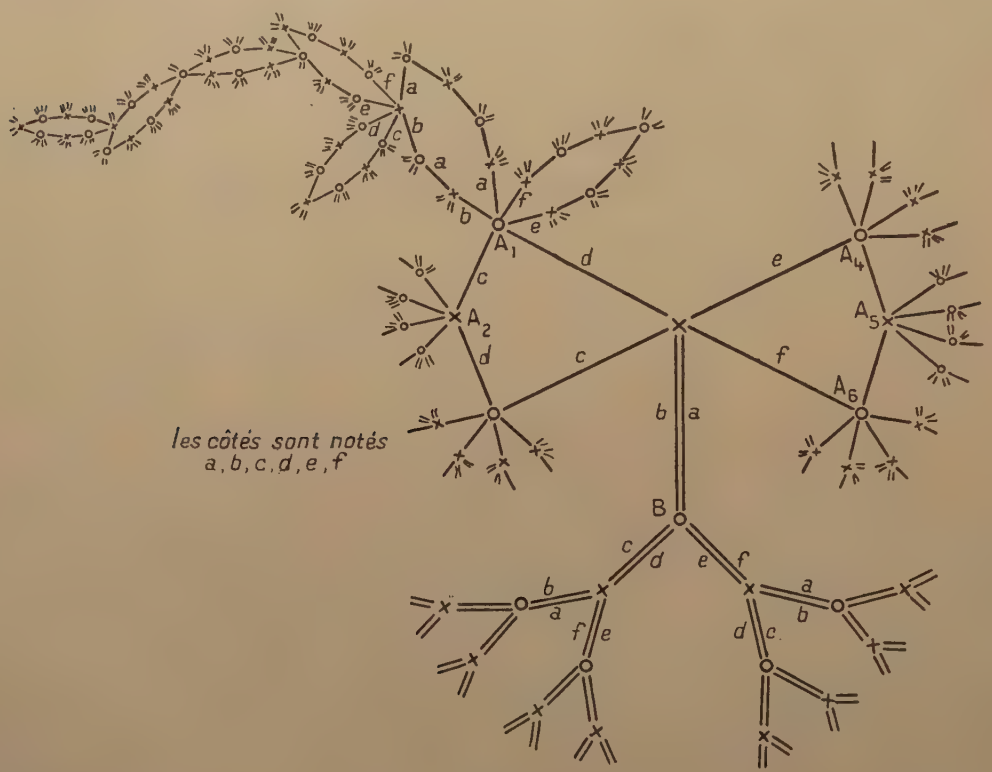


Fig. 2.

Sur cet arbre les points situés au delà des A_i, dans la partie supérieure appartiennent chacun à trois octogones, tandis que ceux situés au-dessous de B sont chacun communs à trois polygones plats (deux côtés). Toute fonction d'automorphie de l'uniforminante de $\mathcal{R}$, associant un nœud « au-dessous » de B à un nœud « au-dessus » des A_i est uniforme mais pas son inverse. C'est encore le cas si l'on prend la fonction d'automorphie définie par M(P) où l'on prend M en B et P en l'un des six A_i.

$\mathcal{R}$ est bien une surface de Riemann, simplement connexe, nécessairement de type hyperbolique.

Bibliographie.

[1] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flache*, 1913.

[2] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 67-68, 1919-1920).

[3] De Kerekjarto, *Vorlesungen uber Topologie*, Springer, 1923.

[4] G. Julia, *Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière* $G(x, y) = 0$ (*Bull. Soc. Math. France*, t. 54, 1926).

[5] T. Shimizu, *On the fondamental domains and the groups for meromorphic functions* (*Jap. J. Math.*, t. 8, 1931).

[6] Seifert et Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1936.

[7] L. Ahlfors, *Zur Theorie der Uberlagerungsflachen* (*Acta Math.*, t. 65, 1935).

[8] L. Ahlfors, *Geometrie der Riemannschen Flächen* (*Congrès international des mathématiciens*, Oslo, 1936).

[9] S. Stoilow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, 1938.

[10] F. Marty, *Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 53, 1936).

[11] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Functionen*, Springer, 1936.

[12] Gunnar af Hällström, *Uber Substitutionen, die eine rationale Funktion invariant lassen* (*Acta. Acad. Aboens.*, t. 15, n° 6, 1946).

[13] Gunnar af Hällström, *On the study of algebraic functions of automorphism by help of graphs* (*X. Skand. Math. Kongr. København*, 1946).

[14] Gunnar af Hällström, *Uber die Automorphiefunktionen meromorpher Funktionen*, (*Acta. Acad. Aboens.*, 16, n° 4, 1946).

[15] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton, 1946.

[16] L. Fourès, *Sur la théorie des surfaces de Riemann* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951).

[17] L. Fourès, *Sur les recouvrements régulièrement ramifiés* (*Bull. Sc. math.*, t. 76, 1952).

[18] L. Fourès, *Le problème des translations isothermes* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 1952).

COMPLÉMENT A L'ÉTUDE

DES

PROCESSUS DE MARKOFF

PAR M. PAUL LÉVY.

1. Le présent travail est un complément à notre récent Mémoire sur le même sujet (1). Rappelons qu'il s'agissait de l'étude de systèmes ayant une infinité d'états possibles $A_h (h = 0, 1, 2, \ldots)$, et soumis à une évolution markovienne et stationnaire. Nous avions distingué sept types de processus possibles. Les deux derniers sont caractérisés, l'un par l'intervention de probabilités de passage $P_{h,k}(t)$ non mesurables, l'autre par l'existence possible d'ensembles E_h non mesurables (E_h étant l'ensemble des instants t où l'état A_h est réalisé). Nous nous bornerons ici aux cinq premiers, dans l'étude desquels n'interviennent que des éléments mesurables, et nous nous intéresserons surtout au cinquième, caractérisé par l'existence d'au moins un état *instantané*, que nous supposerons être A_0, auquel corresponde un ensemble E_0 mesurable et de mesure presque sûrement positive (2).

Nous nous proposons d'étudier l'évolution du système en prenant comme

(1) *Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 327-381).

Corrigeons ici une erreur de rédaction de la page 377. L'axiome de Zermelo y est appliqué au choix d'un point t' appartenant à un intervalle i et à l'ensemble aléatoire E_0. Il faut ensuite égaler $P_{h,k}(t)$, non à $P_{0,k}(t - t')$, mais à sa valeur probable. Plus exactement, pour éviter de se demander si t' a le caractère de mesurabilité d'une variable aléatoire, il faut remarquer que $P_{h,k}(t)$ a le caractère d'une moyenne, nécessairement comprise entre les valeurs extrêmes de $P_{0,k}(t - t')$ quand t' varie dans i. Cela suffit pour la conclusion énoncée.

(2) Si la mesure de E_0 était nulle, A_0 serait ce que nous appelons un état fictif. Tous les $P_{h,0}(t)$ étant identiquement nuls, il n'y aurait aucune raison de considérer cet état comme possible. Rappelons que l'état A_0 est dit *instantané* si E_0 ne peut comprendre aucun intervalle.

variable le temps τ passé dans l'état A_0. Le choix de cette variable implique évidemment l'exclusion des deux derniers types. Le temps $t-\tau=X(\tau)$ passé dans les autres états croit alors par sauts, chacun de ces sauts correspondant à une succession d'états autres que A_0. Nous commencerons par développer les conséquences d'une remarque bien simple : le temps $t_h=t_h(\tau)$ passé dans un état A_h peut s'étudier indépendamment des états autres que A_0 et A_h. Nous préciserons ensuite les propriétés de la fonction $X(\tau)$ dont le caractère de fonction aléatoire additive a déjà été indiqué dans notre précédent Mémoire. Il est bien évident que la définition de cette seule fonction ne suffit pas à définir le processus ; nous montrerons qu'elle donne tout de même des renseignements assez précis, concernant notamment les coefficients μ_k (μ_k est la durée probable de chaque séjour du système dans l'état A_k).

2. Désignons par τ le temps passé dans l'état A_0, pendant l'intervalle de temps (t_0, t). Nous supposerons qu'à l'instant initial t_0 le système soit dans l'état A_0. Il résulte évidemment de l'hypothèse que le processus soit markovien et stationnaire que, de t_0 à l'instant t où τ atteint une valeur donnée, le nombre probable des intervalles constituant le complément E'_0 de E_0, et au cours desquels un état A_k ($k\neq 0$) est réalisé, est de la forme $\lambda_{0,k}\tau$. Leur nombre réel est une variable de Poisson, et la valeur τ_k de τ qui correspond à la première réalisation de l'état A_k est de la forme

$$\tau_k=\mu_{0,k}U, \tag{1}$$

U désignant une variable aléatoire du type défini par la formule

$$\Pr(U>u)=e^{-u} \quad (u>0), \tag{2}$$

et $\mu_{0,k}$ désignant $\frac{1}{\lambda_{0,k}}$; quels que soient les indices, les lettres λ et μ désigneront toujours deux nombres inverses l'un de l'autre.

Il faut remarquer que $\lambda_{0,k}$ n'est nul que si le passage de A_0 à A_k n'est pas possible. Le cas $\lambda_{0,k}=\infty$ est exclu par suite des hypothèses faites au n° 1. Donc, si A_0 et A_k appartiennent à un même groupe, $\lambda_{0,k}$ et son inverse $\mu_{0,k}$ sont tous les deux positifs et finis.

Si l'état A_0 n'est pas instantané, on a

$$\lambda_{0,k}=\lambda_0\beta_{0,k}, \tag{3}$$

$\lambda_0 dt$ étant, à $o(dt)$ près, la probabilité que le système quitte cet état en un temps dt, et $\beta_{0,k}$ désignant la probabilité que, s'il le quitte, il n'y revienne qu'après avoir pris au moins une fois l'état A_k. Alors τ_k est la longueur totale de N intervalles, appartenant à E_0, et dont chacun a une durée de la forme $\mu_0 U_\nu$ (U_ν dépend de la même loi que U); le nombre N est lui-même aléatoire et défini par la formule

$$\Pr(N=p)=\beta_{0,k}(1-\beta_{0,k})^{p-1} \qquad (p=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Il est facile de retrouver la formule (1) en partant de cette décomposition de τ_k. Mais ce sur quoi il nous a paru utile d'attirer l'attention, c'est que cela n'est pas nécessaire et que le résultat subsiste si l'état A_0 est instantané.

3. Indiquons brièvement quelques conséquences de la formule (1), qui s'applique naturellement à n'importe quel état A_h aussi bien qu'à A_0, $\mu_{0,k}$ devant seulement être remplacé par $\mu_{h,k}$. Considérons deux états, par exemple A_0 et A_1, et désignons par τ et τ' les temps passés respectivement dans ces deux états. Nous supposerons essentiellement qu'ils appartiennent à un même *groupe ergodique*, c'est-à-dire que, presque sûrement, τ et τ' augmentent indéfiniment avec t.

Pour comparer les croissances de τ et τ', nous pouvons faire abstraction du temps passé dans les états autres que A_0 et A_1. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude d'un processus auxiliaire dans lequel ces deux états alternent, les durées des séjours dans l'état A_0 étant de la forme $\mu_{0,1}U_1$, $\mu_{0,1}U_2$, ..., tandis que pour l'état A_1 on aura $\mu_{1,0}U'_1$, $\mu_{1,0}U'_2$, ... Par suite, après n alternances, les valeurs de τ et τ' seront comparables respectivement à $\mu_{0,1}n$ et $\mu_{1,0}n$, les écarts étant $O(\sqrt{n})$ en probabilité, et presque sûrement $O(\sqrt{n\log\log n})$. Il en résulte que : *presque sûrement, le rapport* $\frac{\tau'}{\tau}$ *tend, pour t infini, vers la limite*

$$\frac{\mu_{1,0}}{\mu_{0,1}} = \frac{\lambda_{0,1}}{\lambda_{1,0}}.$$

On voit ainsi que ce théorème, établi dans notre précédent Mémoire pour les systèmes sans états instantanés, c'est-à-dire pour les processus des quatre premiers types, s'applique d'une manière générale aux processus des cinq premiers types. Il en est de même des bornes supérieures presque sûres des écarts entre $\frac{\tau'}{\tau}$ et cette limite, que l'on déduit de la loi du logarithme itéré. Les remarques relatives à la distinction entre les processus faiblement et fortement ergodiques subsistent aussi.

4. Considérons maintenant un cas particulier important, celui d'un système qui, après chaque état A_h autre que A_0, revient nécessairement directement à l'état A_0. On a alors évidemment

$$\lambda_0 = \Sigma\lambda_{0,k} \qquad (k \neq 0), \tag{5}$$

et l'on peut étudier indépendamment les uns des autres les points qui, sur l'échelle des τ, marquent les réalisations des différents états A_k. Les durées de ces réalisations dépendant des coefficients μ_k, le processus est bien défini par les coefficients $\lambda_{0,k}$ et μ_k, nécessairement tous positifs et finis. Si la série (5) est convergente, on a manifestement un processus du premier type

(type fini). Étudions le cas où elle est divergente; λ_0 est infini, et l'état A_0 est instantané. Puisque nous avons supposé E_0 de mesure presque sûrement positive, il faut que les événements qui doivent avoir lieu pendant que le système passe un temps τ dans l'état A_0 aient lieu en un temps presque sûrement fini. La valeur probable du temps passé dans l'état A_k étant $\lambda_{0,k}\mu_k\tau$, on voit qu'il suffit, pour que les μ_k soient acceptables, que la série $\Sigma\lambda_{0,k}\mu_k$ soit convergente.

Mais cela n'est pas nécessaire. S'il existe une suite partielle d'indices k_ν tels que la somme $\Sigma\lambda_{0,k_\nu}$ soit finie, les états correspondants ne seront presque sûrement, tous ensemble, réalisés qu'un nombre fini de fois (pour une valeur finie de τ), et les valeurs correspondantes des μ_k sont sans importance. On voit donc que : pour que, les $\lambda_{0,k}$ étant préalablement donnés et de somme infinie, les μ_k soient acceptables, il suffit que la somme

$$S = \Sigma\lambda_{0,k}\operatorname{Min}(1, \mu_k) \tag{6}$$

soit finie. Cette condition est aussi nécessaire, et l'on a, dans ces conditions, un exemple simple de processus du cinquième type.

Au lieu de la somme (6), on peut considérer la somme

$$S' = \Sigma\lambda_{0,k}\frac{\mu_k}{1+\mu_k}, \tag{6'}$$

qui est finie ou infinie en même temps que S.

Désignons maintenant par $t_k = t_k(\tau)$ le temps passé dans l'état A_k, et par

$$t - \tau = \sum_1^\infty t_k = X(\tau) \tag{7}$$

le temps total passé dans les états autres que A_0, pendant que le temps passé dans l'état A_0 est τ. $X(\tau)$ est une fonction additive, ne croissant que par sauts, et la probabilité d'un saut supérieur à $x\,(x > 0)$ pendant que τ varie de $d\tau$ est

$$\mathcal{F}(x)\,d\tau = d\tau\sum_1^\infty \lambda_{0,k}e^{-\lambda_k x}.$$

On sait que dans ces conditions la fonction additive $X(\tau)$ est bien définie par la formule

$$\log E[e^{izX(\tau)}] = \tau\int_0^\infty (e^{izx} - 1)\,F(x)\,dx, \tag{8}$$

où

$$F(x) = -\mathcal{F}'(x) = \sum_1^\infty \lambda_k\lambda_{0,k}e^{-\lambda_k x}. \tag{9}$$

On remarque qu'en vertu des hypothèses faites sur les séries (5) et (6),

$F(x)$ et $\mathcal{F}(x)$ sont bien définis pour tout $x > 0$, mais augmentent indéfiniment quand $x \downarrow 0$.

Remarquons d'autre part que, la fonction $F(x)$ n'admettant qu'une représentation de la forme (8) : *la donnée de cette fonction, qui équivaut à celle de la fonction caractéristique de* $X(1)$, *suffit, si tous les* λ_k *sont distincts, à déterminer complètement la loi de l'évolution du système étudié.* On peut d'ailleurs toujours convenir de considérer comme indiscernables deux états qui auraient la même vie moyenne μ_k, de sorte que, grâce à cette convention (analogue à celle sur laquelle repose la statistique de Fermi), on peut toujours considérer le processus comme bien défini par la donnée de $F(x)$ (3).

Remarquons enfin que l'*image moyenne* de $X(\tau)$, obtenue en remplaçant chaque saut $\mu_k U$ par sa valeur probable μ_k, est aussi une fonction additive $N(\tau)$ définie par

$$\log E[e^{izN(\tau)}] = \tau \Sigma \lambda_{0,k}(e^{i\mu_k z} - 1). \tag{10}$$

Cette fonction une fois obtenue, on peut représenter $X(\tau)$ par la formule

$$X(\tau) = \int_0^\tau U(\theta)\, dN(\theta), \tag{11}$$

où les $U(\theta)$ sont des variables aléatoires du type (1), toutes indépendantes les unes des autres. La fonction $N(t)$ ne croissant que par sauts, il n'y a jamais à faire intervenir qu'une infinité dénombrable de valeurs de $U(t)$, et l'intégrale (11) est en réalité une série presque sûrement convergente.

5. Revenons maintenant au cas général, les seules hypothèses étant celles indiquées au n° 1. La fonction $X(\tau)$ sera toujours définie par la formule (7). C'est une fonction additive, ne croissant que par sauts, et comme la durée de chaque type de saut possible est une variable aléatoire absolument continue, elle est du type (8); mais l'expression (9) de la fonction $F(x)$ doit être modifiée, pour tenir compte des sauts pendant lesquels plusieurs états A_k, où même une infinité, sont réalisés.

Nous dirons que le *type* d'un saut est défini lorsqu'on connaît les nombres n_k des réalisations des différents états A_k; sa durée totale T dépend d'une loi bien définie par la suite des n_k, et par ceux des μ_k qui correspondent aux n_k positifs. La fonction caractéristique de T est le produit

$$\varphi(z) = \Pi(1 - i\mu_k z)^{-n_k} \quad (4). \tag{12}$$

---

(3) Cela n'empêche pas que la même fonction $F(x)$ peut, comme nous le verrons, être obtenue pour d'autres processus, mais qui ne sont pas du type étudié dans ce paragraphe.

(4) On remarque qu'en caractérisant chaque espèce de saut par la fonction $\varphi(z)$ qui lui est associée, on ne peut, ni distinguer deux états ayant la même durée probable μ_k, ni tenir compte de l'ordre dans lequel les différents états se succèdent. Remarquons toutefois que, si nous connaissons

Ce produit peut être fini ou infini; mais la condition pour qu'une suite d'exposants n_k soit acceptable est qu'il soit convergent; il faut et il suffit pour cela que la série $\Sigma n_k \mu_k$ soit convergente; sa somme est alors la durée probable du saut. La densité de probabilité correspondante est le produit de composition

$$f(x) = \prod_k^{\star} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \qquad (\lambda = \lambda_k,\ n = n_k). \tag{13}$$

Si $N = \Sigma n_k$ est fini, la décomposition de $\varphi(z)$ en éléments rationnels simples conduit aisément à une formule de la forme

$$f(x) = \Sigma P_k(x)\, e^{-\lambda_k x}, \tag{14}$$

où les $P_k(x)$ sont des polynomes. On voit bien ainsi la nature analytique de $f(x)$. Mais il faut remarquer qu'il peut y avoir des coefficients négatifs. Ainsi on a

$$e^{-\lambda_1 x} \star e^{-\lambda_2 x} = \frac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{15}$$

6. Pour former $F(x)$, considérons d'abord le cas où il y a un nombre fini ou une infinité dénombrable de types de sauts possibles. Chacun d'eux étant désigné par un indice ν, et λ'_ν désignant le nombre probable de ses réalisations dans l'intervalle $0 < \tau < 1$, on a

$$F(x) = \Sigma \lambda'_\nu f_\nu(x). \tag{16}$$

La condition pour que les données soient acceptables est d'ailleurs analogue à la condition $S < \infty$ du n° 4, mais au lieu des fréquences $\lambda_{0,k}$ des différents états, il faut considérer les fréquences λ'_ν des différents types de sauts, et au lieu des μ_k, il faut considérer les durées probables

$$l_\nu = \Sigma n_k \mu_k$$

de ces types. On peut alors écrire cette condition sous la forme

$$\Sigma' \lambda'_\nu l_\nu + \Sigma'' \lambda'_\nu < \infty, \tag{17}$$

Σ' et Σ'' désignant respectivement des sommes étendues aux indices ν pour lesquels $l_\nu \leq 1$ ou $l_\nu > 1$. D'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que

---

toutes les fonctions $\varphi(z)$ qui interviennent dans l'étude du processus, cela peut permettre certaines conclusions. Ainsi, si l'état A_1 peut être réalisé deux fois, il peut aussi, quel que soit n, l'être n fois; si donc nous trouvons μ_1 associé à l'exposant 2, sans qu'il le soit jamais à un exposant plus élevé, c'est qu'il existe un autre état, A_2 par exemple, tel que $\mu_2 = \mu_1$. Alors en faisant abstraction des autres états, une et une seule des successions $A_1 A_2$ et $A_2 A_1$ est possible, mais nous ne savons pas laquelle des deux (si les deux l'étaient, le retour de A_1 à A_1 serait possible, sans retour intermédiaire à A_0, ce qui est exclu).

l'état A_0 soit instantané, et que par suite le processus soit du cinquième type, est $\Sigma\lambda' = \infty$, ce qui équivaut, compte tenu de (17), à $\Sigma'\lambda' = \infty$ (5).

La forme de ces conditions rend évidente leur extension au cas, que nous allons maintenant considérer, où l'on ne suppose pas que l'ensemble des types de sauts possibles, soit dénombrable. Le premier terme de la somme (17) est la durée totale probable des sauts pour lesquels $l \leq 1$, le second est le nombre probable de ceux pour lesquels $l > 1$, pendant que τ augmente de l'unité.

7. Considérons donc le cas où il y a une infinité non dénombrable de types de sauts possibles. Il faut pour cela qu'il soit possible qu'une infinité dénombrable d'états se succèdent avant chaque retour à A_0 et qu'il y ait au cours de cette succession une infinité de choix; il suffit que cela soit sûr. Pour en donner un exemple simple, supposons que le passage direct de A_0 à A_h soit possible, quel que soit h, le nombre probable de ses réalisations étant $\rho_h\tau$. L'indice k ne pourra ensuite que croître, mais après chaque valeur h on aura le choix entre au moins deux valeurs, par exemple $h+1$ et $h+2$. Le retour à A_0 ne se produira ainsi qu'après la réalisation effective d'une infinité d'autres états. Si $\Sigma\mu_k$ est fini, il se produira au bout d'un temps presque sûrement fini. Si enfin

$$\Sigma\rho_k = \infty, \qquad \Sigma\rho_k m_k < \infty \qquad \left(m_k = \sum_{k+1}^{\infty} \mu_l\right),$$

on a un processus du cinquième type avec une infinité dénombrable de types de sauts possibles, pour $X(\tau)$ (sans la première condition, on aurait un processus du deuxième type, le type transfini).

Pour étudier les cas de ce genre, $X(\tau)$ étant la somme de la série presque sûrement convergente (7), nous pouvons d'abord considérer le processus auxiliaire obtenu en faisant abstraction des états d'indices $k > n$. Le retour à A_0 étant possible, la succession d'états qui le précède ne comprend alors presque sûrement qu'un nombre fini d'états (même si chaque état peut y figurer plusieurs fois), et il n'y a qu'un nombre fini de choix (non nécessairement borné), et par suite un nombre fini ou une infinité dénombrable de types de sauts possibles.

La fonction $\psi(z)$ relative à ce processus auxiliaire [en désignant l'expression (8) par $\tau\psi(z)$], est alors de la forme

$$\psi_n(z) = \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1)\, \Sigma\lambda'_\nu f_\nu(x)\, dx = \Sigma\lambda'_\nu [\varphi_\nu(z) - 1]. \tag{18}$$

Si maintenant n augmente indéfiniment, $\psi_n(z)$ tend vers $\psi(z)$. D'après la

(5) Si l'on fait encore intervenir les coefficients $\lambda_{0,k}$ et μ_k, on a, sauf dans le cas étudié au n° 4, $\lambda_0 < \Sigma\lambda_{0,k}$, de sorte que la condition $\Sigma\lambda_{0,k} = \infty$ est nécessaire, mais non suffisante, pour que l'état A_0 soit instantané. La condition $S < \infty$ est suffisante, mais non nécessaire, pour que le temps $t = \tau + X(\tau)$ soit presque sûrement fini (pour une valeur donnée de τ).

forme (12) des fonctions $\varphi_\nu(z)$, les différents termes de cette somme n'ont pas d'autres points singuliers que les points $z_k = -\lambda_k i$, qui sont des pôles simples ou multiples suivant que l'état A_k et éventuellement les autres états A_l tels que $\lambda_l = \lambda_k$ figurent une fois ou plusieurs fois dans la suite d'états qui définit le type de saut considéré. Ces pôles sont fixes, c'est-à-dire indépendants de n. Par suite, on est conduit à penser que *les points singuliers de* $\psi(z)$ *sont les points* $z_k = -\lambda_k i$ *et leurs points d'accumulation.*

Il semble exact que $\psi(z)$ soit toujours holomorphe en dehors des points ainsi définis. Rappelons seulement que, du seul fait que la fonction additive $X(\tau)$ soit une somme de sauts positifs, résulte que $\psi(z)$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur. Le fait qu'elle soit aussi holomorphe dans le demi-plan inférieur en dehors de l'axe transverse est lié à la forme particulière de $F(x)$, mais subsiste si dans l'expression (12) des fonctions $\varphi_\nu(z)$ on introduit des exposants non entiers; $\psi(z)$ n'est alors uniforme que dans le plan coupé par l'axe $(0, -\infty i)$.

Remarquons aussi, en nous bornant au cas étudié au n° 4, que les conditions imposées aux sommes (5) et (6) n'empêchent pas que la suite des μ_k n'est soumise à aucune autre restriction que d'avoir zéro comme point d'accumulation. A une suite partielle de coefficients $\lambda_{0,k}$ dont la somme est finie on peut associer en effet des coefficients μ_k absolument quelconques. Il peut donc arriver en particulier que les points $z = -\lambda i$ (λ réel positif) soient tous des points singuliers de $\psi(z)$.

8. Montrons maintenant par des exemples simples que, si les points z_k sont en général des points singuliers de $\psi(z)$, il peut arriver que certains d'entre eux ne le soient pas. Pour réaliser cette circonstance, il suffit d'un système à trois états possibles, A_0, A_1, A_2 (de sorte que le processus est du premier type, ou type fini). Si le passage direct de A_2 à A_1 est impossible, il y a alors pour $X(\tau)$ trois sortes de sauts possibles qui correspondent à des chaînes constituées par l'état A_1 seul, ou A_2 seul, ou A_1 suivi de A_2. A ces trois types de sauts correspondent trois coefficients

$$\lambda'_1 = \lambda_0 p_{0,1} p_{1,0}, \qquad \lambda'_2 = \lambda_0 p_{0,2}, \qquad \lambda'_3 = \lambda_0 p_{0,1} p_{1,2},$$

qui sont trois nombres réels non négatifs, à cela près quelconques. Or on a

$$\psi(z) = \frac{\lambda'_1 iz}{\lambda_1 - iz} + \frac{\lambda'_2 iz}{\lambda_2 - iz} + \lambda'_3 \left[\frac{1}{(1-\mu_1 iz)(1-\mu_2 iz)} - 1 \right] \tag{19}$$

$$= \left(\lambda'_1 + \frac{\lambda'_3 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \right) \frac{iz}{\lambda_1 - iz} + \left(\lambda'_2 + \frac{\lambda'_3 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \right) \frac{iz}{\lambda_2 - iz}.$$

Supposons, pour fixer les idées $\mu_2 > \mu_1$. Il suffit alors que

$$\lambda'_3 = \frac{\lambda'_1 (\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1}$$

pour que $z_1 = -i\lambda_1$ ne soit pas un point singulier de $\psi(z)$.

Remarquons aussi que, λ_1 et λ_2 supposés connus, la donnée de $\psi(z)$, qui ne dépend que de deux coefficients, ne suffit pas à déterminer $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$. Si $\lambda_2 < \lambda_1$ (donc $\mu_2 > \mu_1$), la fonction

$$\psi(z) = \frac{iz}{\lambda_2 - iz},$$

par exemple, peut être obtenue, soit pour $\lambda'_2 = 1$, $\lambda'_1 = \lambda'_3 = 0$, soit pour

$$\lambda'_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad \lambda'_2 = 0, \qquad \lambda'_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}, \tag{20}$$

soit par n'importe quelle moyenne entre ces deux solutions extrêmes.

Or cette équivalence, au point de vue du calcul de $\psi(z)$, entre le cas où la chaîne A_2 est seule possible et celui défini par les formules (20), subsiste, quels que soient, pour des processus plus généraux, les états autres que A_0 qui précèdent ou suivent A_2 dans la suite d'états qui correspond à un type de saut possible. On ne sera donc jamais sûr, $\psi(z)$ étant connu, qu'il n'y ait pas un état possible A_1 (ou plusieurs états possibles) dont l'existence ne puisse pas être déduite de la forme $\psi(z)$.

On peut d'ailleurs étudier directement, au même point de vue, le cas d'un système comprenant n états possibles autres que A_0. Contentons-nous de considérer le cas où, entre deux réalisations de A_0, l'indice k ne peut que croître. Il y a alors, en dehors de la chaîne vide, $2^n - 1$ chaînes possibles. Leurs probabilités dépendent de $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, les n coefficients λ''_k tels que la probabilité d'un passage direct de A_0 à A_k pendant un intervalle $d\tau$ sur l'axe des τ, soit $\lambda''_k\, d\tau$, et les probabilités de passage $p_{h,k}\ (0 < h < k \leq n)$, soumises aux seules inégalités

$$p_{h,h+1} + p_{h,h+2} + \ldots + p_{h,n} \leq 1$$

(la différence $p_{h,0}$ des deux membres étant inconnue).

Or la décomposition de $\psi(z)$ en éléments simples n'introduit que n coefficients arbitraires. La donnée de cette fonction ne peut donc pas définir le processus.

9. Pour conclure, la donnée de $\psi(z)$ est loin de suffire à la définition du processus, et donne peu de renseignements sûrs. Nous croyons toutefois que cette fonction est toujours de la forme

$$\psi(z) = \Sigma \psi(z),$$

chaque $\psi_k(z)$ étant une fonction entière de $\frac{1}{z - z_k}$, et que la donnée de $\psi(z)$ définit tous les $\psi_k(z)$; les valeurs des $z_k = -\lambda_k i$ ainsi mis en évidence correspondent sûrement à des états possibles. Si z_k est un point singulier essentiel de $\psi_k(z)$, cela indique, soit que l'état A_k peut être réalisé plusieurs fois (donc

il peut l'être un nombre arbitrairement grand de fois) sans retour à A_0, soit qu'un nombre arbitrairement grand d'états de durée probable μ_k peuvent se succéder sans retour à A_0. Si z_k est un pôle d'ordre $n > 1$ cela prouve l'existence de n états au moins de durée probable μ_k. Si z_k est un pôle simple, rien ne permet de savoir s'il y a un ou plusieurs états de durée probable μ_k. Mais, rappelons-le, on ne sera jamais sûr d'avoir obtenu tous les ψ_k correspondant à des états possibles.

L'étude de $\psi(z)$ nous a paru utile parce qu'elle donne une idée claire de certaines propriétés des processus du cinquième type. Mais la conclusion est qu'elle ne suffit jamais, si l'on n'a aucun autre renseignement, à définir un processus (6).

(6) Cela n'est pas en contradiction avec la conclusion du n° 4; pour appliquer cette conclusion, il faut savoir que le processus est du type étudié au dit n° 4.

QUELQUES APPLICATIONS
DU CALCUL FONCTIONNEL
A LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR M. HENRI PAILLOUX.

Le présent travail se rattache au Calcul fonctionnel, au Calcul tensoriel et à la Mécanique rationnelle. Ayant voulu étudier des problèmes de Mécanique relatifs à des systèmes dépendant de fonctions arbitraires, il nous a fallu étendre la méthode classique de la Mécanique analytique de Lagrange, car les procédés anciens étaient insuffisants. La notion de dérivée fonctionnelle, quoique non indispensable, nous fut très utile; en particulier pour écrire simplement les nouvelles équations du mouvement. En approfondissant les procédés de calcul, nous avons été amenés à constater que les notations tensorielles, convenablement introduites, simplifient notablement l'écriture.

Dans un premier chapitre nous rappelons la notion de dérivée fonctionnelle, en précisant les limites de son emploi. Dans une digression, nous indiquons rapidement comment les notations du Calcul tensoriel sont utiles, et comment s'étendent des propriétés simples de l'Analyse élémentaire. Après avoir repris dans un deuxième chapitre la question du potentiel de forme, nous étendons le théorème de Castigliano et le théorème corrélatif, puis dans un troisième chapitre, les équations de Lagrange. Au quatrième chapitre, nous retrouvons les résultats classiques pour une poutre horizontale chargée et pour une verge vibrant, encastrée à une extrémité. Dans le cinquième chapitre, nous donnons des exemples nouveaux : mouvement d'un fil inextensible, dans un plan et sur une surface fixe ou mobile; mouvement d'une courbe élastique, dans le plan et dans l'espace.

Le dernier chapitre montre comment on peut passer des équations rigoureuses de l'Élasticité à des équations approchées, voisines de celles de la Résistance des matériaux, valables pour les poutres droites.

L'emploi des méthodes et des notations de l'Analyse fonctionnelle se montre ainsi très utile au développement de la Mécanique. Inversement cette dernière fournit à l'Analyse fonctionnelle des exemples qui restent élémentaires dans leur principe, quoique les calculs soient généralement longs; mais ce dernier point est une des servitudes de la Mécanique.

CHAPITRE I.

Le calcul fonctionnel en mécanique.

Dans la Mécanique de Lagrange, les systèmes matériels considérés ont leur position définie par un nombre fini de paramètres géométriques, et la notion de dérivation ordinaire suffit à la mise en équation des problèmes correspondants. Cependant, dans d'autres questions de Mécanique où interviennent des systèmes élastiques ou déformables, à chaque instant, la position du système ne peut être définie que par la donnée, ou la connaissance, d'une ou de plusieurs fonctions d'une, deux ou trois variables qui remplacent les paramètres de Lagrange, et que nous appelons des fonctions-paramètres.

Il est commode dans de telles questions de séparer l'application des principes de la Mécanique des calculs qui en découlent, le volume de ces derniers risquant de faire perdre de vue les idées directrices. C'est pourquoi il est utile de faire appel aux notions élémentaires du calcul fonctionnel et du calcul tensoriel.

Considérons un domaine D décrit par un point P, et une fonction $f(\mathrm{P})$ définie dans D. Une fonctionnelle de f est un nombre qui dépend de l'ensemble des valeurs de la fonction f dans D. Tels sont le maximum de f, l'intégrale de f ou de son carré, ou du carré de son gradient dans D. La masse d'une plaque de densité $\rho(x, y)$, et d'épaisseur $e(x, y)$ située dans le plan des x, y, et dont le contour est bien précisé, est une fonctionnelle de la densité superficielle ρ ou de l'épaisseur e.

La définition de la dérivée d'une fonctionnelle $\mathcal{F}$ peut être ainsi présentée : la fonction f ayant été choisie ainsi que le point P du domaine D, considérons un élément de volume $\Delta\tau$ entourant P, et l'accroissement, constant, Δf de f, uniquement dans $\Delta\tau$, Δf étant nul dans $\mathrm{D} - \Delta\tau$. L'accroissement de la fonctionnelle, $\Delta\mathcal{F}$ est infiniment petit avec $\Delta\tau$ et avec Δf. Si le rapport $\dfrac{\mathcal{F}(f+\Delta f) - \mathcal{F}(f)}{\Delta f\,\Delta\tau}$ possède une limite lorsque Δf tend vers zéro, et que $\Delta\tau$ tend vers zéro dans toutes ses dimensions en entourant constamment le point P, nous dirons que cette limite est la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{F}$ au point P, pour la fonction f.

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous allons provisoirement employer les conventions d'écriture du Calcul tensoriel et constater que cette

dérivée fonctionnelle est l'extension naturelle de la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables.

Dans l'espace E_r à r dimensions, un point est caractérisé par ses coordonnées x^i. Si pour un instant on laisse de côté la place de l'indice, on peut dire que les coordonnées sont données par les valeurs de la fonction d'une variable $x(i)$ pour des valeurs entières de la variable : 1, 2, ..., r. Le point P des paragraphes précédents joue le même rôle que l'indice i; aussi convenons-nous de désigner par x^P, avec l'indice supérieur P, une fonction de P. La notion élémentaire de point de coordonnées x^i est remplacée par celle de point de coordonnées x^P. Désignons par ε_x l'ensemble des valeurs prises par x^P. A côté de cet espace ponctuel ε_x, le domaine D joue le rôle suivant : dans le cas d'un nombre fini de variables, D se réduit à un nombre fini de points numérotés 1, 2, ..., r; en quelque sorte le point P du domaine D désigne une direction d'axe de coordonnées. Une fonction $f(x^i)$ est un nombre déterminé par la connaissance du point x^i. De même une fonctionnelle $f(x^P)$ est définie par la connaissance du point x^P dans l'espace ε_x.

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ se calcule en faisant varier seulement x^i. Disons plus simplement que nous faisons varier la fonction f uniquement dans la direction i, nous faisons ensuite le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable. Dans l'espace ε_x cette définition se conserve, mais il faut faire intervenir l'élément de volume de D pour avoir une limite. Comme conséquence de ces remarques, nous dirons que la dérivée fonctionnelle est calculée au point x, suivant la direction définie par P, ou très brièvement, nous parlerons de la *dérivée en x, vers* P. Cette convention de langage rend toutes naturelles les propriétés que nous avons à utiliser. Nous notons la dérivée fonctionnelle $\frac{\partial f}{\partial x^P}$.

Gradient fonctionnel. — Avec r variables, la différentielle d'une fonction $f(x_i)$ s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i,$$

et le vecteur covariant $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ est appelé gradient de la fonction f, de sorte que, par définition du produit scalaire, *la différentielle de la fonction f est le produit scalaire du gradient par le vecteur différentiel dx.*

Dans l'espace ε_x nous admettons l'existence de vecteurs ou tenseurs du premier ordre, à un indice supérieur ou inférieur u^P ou v_Q. Ce sont des fonctionnelles de f, et dépendant en plus d'une direction P ou Q. Partageons d'autre part le domaine D en petits domaines tels que $\Delta\tau$ qui entoure le point P. Partant d'une fonction x^P donnée, et qui ne variera pas dans ce qui suit, considérons un accroissement de x, et désignons par Δx^P l'accroissement vers P; et remplaçons pour un instant, par Δx^P dans $\Delta\tau$, l'accroissement réel de f.

L'accroissement total de f pour tout le domaine D est mesuré en première approximation par la somme des accroissements

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{P}}} \Delta x^{\mathrm{P}} \Delta \tau.$$

Si la fonctionnelle f possède une dérivée, et sous des réserves de convergence que nous ne précisons pas, la différentielle df a la valeur suivante :

$$\delta f = \int_{\mathrm{D}} \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{P}}} \delta x^{\mathrm{P}} \, d\tau.$$

Pour l'interpréter géométriquement, introduisons la notion de produit scalaire entre deux vecteurs de variances opposées, u^{P}, v_{Q},

$$(u, v) = \int_{\mathrm{D}} u^{\mathrm{P}} v_{\mathrm{P}} \, d\tau.$$

C'est l'extension de la formule connue en calcul tensoriel $(u, v) = u^i v_i$. La différentielle df est donc le produit scalaire du vecteur contravariant δx^{P}, et du vecteur covariant $\frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{P}}}$ que nous appelons le gradient de la fonctionnelle. Ce vecteur constitue l'ensemble des valeurs des dérivées fonctionnelles en un point donné de ε_x.

Fonctionnelles de plusieurs fonctions. — Jusqu'ici nous avons supposé que la fonctionnelle f ne dépendait que de la seule variable x^{P}. Supposons maintenant que f dépende des fonctions x^{P}, y^{Q}, ..., où les points P, Q, ... varient dans des domaines $\mathrm{D_P}$, $\mathrm{D_Q}$, ... Ces domaines peuvent être distincts ou confondus. Si l'on suppose que l'une des fonctions varie seule, on sait définir la dérivée fonctionnelle correspondante, nous dirons que c'est une dérivée partielle. Nous écrirons ainsi les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{P}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{Q}}}, \quad \ldots.$$

La différentielle de la fonctionnelle f est donnée par la relation suivante :

$$\delta f = \int_{\mathrm{D_P}} \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{P}}} \delta x^{\mathrm{P}} \, d\tau(\mathrm{P}) + \int_{\mathrm{D_Q}} \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{Q}}} \delta x^{\mathrm{Q}} \, d\tau(\mathrm{Q}) + \ldots.$$

Dans l'espace à trois dimensions, D peut être un volume, une surface, une ligne, ou un point, et les domaines $\mathrm{D_P}$, $\mathrm{D_Q}$, ... peuvent être de nature différente.

Calcul pratique des dérivées fonctionnelles. — Pour savoir si une fonctionnelle possède une dérivée, et la calculer, on forme très généralement la diffé-

rentielle, c'est-à-dire l'expression $\delta f = f(x+\delta x) - f(x)$ qu'on cherche à mettre sous la forme suivante :

$$\delta f = \int_{D} g_P \, \delta x^P \, d\tau.$$

Si c'est possible, g_P représente la dérivée cherchée. Or, très fréquemment auprès d'une intégrale de volume, pour prendre un exemple, figurent des intégrales doubles, simples, ou des termes relatifs à des points isolés, les divers domaines d'intégrations se situant dans D ou sur sa frontière. Nous reportant à la définition de la dérivée en un point, nous voyons que g_P représente toujours la dérivée fonctionnelle en un point qui n'est pas sur l'un des domaines d'intégration supplémentaires. Pour ces derniers points, il n'y a pas de dérivée fonctionnelle, et la formule donnée plus haut pour la différentielle n'est plus valable; elle doit être remplacée par la formule correcte.

De nombreux exemples illustreront ce fait. Or, dans les exemples concernant la Mécanique, les intégrales supplémentaires figurant dans la différentielle sont calculées sur la frontière. De plus les fonctions x^P, y^Q, ... ne sont pas absolument arbitraires, elles doivent vérifier certaines conditions, telles que ces termes supplémentaires sont nuls. Nous parlerons de « *dérivées conditionnelles* », et dans ce cas, la différentielle se réduit à l'unique terme considéré initialement.

Théorème d'Euler sur les fonctionnelles homogènes. — Soit f une fonctionnelle des fonctions x^P, y^Q, z^R, ... respectivement définies dans des domaines D_P, D_Q, ... Cette fonctionnelle est dite homogène d'ordre m, si quelle que soit la constante t on a identiquement

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z).$$

Nous admettons que, grâce à certaines conditions frontières, la différentielle de la fonctionnelle a la forme suivante :

$$\delta f = \int_{D_P} \frac{\partial f}{\partial x^P} \delta x^P \, d\tau(P) + \dots.$$

Considérons maintenant que dans la suite du calcul, les fonctions x^P, y^Q, ... sont invariables, inchangées. La fonctionnelle peut être considérée comme une fonction de la variable t, soit $\varphi(t)$. Pour obtenir la différentielle de $\varphi(t)$, nous devons former $\varphi(t+\delta t) - \varphi(t)$. C'est une expression qui peut s'évaluer grâce à la différentielle de la fonctionnelle, avec des accroissements de fonctions $\delta x^P = x^P \, \delta t$, ... :

$$\delta \varphi(t) = \int_{D_P} \frac{\partial f}{\partial x^P} x^P \, \delta t \, d\tau + \dots.$$

Une autre manière de calculer la différentielle de $\varphi(t)$ consiste à différentier en t la relation de définition de la fonctionnelle homogène

$$\varphi(t) = t^m f(x, y, \ldots), \qquad \delta\varphi(t) = mt^{m-1}\delta t f(x, y, \ldots).$$

La comparaison de ces deux valeurs pour $t = 1$ donne la relation suivante, généralisation du théorème sur les fonctions homogènes à plusieurs variables :

$$mf = \int_{D_P} x^P \frac{\partial f}{\partial x^P} d\tau(P) + \int_{D_Q} y^Q \frac{\partial f}{\partial y^Q} d\tau(Q) + \ldots.$$

Fonctionnelles adjointes. — Le théorème précédent va nous servir à étendre le procédé de passage de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle de la même courbe ou surface. Nous rencontrerons des considérations analogues quand nous étendrons le théorème de Castigliano en vue de l'étude des systèmes déformables.

D'une manière précise, si $f(x, y, z)$ est une fonction homogène de degré m, posons

$$u = \frac{1}{m} f'_x, \qquad v = \frac{1}{m} f'_y, \qquad w = \frac{1}{m} f'_z,$$

et résolvons ces relations en x, y, z. Transportons les valeurs ainsi obtenues dans f, nous obtenons une nouvelle fonction homogène $g(u, v, w)$. On démontre que l'on a identiquement

$$x = \frac{1}{\mu} g'_u, \qquad y = \frac{1}{\mu} g'_v, \qquad z = \frac{1}{\mu} g'_w, \qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = 1.$$

La réciprocité entre les groupes de variables x, y, z et u, v, w est complète. On peut dire encore que la transformation qui permet de passer de l'un de ces groupes à l'autre, a pour carré l'unité.

Soit maintenant une fonctionnelle homogène f de degré m d'un nombre quelconque de fonctions arbitraires. Posons

$$u_P = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x^P}, \qquad v_Q = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial y^Q}, \qquad \ldots.$$

Supposons que ces relations permettent d'obtenir les fonctions x, y, ... quand u, v, ... sont données. Transportant ces valeurs dans f, nous obtenons une nouvelle fonctionnelle

$$g(u, v, \ldots) = f(x, y, \ldots).$$

Nous allons démontrer que l'on a

$$x^P = \frac{1}{\mu} \frac{\partial g}{\partial u_P}, \qquad y^Q = \frac{1}{\mu} \frac{\partial g}{\partial v_Q}, \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = 1.$$

En effet le théorème d'Euler s'applique à la fonctionnelle homogène f,

$$mf = \int_{D_P} x^P \frac{\partial f}{\partial x^P} d\tau(P) + \ldots = m \int_{D_P} x^P u_P \, d\tau(P) + \ldots .$$

Prenons alors la différentielle

$$m\,\delta f = m \int_{D_P} u_P \, \delta x^P \, d\tau(P) + \ldots + m \int_{D_P} x^P \, \delta u_P \, d\tau(P) + \ldots .$$

Or, cette même différentielle se calcule encore ainsi, par définition, et grâce aux notations introduites :

$$\delta f = \int_{D_P} \frac{\partial f}{\partial x^P} \delta x^P \, d\tau(P) + \ldots = m \int_{D_P} u_P \, \delta x^P \, d\tau(P) + \ldots .$$

Si nous retranchons la dernière valeur de la différentielle de la valeur obtenue initialement, nous avons

$$(m-1)\,\delta f = m \int_{D_P} x^P \, \delta u_P \, d\tau(P) + \ldots$$

ou bien

$$\delta g = \mu \int_{D_P} x^P \, \delta u_P \, d\tau(P) + \ldots .$$

Or, d'après la définition des dérivées fonctionnelles, il en résulte les formules annoncées.

Nous pouvons remarquer que $u, v, \ldots$ sont homogènes et de degré $m-1$ en x, $y, \ldots$. Inversement $x, y, \ldots$ sont de degré $\frac{1}{m-1}$ en $u, v, \ldots, g$ est donc de degré $\frac{m}{m-1} = \mu$ en $u, v, \ldots$. On constate la parfaite réciprocité des deux groupes de variables $x, y, \ldots$ et $u, v, \ldots$. Sur les exemples pratiques, ceci constitue une propriété peu apparente.

Cas particulier de calcul de dérivées fonctionnelles. — Un exemple fréquent est celui d'une fonctionnelle ainsi définie :

$$\mathrm{I}(y) = \int_a^b \mathrm{F}(x, y, y', y'') \, dx.$$

F est une fonction au sens ordinaire des variables $x, y, y', y'', \ldots$. Les méthodes du Calcul des variations permettent d'évaluer la différentielle de cette fonctionnelle de y,

$$\delta \mathrm{I} = \left[\mathrm{F}'_{y'} \, \delta y + \mathrm{F}'_{y''} \, \delta y' - \frac{d}{dx} \mathrm{F}'_{y''} \, \delta y \right]_a^b + \int_a^b \left[\mathrm{F}'_y - \frac{d}{dx} \mathrm{F}'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} \mathrm{F}'_{y''} \right] \delta y \, dx.$$

Il se trouve que dans les problèmes de Mécanique qui conduisent à de tels

problèmes, les fonctions y et certaines de leurs dérivées, sont telles que leurs valeurs sont imposées aux extrémités, et par suite leurs variations sont nulles; ou bien ce sont les coefficients de ces variations qui sont nuls. Le crochet précédent de l'intégrale est donc nul (cas particulier d'une remarque faite plus haut relativement à la définition et au calcul de la dérivée ou de la différentielle d'une fonctionnelle). La dérivée fonctionnelle cherchée a donc la valeur suivante :

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial y} = \mathrm{F}'_y - \frac{d}{dx}\mathrm{F}'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\mathrm{F}'_{y''}.$$

On peut développer d'une manière systématique le calcul fonctionnel combiné au calcul tensoriel. On rencontre successivement les étapes suivantes : espaces vectoriels affines, tenseurs, produit scalaire, pseudotenseurs, gradient, rotationnel, déplacement parallèle, dérivation covariante, divergence, métrique riemannienne, laplacien. Une convention utile est celle qui permet d'étendre la notion d'indice muet. Ainsi le produit scalaire qui se note $u_i v^i$ en calcul tensoriel ordinaire, est ici $\int_{\mathrm{D}} u_{\mathrm{P}} v^{\mathrm{P}}\, d\tau$, peut être noté simplement $u_{\mathrm{P}} v^{\mathrm{P}}$: l'indice P répété en positions supérieure et inférieure impliquant par convention, l'intégration dans le domaine D. On trouve formellement les mêmes formules qu'en calcul tensoriel ordinaire. Nous ne faisons que signaler ici les principales difficultés relatives à la résolution en x^{P} de l'équation intégrale

$$y^{\mathrm{Q}} = \int_{\mathrm{D_P}} \alpha^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}} x^{\mathrm{P}}\, d\tau_{\mathrm{P}} \quad \text{ou} \quad y(\mathrm{Q}) = \int_{\mathrm{D_P}} \alpha(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\, x(\mathrm{P})\, d\tau_{\mathrm{P}},$$

avec les notations courantes. Un cas particulier est la transformation de Laplace.

CHAPITRE II.

Équilibre des systèmes élastiques.

Soit un système matériel quelconque en équilibre. Nous l'imaginons décrit par un point P, ou mieux, représenté à l'aide d'un point P décrivant un domaine D. Nous supposerons souvent que D est un volume unique, mais D pourra comprendre plusieurs volumes, des surfaces, des lignes et des points isolés. P caractérisera toujours le même élément de matière.

Sous l'influence de charges données $\vec{\mathrm{Q}}\, d\tau$ réparties ($d\tau$ désignant l'élément de volume de D), le système matériel parvenant à un état d'équilibre, désignons par $\vec{\mathrm{U}}$ le déplacement du point P.

Soit δP un déplacement virtuel arbitraire, et $\delta\mathfrak{T}_i$ le travail correspondant des

forces intérieures. Le principe du travail virtuel nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\delta\mathfrak{W}_i + \int_D \vec{Q}\,\delta\vec{P}\,d\tau = 0.$$

Cette relation est valable quel que soit le système considéré, élastique ou non. Nous allons maintenant introduire une à une les hypothèses nécessaires à la théorie et souligner les propriétés particulières que chacune d'elles introduit.

Potentiel de forme. — Supposons que le travail des forces intérieures entre deux états du système ne dépende que de l'état de déformation initial et de l'état final. Nous dirons alors que les forces intérieures dépendent d'un potentiel de forme. (Nous évitons l'expression potentiel interne qui sous-entend d'autres formes d'énergie.) L'état libre, c'est-à-dire en l'absence de charges, est généralement choisi comme état initial. Le potentiel de forme se présente donc comme une fonctionnelle de U qui caractérise la déformation du système (le mot déformation est pris ici, dans son sens le plus vague).

Le système étant en équilibre sous l'action des charges Q qui ont causé le déplacement U, effectuons un déplacement virtuel δU. D'après les conventions habituelles de signe, ϖ représentant l'énergie récupérable par suppression de toutes les charges, la variation de potentiel $\delta\varpi$ changée de signe, représente le travail des forces intérieures. $\delta\varpi$ est nécessairement, par hypothèse de l'existence du potentiel de forme, une différentielle fonctionnelle

$$\delta\varpi = \int_D \vec{Q}\,\delta\vec{U}\,d\tau.$$

Loi de Hooke. — Désignons par état λ, λ étant une constante, l'état d'équilibre du système subissant les charges λQ; en particulier l'état *zéro* est l'état libre, l'état *un* est l'état sous l'action des charges Q. La loi de Hooke réside en ceci, que dans l'état λ les déplacements sont λU. Si l'on remarque que le déplacement en un point donné est une fonctionnelle des charges, on peut encore dire que le déplacement est une fonctionnelle homogène de la charge d'ordre un.

La loi de Hooke conduit à une autre expression de la différentielle du potentiel de forme, et aussi à la valeur de ce potentiel.

Partons en effet de l'état λ et passons à l'état voisin $\lambda + d\lambda$. Nous définissons ainsi un déplacement virtuel $\delta U = U\,\delta\lambda$. Comme la charge locale est λQ, les forces extérieures accomplissent le travail virtuel suivant :

$$\lambda\,\delta\lambda \int_D \vec{Q}.\vec{U}\,d\tau.$$

Pour un instant, nous pouvons considérer le potentiel de forme comme une

fonction de λ. Nous venons d'en calculer la différentielle. Si nous intégrons entre zéro et un, nous aurons le potentiel correspondant à l'état un :

$$\varpi = \frac{1}{2}\int_D \vec{Q}.\vec{U}\, d\tau.$$

Les postulats combinés d'existence du potentiel de forme et de la loi de Hooke nous ont permis de calculer le potentiel de forme. Comparons le résultat actuel avec la valeur de la différentielle trouvée avant l'introduction de la loi de Hooke. Désignons par X, Y, Z, les composantes de Q sur trois axes rectangulaires et par u, v, w, les composantes de U. Nous avions trouvé que

$$\delta\varpi = \int_D (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\, d\tau.$$

Ceci peut se traduire dans le langage fonctionnel en disant que *les dérivées partielles fonctionnelles du potentiel de forme par rapport aux composantes du déplacement sont égales aux composantes de même nom de la force massique*

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} = X, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial v} = Y, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial w} = Z.$$

Après introduction de la loi de Hooke, le potentiel de forme, et non plus seulement sa différentielle, se calcule ainsi

$$2\varpi = \int_D (Xu + Yv + Zw)\, d\tau.$$

Prenons alors la différentielle :

$$2\,\delta\varpi = \int_D (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\, d\tau + \int_D (u\,\delta X + v\,\delta Y + w\,\delta Z)\, d\tau,$$

et comparons avec les résultats antérieurs; les deux intégrales ci-dessus sont égales et peuvent servir indifféremment à représenter

$$\delta\varpi = \int_D (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\, d\tau = \int_D (u\,\delta X + v\,\delta Y + w\,\delta Z)\, d\tau.$$

Si nous considérons maintenant le potentiel de forme comme une fonctionnelle des charges, et non plus des déplacements comme précédemment, nous pouvons dire que *les composantes du déplacement sont les dérivées fonctionnelles du potentiel de forme par rapport aux composantes de la force massique*. On reconnaît l'énoncé du théorème de Castigliano, si le système matériel est soumis à un nombre fini de forces isolées.

Notons aussi la *symétrie entre force et déplacement*. On peut encore dire que le potentiel de forme exprimé en fonction des charges ou en fonction des déplacements sont deux fonctionnelles du second degré adjointes. Les propriétés démontrées dans le cas général sont vérifiées ici.

Il peut arriver que le déplacement du point P ait été mesuré au moyen de coordonnées curvilignes. Soit ξ, η, ζ ce déplacement. Si $L\,d\xi + M\,d\eta + N\,d\zeta$ désigne le travail virtuel d'une force Q dont le point d'application s'est déplacé de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, les mêmes calculs que ceux qui précèdent donnent la valeur du potentiel de forme et de sa différentielle :

$$2\varpi = \int_D (L\xi + M\eta + N\zeta)\,d\tau,$$

$$\delta\varpi = \int_D (L\,\delta\xi + M\,\delta\eta + N\,\delta\zeta)\,d\tau = \int_D (\xi\,dL + \eta\,dM + \zeta\,dN)\,d\tau.$$

Suivant que l'on exprime le potentiel de forme en fonction des déplacements ξ, η, ζ ou des charges L, M, N, on a l'un ou l'autre des deux systèmes équivalents :

$$L = \frac{\partial\varpi}{\partial\xi}, \qquad M = \frac{\partial\varpi}{\partial\eta}, \qquad N = \frac{\partial\varpi}{\partial\zeta},$$

$$\xi = \frac{\partial\varpi}{\partial L}, \qquad \eta = \frac{\partial\varpi}{\partial M}, \qquad \zeta = \frac{\partial\varpi}{\partial N}.$$

Les relations qui précèdent s'appliquent dans le cas de la dynamique des systèmes, puisque le principe du travail virtuel est encore valable, à condition que L, M, N fassent intervenir $\vec{Q} - \rho\vec{\gamma}$ au lieu de Q; ρ et γ désignant respectivement la densité cubique et l'accélération de P. Cependant sous cette forme ces expressions ne sont pas simples, et il est préférable d'évaluer les forces d'inertie et leur travail virtuel suivant une méthode dont le principe est dû à Lagrange. Le moyen le plus commode consiste à partir du principe d'Hamilton.

CHAPITRE III.

Dynamique des systèmes élastiques.

La position d'un système de solides indéformables en contact est entièrement connue grâce à la notion de paramètres de Lagrange : *avant toute considération dynamique, la position de chaque point du système est exprimable à l'aide d'un nombre fini de paramètres géométriques et du temps; ces paramètres peuvent être indépendants ou reliés par des conditions en termes finis ou non.*

Dans le cas d'un système élastique, un nombre fini de paramètres est insuffisant pour représenter en toute rigueur toute position admissible du système. Il est nécessaire de prendre une infinité de paramètres, question que nous laissons de côté, ou bien, de faire intervenir des fonctions arbitraires d'une, deux ou trois variables. Nous laissons aussi de côté la représentation approchée du système au moyen d'un nombre fini de paramètres qui conduirait à la théorie de Rayleigh-Ritz.

Prenons pour exemple un fil inextensible, parfaitement souple, dont une extrémité, O, est fixe, et qui se déplace dans le plan xOy. Si $\varphi(s, t)$, fonction de l'arc et du temps, représente l'angle que fait Ox avec la demi-tangente positive au fil, tout point du fil a pour coordonnées

$$x = \int_0^s \cos\varphi \, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\varphi \, ds.$$

φ est une fonction entièrement arbitraire, c'est ce que nous appellerons une *fonction-paramètre*, extension naturelle de la notion de paramètre de Lagrange.

Extension des equations de Lagrange. — Supposons que la position du système matériel que nous considérons, élastique ou non, dépende de fonctions-paramètres en nombre fini, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Cela veut dire que ces fonctions permettent d'évaluer les coordonnées d'un point quelconque du système dans une position déformée quelconque. On peut alors évaluer la force vive 2T du système. C'est une fonctionnelle bien déterminée des $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et de leurs dérivées par rapport au temps $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$. Nous savons déterminer un déplacement virtuel δP, qui dépend des φ, des $\delta\varphi$ et aussi des variables qui fixent la position de P dans le système libre. Nous admettons que par des transformations de calcul convenables, on puisse mettre le travail virtuel des forces intérieures et extérieures sous la forme suivante :

$$\delta\mathfrak{T} = \sum_h \int_{D_h} \Phi_h \, \delta\varphi_h \, d\tau_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

extension de la forme classique relative à un nombre fini de paramètres.

Rappelons l'énoncé du principe d'Hamilton, valable pour un déplacement virtuel arbitraire, conservant les liaisons ou non, pourvu que le travail virtuel $\delta\mathfrak{T}$ de toutes les forces, intérieures, extérieures ou de contact en tienne compte :

L'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathfrak{T} + \delta T)\, dt$ *est nulle pour un déplacement virtuel compté à partir du mouvement effectif, pourvu qu'aux deux instants* t_0 *et* t_1 *la position variée du système coïncide avec la position réelle.*

La force vive considérée comme une fonctionnelle des φ et des φ' séparément, est supposée dérivable. Sa différentielle a donc la valeur suivante :

$$\delta T = \sum_h \int_{D_h} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h} \delta\varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} \delta\varphi'_h \right) d\tau_h.$$

Grâce au principe d'Hamilton, nous pouvons écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_h \int_{t_0}^{t_1} \left(\Phi_h \delta\varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} \delta\varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} \delta\varphi'_h \right) d\tau_h \right] dt = 0.$$

Une intégration par parties élimine les $\delta\varphi'$:

$$\sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial \varphi'_h}\delta\varphi_h\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum\int_{D_h}\left(\Phi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'_h}\right)\delta\varphi_h\right] dt = 0,$$

d'où le résultat suivant, puisque les $\delta\varphi$ sont nuls aux instants t_0 et t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum\int_{D_h}\left(\Phi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'_h}\right)\delta\varphi_h\right] dt = 0.$$

Si les fonctions φ sont indépendantes, par un raisonnement classique du Calcul des variations, le coefficient de chaque fonction $\delta\varphi$ doit être nul, d'où les équations de Lagrange généralisées :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = \Phi_h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas où les fonctions φ ne sont pas indépendantes, mais sont reliées par k relations de la forme suivante :

$$\sum_h A_h^i\,\delta\varphi_h = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ h = 1, 2, \ldots, n),$$

nous constatons que la dernière forme intégrale à laquelle nous a conduit le principe d'Hamilton est encore valable. Multiplions par λ_i indéterminé la $i^{ième}$ relation entre les $\delta\varphi$. Ajoutons toutes les relations ainsi obtenues, intégrons le résultat obtenu. Comme il est nul, nous pouvons l'ajouter à l'intégrale d'Hamilton sans en changer la valeur,

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_h\int_{D_h}\left(\Phi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} + \sum_i \lambda_i A_h^i\right)\delta\varphi_h\right] dt = 0.$$

Pour déterminer les multiplicateurs λ_i annulons k coefficients des $\delta\varphi$. Il reste $n - k$ termes dans l'intégrale d'Hamilton. On peut supposer que les φ correspondants sont indépendants, sinon on ferait les modifications nécessaires dans le choix des coefficients annulés. On est ramené au cas antérieur, de φ indépendants, et par suite tous les coefficients des $\delta\varphi$, sans exception sont nuls ;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = \Phi_h + \sum_{i=1}^{k} A_h^i \lambda_i \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Théorème des forces vives. — La position du système est définie à l'aide de n fonctions-paramètres φ_h; chacune d'elles est définie dans un domaine D_h à 3, 2, 1 dimensions, et il peut même figurer parmi ces fonctions des paramètres ordinaires de Lagrange q_h.

La position d'un point M du système est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$, qui

est une fonctionnelle des φ_k, dépendant des paramètres qui précisent la position de M dans le système, et aussi du temps t éventuellement. Nous admettons que les fonctionnelles ou fonctions sont toutes dérivables et il en résulte l'existence d'une différentielle pour le vecteur OM :

$$\delta\vec{M} = \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} \delta\varphi_k \, dz_k + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \delta t.$$

On en déduit le vecteur vitesse du point M :

$$\vec{V} = \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} \varphi'_k \, dz_k + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}.$$

Pour abréger le langage nous dirons que $\delta\vec{M}$ est une forme linéaire en $\delta\varphi_k$ et δt (c'est une fonctionnelle linéaire particulière, c'est-à-dire homogène et de degré un). De même la force vive est une forme quadratique :

$$2T = \int \left[\sum_{k,l} \int_{D_k} \int_{D_l} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_l} \varphi'_k \varphi'_l \, dz_k \, dz_l + 2 \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} \varphi'_k \, dz_k + \frac{\partial \vec{M}^2}{\partial t} \right] dm.$$

La force vive sera une forme quadratique homogène si le temps n'intervient pas explicitement dans l'expression du vecteur OM en fonction des φ_k. Établissons le théorème des forces vives :

Si la position du système matériel dépend de n fonctions-paramètres indépendantes, sans dépendre explicitement du temps, et s'il existe une fonction de force U indépendante du temps, pour tout mouvement du système matériel la quantité T — U *reste constante au cours du mouvement.*

En effet écrivons les équations de Lagrange, multiplions la $k^{ième}$ équation par φ'_k, intégrons dans le domaine correspondant, et additionnons tous les résultats ainsi obtenus :

$$\sum_k \int_{D_k} \varphi'_k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} dz_k - \sum_k \int_{D_k} \varphi'_k \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} dz_k = \sum_k \int \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \varphi'_k \, dz_k.$$

Faisons la transformation classique du premier membre :

$$\frac{d}{dt} \sum_k \int_{D_k} \varphi'_k \frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} dz_k - \sum_k \int_{D_k} \left(\varphi''_k \frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} + \varphi'_k \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} \right) dz_k = \sum_k \int \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \varphi'_k \, dz_k.$$

Nous sommes dans les conditions où la force vive est une forme quadratique homogène, par suite, le premier terme de l'expression ci-dessus est la dérivée par rapport au temps de 2T, comme cela résulte du théorème d'Euler étendu au cas des fonctionnelles homogènes. Les termes suivants changés de signes représentent la dérivée totale de la force vive par rapport au temps. En effet, si l'on

se rappelle que dans cette théorie, les variables φ_k, φ'_k, t sont à considérer comme indépendantes dans les calculs formels, la différentielle de la force vive a la valeur suivante dans le cas général :

$$\delta T = \sum_k \int_{D_k} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} \delta \varphi'_k + \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k \right) d\tau_k + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t.$$

Ici, le dernier terme manque. On déduit immédiatement la valeur de $\frac{dT}{dt}$. En résumé, le premier membre de la combinaison linéaire des équations de Lagrange représente $\frac{dT}{dt}$. On voit de même que le second membre est la dérivée par rapport au temps de la fonction de force. On conclut donc que la différence T — U est constante au cours du temps.

Étude des petits mouvements. — La méthode élémentaire peut encore être étendue sans difficulté. On suppose que le système matériel proposé a sa position définissable au moyen de fonctions-paramètres sans qu'intervienne explicitement le temps ; on suppose qu'il existe une position d'équilibre quand le système est soumis à une fonction de force indépendante du temps.

Il est commode de supposer que les fonctions-paramètres sont nulles pour la position d'équilibre; elles resteront donc petites au cours du mouvement si l'équilibre est stable. En écrivant les équations de Lagrange, on voit que toutes les dérivées fonctionnelles de la fonction de force U doivent être nulles pour la position d'équilibre, et ceci suggère de prendre un développement de Taylor de U :

$$U(\psi + \varphi) = U(\psi) + \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial U}{\partial \psi_k} \varphi_k \, d\tau_k + \frac{1}{2} \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi_k \partial \psi_h} \varphi_k \varphi_h \, d\tau_k \, d\tau_h.$$

Ceci suppose que les dérivées fonctionnelles troisièmes sont bornées, point que nous admettons. Un développement de cette forme est pris avec les fonctions qui fournissent la position d'équilibre, c'est-à-dire zéro. Comme la fonction de force est définie à une constante additive près, on la supposera nulle pour l'équilibre. Les deux premiers termes du développement de Taylor sont nuls, et comme dans le cas élémentaire, on se borne à considérer la forme quadratique suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi_k \partial \psi_h} \varphi_k \varphi_h \, d\tau_k \, d\tau_h.$$

où, après avoir calculé les dérivées secondes, on a remplacé les fonctions par zéro. On obtient donc une forme quadratique telle que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} b_{kh} \varphi_k \varphi_h \, d\tau_k \, d\tau_h.$$

De même on verrait que dans la force vive on laisse les φ'_k tels qu'ils sont, mais on remplace par zéro les fonctions-paramètres figurant dans leurs coefficients. On trouve une forme quadratique du même type :

$$2\,T=\sum_{k,h}\int_{D_k}\int_{D_h} a_{kh}\varphi'_k\varphi'_h\,d\tau_k\,d\tau_h.$$

D'où le système des équations de Lagrange :

$$\sum_{h=1}^{n}\int_{D_h} a_{kh}\varphi''_h\,d\tau_h=\sum_{h=1}^{n}\int_{D_h} b_{kh}\varphi_h\,d\tau_h \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Cherchons les solutions périodiques, de la forme $\varphi_h=\Phi_h e^{rt}$, r étant une constante. Les fonctions Φ_h vérifient un système linéaire et homogène de la forme suivante :

$$\sum_{h}\int_{D_h}\lambda_{hk}\Phi_h\,d\tau_h=0, \qquad \lambda_{hk}=r^2a_{hk}-b_{hk}.$$

Si l'on sait résoudre le problème suivant : *trouver la condition fonctionnelle à laquelle doivent satisfaire les fonctions λ_{hk} soumises à des conditions frontières données pour qu'il existe un système de fonctions Φ_h non identiquement nul*, nous saurons former l'équation en r.

CHAPITRE IV.

Application a des problèmes classiques.

Poutre symétrique chargée posée sur deux appuis simples. — En l'absence de charges, la poutre considérée est rectiligne. Elle est posée sur deux appuis simples situés sur l'horizontale Ox, d'abscisses zéro et l. La poutre supporte une charge répartie $p(x)$ par unité de longueur. Négligeant les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal, nous admettrons la formule suivante qui donne le potentiel de forme en fonction du moment fléchissant M :

$$\varpi=\int_0^l\frac{M^2}{2EI}\,dx.$$

La flèche z, est comptée parallèlement à l'axe Oz, orienté suivant la verticale descendante. La réaction d'appui à droite a la valeur suivante :

$$R=-\frac{1}{l}\int_0^l\xi\,p(\xi)\,d\xi,$$

d'où la valeur du moment fléchissant :

$$M=-\int_x^l(\xi-x)p(\xi)\,d\xi-(l-x)R,$$

ou encore, pour l'exprimer comme une fonctionnelle de la charge

$$l\mathrm{M} = (l-x)\int_0^x \xi p(\xi)\,d\xi + x\int_x^l (l-\xi)p(\xi)\,d\xi.$$

D'après la formule rappelée pour le potentiel de forme, la différentielle du potentiel vaut, si EI est constant le long de la poutre,

$$\mathrm{EI}\,l\,\delta\varpi = \int_0^l \mathrm{M}\left[(l-x)\int_0^x \xi\,\delta p(\xi)\,d\xi + x\int_x^l (l-\xi)\,\delta p(\xi)\,d\xi\right]dx.$$

Or, le domaine d'intégration de la première intégrale double est le triangle $o<\xi<x<l$. Si nous échangeons l'ordre des intégrations, nous obtenons

$$\int_0^l \xi\left[\int_\xi^l \mathrm{M}(x)\,(l-x)\,dx\right]\delta p(\xi)\,d\xi.$$

De même pour la deuxième intégrale qui se transforme en

$$\int_0^l (l-\xi)\left[\int_0^\xi x\,\mathrm{M}(x)\,dx\right]\delta p(\xi)\,d\xi.$$

Nous parvenons ainsi à la valeur suivante de la différentielle du potentiel de forme

$$\mathrm{EI}\,l\,\delta\varpi = \int_0^l \left[\xi\int_\xi^l (l-x)\,\mathrm{M}(x)\,dx + (l-\xi)\int_0^\xi x\,\mathrm{M}(x)\,dx\right]\delta p(\xi)\,d\xi,$$

d'où la dérivée du potentiel par rapport à la charge

$$\frac{\partial\varpi}{\partial p(\xi)} = \frac{1}{\mathrm{EI}\,l}\left[\xi\int_\xi^l (l-x)\,\mathrm{M}(x)\,dx + (l-\xi)\int_0^\xi x\,\mathrm{M}(x)\,dx\right].$$

D'après l'extension fournie du théorème de Castigliano, cette expression représente exactement la flèche au point d'abscisse x.

Vérification. — Pour obtenir la flèche $z(x)$, la méthode classique consiste à intégrer l'équation différentielle suivante :

$$\mathrm{EI}\,z'' = -\mathrm{M},$$

et d'en déterminer la solution qui est nulle aux deux extrémités. Une première intégration donne le résultat suivant :

$$\mathrm{EI}\,z' = \mathrm{A} - \mathrm{U}(x), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{U}(\xi) = \int_0^\xi \mathrm{M}(x)\,dx.$$

Une deuxième intégration par parties donne ensuite

$$\mathrm{EI}\,z = \mathrm{A}x - \int_0^x \mathrm{U}(\xi)\,d\xi = \mathrm{A}x + \int_0^x \mathrm{U}(\xi)\,d(x-\xi)$$

$$= [(x-\xi)\,\mathrm{U}(\xi)]_0^x + \mathrm{A}x - \int_0^x (x-\xi)\,\mathrm{U}'(\xi)\,d\xi.$$

Or U est nul pour $x = 0$, donc

$$EIz = Ax - \int_0^x (x - \xi)\, M(\xi)\, d\xi.$$

Nous déterminons la constante A en annulant z pour $x = l$:

$$0 = Al - \int_0^l (l - \xi)\, M(\xi)\, d\xi.$$

Si l'on élimine A, on trouve le même résultat que par la méthode de la dérivée fonctionnelle.

Remarque. — Nous avons exprimé le potentiel de forme à l'aide de la charge locale, et nous en avons déduit z. Si inversement nous évaluons ce même potentiel en fonction de z, nous trouvons

$$2\varpi = EI \int_0^l z''^2\, dx, \qquad \text{car} \quad M = -EIz''.$$

Sa différentielle a la valeur suivante :

$$\delta\varpi = EI \int_0^l z''\, \delta z''\, dx = EI\,[z''\, \delta z' - z'''\, \delta z]_0^l + EI \int_0^l z^{iv}\, \delta z\, dx.$$

Laissant de côté pour l'instant la partie intégrée, qui est d'ailleurs nulle, la dérivée fonctionnelle du potentiel de forme par rapport à z vaut z^{iv} et nous savons d'autre part qu'elle représente la valeur de la charge locale $p = EIz^{iv}$.

Or, la théorie classique permet de relier le moment fléchissant à l'effort tranchant T, et à la charge locale p par les formules suivantes :

$$p = T', \qquad T = -M'.$$

L'élimination de T et M donne bien la relation obtenue plus haut. Nous avons un premier exemple de deux relations : z fonctionnelle de p, et p fonctionnelle de z, qui sont adjointes. Chacune d'elles est la solution de l'autre si on la résout par rapport à l'autre fonction.

Pour terminer, remarquons qu'à l'extrémité fixe $\delta z = 0$, et le moment fléchissant est nul, donc $z'' = 0$, et la partie tout intégrée de $\delta\varpi$ est bien nulle comme nous l'avions annoncé.

Vibrations transversales des verges. — Une poutre rectiligne est encastrée à l'origine des coordonnées, où elle reste constamment tangente à l'axe des x. L'extrémité $x = l$ est libre. De plus, la poutre supporte la charge locale $p(x)$. Soit $u(x, t)$ la quantité dont s'abaisse à l'instant t le point de la verge d'abscisse x. Le potentiel de forme a la valeur suivante :

$$2\varpi = \int_0^l EI\,(u''_{,x^2})^2\, dx.$$

Sa différentielle vaut, comme plus haut :

$$\delta\varpi = \int_0^l \mathrm{EI}\, u''_{x^2}\, \delta u''_{x^2}\, dx = [\mathrm{EI}\, u''_{x^2}\, \delta u'_x - (\mathrm{EI}\, u''_{x^2})'_x\, \delta u]_0^l + \int_0^l (\mathrm{EI}\, u''_{x^2})''_{x^2}\, \delta u\, dx.$$

Le crochet est nul à l'extrémité fixe car $\delta u = \delta u'_x = 0$; à l'extrémité libre l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls, donc $u''_{x^2} = u'''_{x^3} = 0$, par suite, le crochet est nul aussi pour $x = l$.

Le travail élémentaire des forces extérieures et intérieures a donc la valeur suivante :

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l p\, \delta z\, dx - \delta\varpi = \int_0^l [p - (\mathrm{EI}\, u''_{x^2})''_{x^2}]\, \delta z\, dx.$$

D'autre part la force vive de la poutre a la valeur suivante :

$$2\mathrm{T} = \int_0^l \rho\, u'^2_t\, dx.$$

dont nous calculons la différentielle

$$\delta\mathrm{T} = \int_0^l \rho\, u'_t\, \delta u'_t\, dx,$$

ce qui nous indique que

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u'_t} = \rho\, u'_t.$$

L'équation de Lagrange du problème est la suivante :

$$(\rho\, u'_t)'_t = p - (\mathrm{EI}\, u''_{x^2})''_{x^2},$$

c'est bien l'équation classique.

La méthode qui consiste à considérer le potentiel de forme comme une fonctionnelle de la charge possède un inconvénient bien connu, c'est de n'être valable qu'en dehors des points où sont appliquées des charges ponctuelles; au moins en apparence, car l'introduction de l'effort tranchant et du moment fléchissant, non forcément continus, permet d'introduire les charges et les couples isolés. Il s'agit en réalité des termes intégraux supplémentaires que nous avons considérés dans la théorie générale. Nous laissons entièrement de côté cette question.

CHAPITRE V.

Applications nouvelles.

Mouvement plan d'un fil inextensible. — Soit un fil mobile dans le plan xOy, sans frottement. Le fil possède une extrémité fixe qui est l'origine des coordonnées, O, et l'origine des abscisses curvilignes sur le fil. Soient $X\,ds$ et $Y\,ds$

les composantes de la résultante des forces extérieures sur l'élément d'arc ds du fil. Comme fonction-paramètre pour déterminer la position de chaque point du fil, nous prendrons $\varphi(s, t)$, angle que fait Ox avec la demi-tangente positive au fil. Les coordonnées rectangulaires d'un point du fil à l'instant t, défini par son abscisse curviligne s sont données par les formules suivantes :

$$x = \int_0^s \cos\varphi \, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\varphi \, ds.$$

Ce sont bien des fonctionnelles de φ, dépendant encore du paramètre s. Nous allons mettre le problème en équation par la méthode de Lagrange généralisée. Pour cela nous avons besoin du travail virtuel des forces extérieures. Un déplacement virtuel du fil qui conserve les liaisons, et en particulier la longueur du fil s'obtient en différentiant les formules donnant x et y par rapport à φ, les variables s et t faisant figure de paramètres dans cette opération :

$$\delta x = -\int_0^s \sin\varphi \, \delta\varphi \, ds, \qquad \delta y = \int_0^s \cos\varphi \, \delta\varphi \, ds.$$

On en déduit une première forme du travail élémentaire

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l \left[-X \int_0^s \sin\varphi \, \delta\varphi \, ds + Y \int_0^s \cos\varphi \, \delta\varphi \, ds \right] ds,$$

que nous devons transformer pour le mettre sous la forme suivante :

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l \Phi \, \delta\varphi \, ds.$$

Pour parvenir à cette forme, nous appliquons la formule d'intégration par partie :

$$\int_0^l u' v \, ds = [uv]_0^l - \int_0^l uv' \, ds;$$

nous posons dans la première intégrale :

$$u = \int_s^l X \, ds, \qquad v = \int_0^s \sin\varphi \, \delta\varphi \, ds,$$

et dans la seconde :

$$u = -\int_s^l Y \, ds, \qquad v = \int_0^s \cos\varphi \, \delta\varphi \, ds,$$

de sorte que nous avons le résultat suivant, sous la forme désirée :

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l \left[-\sin\varphi \int_s^l X \, dx + \cos\varphi \int_s^l Y \, ds \right] \delta\varphi \, ds.$$

Nous avons besoin de la force vive et de sa différentielle :

$$2T = \int_0^l \rho(x'^2 + y'^2)\, ds, \qquad \delta T = \int_0^l \rho(x'\,\delta x' + y'\,\delta y')\, ds.$$

Il y figure les composantes de la vitesse

$$x' = -\int_0^s \varphi' \sin\varphi\, ds, \qquad y' = \int_0^s \varphi' \cos\varphi\, ds,$$

et leurs différentielles

$$\delta x' = -\int_0^s \delta\varphi' \sin\varphi\, ds - \int_0^s \varphi'\,\delta\varphi \cos\varphi\, ds,$$

$$\delta y' = -\int_0^s \delta\varphi' \cos\varphi\, ds - \int_0^s \varphi'\,\delta\varphi \sin\varphi\, ds.$$

D'où la différentielle de la force vive :

$$\delta T = \int_0^l \left[-\rho x' \int_0^s \delta\varphi' \sin\varphi\, ds + \rho y' \int_0^s \delta\varphi' \cos\varphi\, ds \right.$$
$$\left. - \rho x' \int_0^s \varphi'\,\delta\varphi \cos\varphi\, ds - \rho y' \int_0^s \varphi'\,\delta\varphi \sin\varphi\, ds \right] ds,$$

dont nous transformons chacune des quatre intégrales par la méthode indiquée à propos du travail virtuel, de sorte que l'on a

$$\delta T = \int_0^l \left[-\sin\varphi \int_s^l \rho x'\, ds + \cos\varphi \int_s^l \rho y'\, ds \right] \delta\varphi'\, ds$$
$$- \int_0^l \left[\cos\varphi \int_s^l \rho x'\, ds + \sin\varphi \int_s^l \rho y'\, ds \right] \varphi'\,\delta\varphi\, ds.$$

Cette forme met en évidence les dérivées fonctionnelles, utiles pour appliquer la méthode de Lagrange :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = -\sin\varphi \int_s^l \rho x'\, ds + \cos\varphi \int_s^l \rho y'\, ds,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\varphi' \left[\cos\varphi \int_s^l \rho x'\, ds + \sin\varphi \int_s^l \rho y'\, ds \right].$$

L'équation du problème est donc la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\sin\varphi \int_s^l \rho x'\, ds + \cos\varphi \int_s^l \rho y'\, ds \right) + \varphi' \left(\cos\varphi \int_s^l \rho x'\, ds + \sin\varphi \int_s^l \rho y'\, ds \right)$$
$$= -\sin\varphi \int_s^l X\, ds + \cos\varphi \int_s^l Y\, ds.$$

Si nous effectuons la dérivation par rapport au temps, nous pouvons encore écrire, sous une forme plus condensée :

$$-\sin\varphi \int_s^l (\rho x'' - X)\, ds + \cos\varphi \int_s^l (\rho y'' - Y)\, ds = 0.$$

Telle est l'équation intégrodifférentielle à laquelle satisfait φ. Il reste bien entendu à y remplacer x et y en fonction de φ.

Cette équation apparaît comme assez compliquée. Son avantage théorique est de ne faire intervenir que le paramètre géométrique φ et d'être débarassée des réactions : tension du fil et réaction en O.

Il est possible d'obtenir la dernière équation par une autre voie, en supposant d'abord écrites les équations du mouvement d'un fil inextensible qui font intervenir la tension. Cela ne présente pas d'autre intérêt que de fournir une vérification. On a en effet

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\mathrm{X},\qquad \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\mathrm{Y},\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2=1.$$

Intégrons les deux premières équations entre s et l. Puisqu'à l'extrémité libre la tension est nulle, nous avons

$$\int_s^l(\rho x''-\mathrm{X})\,ds=-\mathrm{T}\cos\varphi,\qquad \int_s^l(\rho y''-\mathrm{Y})\,ds=-\mathrm{T}\sin\varphi.$$

L'élimination de T conduit à la dernière équation obtenue plus haut.

Mouvement d'un fil inextensible sur une surface. — Voici un exemple de système matériel pour lequel on ne peut pas toujours trouver explicitement la fonction-paramètre dont il dépend, mais pour lequel il existe deux fonctions-paramètres reliées par une condition fonctionnelle.

Considérons une surface fixe ou mobile, lieu d'un point P dont la position dépend de deux paramètres α, β et du temps t. Les deux paramètres α, β individualisent un élément matériel de la surface. Un fil est en mouvement sur cette surface. Soit s l'abscisse curviligne d'un point du fil. A temps constant, le vecteur unitaire tangent au fil est ainsi défini :

$$\vec{\mathrm{P}}'_s=\vec{\mathrm{P}}'_\alpha\alpha'_s+\vec{\mathrm{P}}'_\beta\beta'_s.$$

Comme sa longueur est l'unité, nous avons donc, avec les notations de Gauss pour la théorie des surfaces :

$$\mathrm{E}\alpha'^2_s+2\mathrm{F}\alpha'_s\beta'_s+\mathrm{G}\beta'^2_s=1.$$

Ce n'est que dans des cas exceptionnels que l'on sait résoudre une telle relation en α et β, par introduction d'une fonction arbitraire, comme dans le cas d'une surface applicable sur une surface de révolution. Ainsi dans le cas d'une sphère fixe, où les paramètres sont la longitude φ et la colatitude θ, la relation ci-dessus devient

$$\theta'^2_s+\sin^2\theta\varphi'^2_s=1.$$

On peut la résoudre par introduction d'une fonction arbitraire $f(s, t)$ de l'arc et du temps, de la manière suivante :

$$\theta'_s = \cos f, \qquad \sin\theta\varphi'_s = \sin f.$$

De cette manière φ et θ sont explicitement évalués au moyen de la fonction-paramètre f, dans le cas d'un fil ayant une extrémité fixe sur la surface, grâce aux formules suivantes :

$$\theta = \int_0^s \cos f\, ds, \qquad \varphi = \int_0^s \frac{\sin f}{\sin\theta}\, ds,$$

où il reste à remplacer θ explicitement en fonction de f dans la deuxième intégrale. Les calculs sont relativement compliqués, et dans bien des cas il vaut mieux opérer comme si la résolution était impossible. Il nous faut alors conserver les deux fonctions-paramètres α et β reliées par la condition fonctionnelle.

Pour effectuer la mise en équation; calculons d'abord la vitesse, puis la force vive du fil :

$$\vec{V} = \vec{P}'_\alpha \alpha'_t + \vec{P}'_\beta \beta'_t + \vec{P}'_t,$$

$$2T = \int_0^l \rho(E\alpha'^2_t + 2F\alpha'_t\beta'_t + G\beta'^2_t + 2H\alpha'_t + 2K\beta'_t + L)\, ds,$$

en introduisant des notations évidentes.

Comme le déplacement virtuel de P a la forme suivante

$$\delta\vec{P} = \vec{P}'_\alpha \delta\alpha + \vec{P}'_\beta \delta\beta,$$

on en déduit le travail virtuel des forces extérieures

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l (Q\,\delta\alpha + R\,\delta\beta)\, ds,$$

forme valable quelle que soit la relation reliant α et β.

Reportons-nous à la méthode et aux calculs qui nous ont conduit aux équations de Lagrange. L'intégration par parties par rapport au temps faite dans l'intégrale d'Hamilton reste valable, bien que les deux fonctions-paramètres ne soient plus indépendantes. Nous avons donc la relation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l (Q\,\delta\alpha + R\,\delta\beta)\, ds + \int_0^l \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \alpha'} \right) \delta\alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \beta'} \right) \delta\beta \right] ds \right\} dt = 0.$$

Les deux variations $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ ne sont pas indépendantes car nous devons avoir

$$(E\alpha'_s + F\beta'_s)\,\delta\alpha'_s + (F\alpha'_s + G\beta'_s)\,\delta\beta'_s + (E'_\alpha\alpha'^2_s + 2F'_\alpha\alpha'_s\beta'_s + G'_\alpha\beta'^2_s)\,\delta\alpha + (E'_\beta\alpha'^2_s + 2F'_\beta\alpha'_s\beta'_s + G'_\beta\beta'^2_s)\,\delta\beta = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par une fonction λ arbitraire, et intégrons tout le long du fil :

$$\int_0^l \lambda[(E\alpha'_s + F\beta'_s)\,\delta\alpha'_s + \dots]\,ds = 0.$$

Une intégration par parties en s ne fait intervenir que $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ et non plus leurs dérivées

$$[\lambda(E\alpha'_s + F\beta'_s)\,\delta\alpha + \lambda(F\alpha'_s + G\beta'_s)\,\delta\beta]_0^l + \int_0^l \left\{ \left[\lambda(E'_\alpha \alpha'^2_s + 2F'_\alpha \alpha'_s\beta'_s + G'_\alpha \beta'^2_s) - \frac{\partial}{\partial s}\lambda(E\alpha'_s + F\beta'_s) \right]\delta\alpha + \left[\lambda(E'_\beta \alpha'^2_s + 2F'_\beta \alpha'_s\beta'_s + G'_\beta \beta'^2_s) - \frac{\partial}{\partial s}\lambda(F\alpha'_s + G\beta'_s) \right]\delta\beta \right\} ds = 0.$$

Nous montrerons plus tard que la partie intégrée est nulle. Admettons qu'il en est bien ainsi, et intégrons l'expression ainsi obtenue par rapport au temps entre les instants t_0 et t_1, et retranchons le résultat, qui est nul, à l'intégrale d'Hamilton : $\int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l (\mathcal{A}\,\delta\alpha + \mathcal{B}\,\delta\beta)\,ds = 0$,

$$\mathcal{A} = Q + \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \alpha'_t} - \lambda(E'_\alpha \alpha'^2_s + 2F'_\alpha \alpha'_s\beta'_s + G'_\alpha \beta'^2_s) + \frac{\partial}{\partial s}\lambda(E\alpha'_s + F\beta'_s),$$

$$\mathcal{B} = R + \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \beta'_t} - \lambda(E'_\beta \alpha'^2_s + 2F'_\beta \alpha'_s\beta'_s + G'_\beta \beta'^2_s) + \frac{\partial}{\partial s}\lambda(F\alpha'_s + G\beta'_s).$$

Nous déterminons la fonction λ, jusqu'ici arbitraire, en annulant le coefficient de $\delta\alpha$. En conséquence le coefficient de $\delta\beta$ doit aussi être nul. Nous sommes ainsi ramenés à l'intégration du système différentiel suivant :

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0,$$

où les inconnues sont α, β, λ. La troisième relation est celle qui exprime que s est l'arc du fil. Les dérivées fonctionnelles de la force vive ont les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'_t} = \rho(E\alpha'_t + F\beta'_t + H),$$

$$2\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \alpha'^2_t \frac{\partial \rho E}{\partial \alpha} + 2\alpha'_t\beta'_t \frac{\partial \rho F}{\partial \alpha} + \beta'^2_t \frac{\partial \rho G}{\partial \alpha} + 2\alpha'_t \frac{\partial \rho H}{\partial \alpha} + 2\beta'_t \frac{\partial \rho K}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho L}{\partial \alpha},$$

$\frac{\partial T}{\partial \beta'_t}$ et $\frac{\partial T}{\partial \beta}$ ont des valeurs analogues.

Pour montrer que les conditions d'extrémités du fil annulent le crochet rencontré plus haut, nous aurons besoin d'interpréter mécaniquement la fonction λ. Nous allons montrer qu'elle s'identifie avec la tension du fil, c'est-à-dire avec la force qu'il faut introduire en P, quand on supprime la portion de fil dont l'abscisse curviligne est supérieure à celle de P, si l'on veut que le mouvement ultérieur du fil ne soit pas modifié.

En effet, reprenons les calculs antérieurs qui nous ont fourni la mise en équation avec les nouvelles considérations suivantes : le principe du travail virtuel est appliqué à la portion du fil dont l'abscisse curviligne est comprise entre zéro et s; en P nous introduisons une tension $\vec{\Theta}$ dont le travail virtuel est $\vec{\Theta}\,\delta\vec{P}$. On parvient, après avoir repris tous les calculs, à la forme finale de l'intégrale d'Hamilton qui contient une partie tout intégrée :

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^s\left[(\mathcal{A}\,\delta\alpha+\mathcal{B}\,\delta\beta)\,ds+\vec{\Theta}\,\delta\vec{P}\right]_0^s-\lambda\left[(E\alpha'_s+F\beta'_s)\,\delta\alpha+(F\alpha'_s+G\beta'_s)\,\delta\beta\right]_0^s\right\}dt=0.$$

Pour interpréter λ, nous devons nous rappeler que cette fonction annule $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Il en découle la relation suivante valable à chaque instant pour tout déplacement virtuel conservant la longueur du fil, et maintenant le fil sur la surface

$$\left[\vec{\Theta}\,\delta\vec{P}-\lambda(E\alpha'_s+F\beta'_s)\,\delta\alpha-\lambda(F\alpha'_s+G\beta'_s)\,\delta\beta\right]_0^s=0.$$

Comme les déplacements virtuels aux deux extrémités du fil sont indépendants, le crochet doit être nul en chaque point du fil. Avec un déplacement virtuel suivant la normale géodésique au fil, le coefficient de λ est nul : le travail de la réaction est alors nul, donc la composante correspondante de la réaction est nulle. Si nous prenons un déplacement δs suivant la tangente au fil, nous avons

$$\delta\alpha=\alpha'_s\,\delta s,\qquad \delta\beta=\beta'_s\,\delta s,$$

et le coefficient de λ est δs. Ceci démontre que *la composante tangentielle de la réaction est égale à λ; la composante suivant la normale géodésique est nulle*. La composante de la réaction suivant la normale à la surface n'est pas déterminée par ce raisonnement.

D'une façon générale, en une extrémité libre de fil mobile sur une surface, la tension est nulle, c'est-à-dire λ. Le crochet

$$[\lambda(E\alpha'_s+F\beta'_s)\,\delta\alpha+\lambda(F\alpha'_s+G\beta'_s)\,\delta\beta],$$

que l'on rencontre dans la relation entre $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ est bien nul en une extrémité libre. En une extrémité fixe, où α et β ont des valeurs bien déterminées, $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ sont nuls, et par suite le crochet précédent est encore nul. La relation intégrale entre λ, $\delta\alpha$, $\delta\beta$ a bien la forme que nous avions admise.

Vibrations d'une courbe élastique dans son plan. — Soit une courbe élastique encastrée à l'origine O des coordonnées de façon que Ox soit la tangente de départ de la courbe. s représente l'abscisse curviligne d'un point de la courbe, et α l'angle que fait Ox avec la tangente orientée du fil. R est le rayon de courbure

en ce même point. Les coordonnées d'un point de la courbe sont données par les formules suivantes :

$$x = \int_0^{\alpha} R\cos\alpha\, d\alpha, \qquad y = \int_0^{\alpha} R\sin\alpha\, d\alpha,$$

α_0 correspondra à l'extrémité libre du fil.

Quand on suppose que la section de la courbe matérielle est petite vis-à-vis de sa longueur, la déformation de la courbe consiste principalement en variation du rayon de courbure, l'allongement étant négligeable. Nous faisons donc l'hypothèse que la longueur de la courbe est invariable. Dans ces conditions, pour de faibles déplacements de la courbe, les coordonnées d'un point, qui sont x et y pour la courbe libre, deviennent $x+\xi$ et $y+\eta$. ξ, η sont deux fonctions de α et t que nous supposons petites ainsi que leurs dérivées en α. Si nous écrivons que la courbe libre et la courbe déformée ont le même arc, nous obtenons

$$0 = (dx+d\xi)^2+(dy+d\eta)^2-(dx^2+dy^2) = 2(dx\,d\xi+dy\,d\eta)+(d\xi^2+d\eta^2).$$

Le dernier terme étant négligeable, ξ, η doivent vérifier la condition suivante assurant l'inextensibilité du fil :

$$\cos\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\sin\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}=0.$$

Pour satisfaire à cette condition, introduisons une fonction arbitraire $\varphi(\alpha, t)$, en posant

$$\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha=\varphi.$$

Cette relation dérivée par rapport à α, quand on tient compte de la condition ci-dessus, se réduit à

$$-\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha=\varphi'_\alpha.$$

Résolvons ces deux dernières relations en ξ et η; *nous obtenons les fonctions* ξ, η, *les plus générales conservant les longueurs des courbes planes*

$$\xi=\varphi\cos\alpha-\varphi'_\alpha\sin\alpha, \qquad \eta=\varphi\sin\alpha+\varphi'_\alpha\cos\alpha.$$

On peut interpréter ces relations en remarquant que φ et φ'_α sont précisément les composantes du déplacement suivant la tangente et la normale à la courbe.

Dans le problème des petits mouvements d'une courbe élastique, φ est la fonction-paramètre. Nous allons mettre le problème en équation en supposant qu'aucune force extérieure n'agit sur la courbe en dehors des réactions d'encastrement.

La vitesse d'un point de la courbe se calcule très simplement par rapport à la tangente et la normale à la courbe libre. Par rapport à ces axes particuliers, qui sont fixes pour un point P donné, nous avons vu que les coordonnées rectangulaires de P sont φ, φ'_α. Les composantes de la vitesse de ce point

s'obtiennent en dérivant par rapport au temps φ'_t, $\varphi''_{\alpha t}$. La force vive du système a donc la valeur suivante :

$$2T = \int_0^{\alpha_0} \rho R(\varphi_t'^2 + \varphi_{\alpha t}''^2)\, d\alpha.$$

Cette expression est une fonctionnelle de $u = \varphi'_t$ et non de φ. Elle se présente sous la forme suivante :

$$2T = \int_0^{\alpha_0} \rho R(u^2 + u'^2)\, d\alpha,$$

et par suite sa différentielle vaut

$$\delta T = [\rho R \varphi''_{\alpha t}\, \delta\varphi'_t]_0^{\alpha_0} + \int_0^{\alpha_0} \left[\rho R \varphi'_t - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho R \varphi''_{\alpha t})\right] \delta\varphi'_t\, d\alpha.$$

Nous admettons que le crochet est nul, point que nous vérifierons plus tard. L'équation de Lagrange du problème est donc la suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\rho R\varphi - (\rho R \varphi'_\alpha)'_\alpha] + \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = 0.$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, admettons la formule suivante pour le potentiel de forme

$$2\varpi = \int_0^{\alpha_0} EIR\left(\Delta \frac{1}{R}\right)^2 d\alpha,$$

en désignant par $R + \Delta R$ le rayon de courbure de la courbe en mouvement. Appelons $\alpha + \sigma$ l'angle que fait avec Ox, la tangente orientée de la courbe en mouvement, et indiquons par des accents les dérivations en α. L'angle σ se calcule de la manière suivante :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \sigma) = \frac{d(y + \eta)}{d(x + \xi)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\varphi + \varphi''}{R}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \dfrac{\varphi + \varphi''}{R}}.$$

Comme σ est une quantité petite,

$$\sigma = \frac{\varphi + \varphi''}{R}.$$

On en déduit *la nouvelle courbure*

$$\frac{1}{R} + \Delta\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\frac{\partial(\alpha + \sigma)}{\partial\alpha} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\left(\frac{\varphi + \varphi''}{R}\right)',$$

et la valeur du *potentiel de forme*

$$2\varpi = \int^{\alpha_0} \frac{M^2}{EI} R\, d\alpha \qquad \text{si} \quad M = \frac{EI}{R}\left(\frac{\varphi + \varphi''}{R}\right)'.$$

Comme nous avons une intégrale définie portant sur une fonction au sens ordinaire de φ et de ses dérivées, on a immédiatement

$$\delta\varpi = \left[M\frac{\delta\varphi + \delta\varphi''}{R} - \frac{M'}{R}\delta\varphi' + \left(\frac{M'}{R}\right)'\delta\varphi \right]_0^{\alpha_0} - \int_0^{\alpha_0} \left[\frac{M'}{R} + \left(\frac{M'}{R}\right)'' \right] \delta\varphi \, d\alpha.$$

A l'extrémité fixe, $\delta\varphi = \delta\varphi' = 0$, puisque α, ξ et η sont nuls. Si nous calculons encore

$$\varphi'' = (-\xi' \sin\alpha + \eta' \cos\alpha) - (\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha),$$

nous trouvons zéro à l'extrémité fixe, car $\eta' = 0$ comme conséquence de l'encastrement. A l'extrémité libre, le moment fléchissant et ses deux premières dérivées sont nulles. La partie tout intégrée ci-dessus est donc nulle. Nous connaissons la dérivée fonctionnelle du potentiel par rapport à φ, ce qui nous permet d'écrire d'une manière complète, l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\rho R\varphi - (\rho R\varphi')'] = \frac{1}{R}\left[\frac{EI}{R}\left(\frac{\varphi + \varphi''}{R}\right)'\right]' + \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{EI}{R}\left(\frac{\varphi + \varphi''}{R}\right)'\right]'\right\}''.$$

C'est une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène. Cherchons-en les solutions propres, c'est-à-dire celles qui sont de la forme suivante :

$$\varphi(\alpha, t) = \psi(\alpha)\, e^{i\omega t},$$

ψ doit vérifier l'équation linéaire et homogène suivante :

$$\omega^2[\rho R\psi - (\rho R\psi')'] + \frac{1}{R}\left[\frac{EI}{R}\left(\frac{\psi + \psi''}{R}\right)'\right]' + \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{EI}{R}\left(\frac{\psi + \psi''}{R}\right)'\right]'\right\}'' = 0.$$

C'est une équation différentielle du sixième ordre qui doit satisfaire aux six conditions suivantes : Pour $\alpha = 0$, φ et ses deux premières dérivées doivent être nulles; pour $\alpha = \alpha_0$, le moment fléchissant M et ses deux premières dérivées doivent être nuls. En général, la seule solution possible est identiquement nulle, sauf si la constante ω vérifie une certaine relation appelée équation aux pulsations propres, dont nous désignons les racines en nombre infini par ω_n. Les λ_n étant des constantes, la solution générale de l'équation différentielle se présente alors sous la forme suivante :

$$\varphi(\alpha, t) = \sum_n \lambda_n \psi_n(\alpha)\, e^{i\omega_n t},$$

et il conviendrait de rechercher si l'on peut choisir les nombres λ_n pour vérifier les conditions initiales de position et de vitesse, qui donnent les valeurs pour $t = 0$, de φ, φ'_α, φ'_t, $\varphi''_{\alpha t}$.

Considérons en particulier le cas d'un arc de cercle (le cas de la poutre droite est exclu, car on ne peut prendre α comme paramètre sur une droite), homogène, de section constante. L'équation ψ devient alors

$$\frac{R^4\omega^2\rho}{EI}(\psi - \psi'') + (\psi + \psi'')'' + (\psi + \psi'')^{IV} = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients constants, qui a pour équation caractéristique

$$\frac{R^4\omega^2\rho}{EI}(1-r^2)+r^2(1+r^2)^2=0.$$

On met la solution générale de l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$\psi=\Sigma(A_i\operatorname{sh}r_i\alpha+B_i\operatorname{ch}r_i\alpha)\qquad(i=1,2,3),$$

où $\pm r_i$ sont les racines de l'équation caractéristique; on écrit ensuite les six conditions d'extrémités précédemment données. Ce sont six équations linéaires et homogènes en A_i, B_i, avec des coefficients en r. Si l'on annule le déterminant de ce système d'équations linéaires on obtient une condition pour les racines de l'équation caractéristique. Nous sommes ainsi ramenés à un problème d'élimination.

Vibrations d'une courbe de forme et de section quelconques. — Soit une courbe élastique quelconque soumise à des conditions d'extrémités non précisées. Dans le cas d'une courbe métallique, les vibrations n'altèrent pas d'une manière sensible les longueurs. Nous allons donc préciser par le calcul la position d'une courbe voisine d'une courbe donnée. Nous introduisons ainsi trois fonctions-paramètres et nous évaluerons ensuite, à la manière classique, le potentiel de forme dans une position déformée quelconque.

Soient P un point de la courbe donnée, supposée libre de charges, et $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, les trois vecteurs unitaires du trièdre principal de la courbe en P. Si P_1 est la position du point P à un instant quelconque, désignons par $\vec{U}$ le vecteur $\overrightarrow{PP_1}$. Écrivons que les lieux de P et de P_1 ont le même arc; on trouve successivement

$$d\vec{P}^2=(d\vec{P}+d\vec{U})^2,\qquad d\vec{P}\,d\vec{U}=0,$$

$$\vec{t}.\vec{U}'=0,\qquad(\vec{t}.\vec{U})'-\frac{\vec{U}.\vec{n}}{R}=0.$$

Les dérivées par rapport à l'arc sont indiquées par un accent, R et T sont les rayons de courbure et de torsion de la courbe donnée au point P.

La dernière relation met en évidence les projections de U sur les axes du trièdre principal, soient u, v, w. Deux de ces composantes sont arbitraires. *Le déplacement le plus général qui conserve les longueurs des arcs dépend de deux fonctions arbitraires* φ, ψ, et nous pouvons poser

$$u=\varphi,\qquad v=R\varphi',\qquad w=\psi,\qquad \vec{U}=\varphi\vec{t}+R\varphi'\vec{n}+\psi\vec{b}.$$

Notons ici que *les deux fonctions* φ, ψ *qui définissent entièrement le déplacement géométrique de la courbe sont insuffisantes pour caractériser le déplacement d'une*

courbe matérielle, nous introduirons plus tard une troisième fonction χ qui indiquera comment varie chaque section droite dans son plan.

Désignons par l'indice *un* les éléments relatifs au point P et par le symbole Δ l'accroissement d'un élément quand on passe de P à P_1. Grâce aux formules de Frenet-Serret, nous allons établir les résultats suivants :

$$\Delta\frac{1}{R} = -\xi' + \frac{\eta}{T}, \qquad \Delta\frac{1}{T} = \xi' - \frac{\eta}{R},$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{t} = \zeta\vec{n} - \eta\vec{b}, \\ \Delta\vec{n} = -\zeta\vec{t} + \xi\vec{b}, \\ \Delta\vec{b} = \eta\vec{t} - \xi\vec{n}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \xi = R\left(-\eta' + \dfrac{\zeta}{T}\right); \\ -\eta = \dfrac{R\varphi'}{T} + \psi'; \\ \zeta = \dfrac{\varphi}{R} + (R\varphi')' - \dfrac{\psi}{T}. \end{cases}$$

En effet, dérivons par rapport à l'arc la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + \vec{U};$$

nous trouvons ainsi immédiatement $\vec{t}_1$ puis Δt. Dérivons maintenant cette valeur de t_1 :

$$\frac{\vec{n}_1}{R_1} = \frac{\vec{n}}{R} + \vec{n}\Delta\frac{1}{R} + \frac{\Delta\vec{n}}{R} = \frac{\vec{n}}{R} + \zeta'\vec{n} - \eta'\vec{b} + \zeta\left(-\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T}\right) + \frac{\eta\vec{n}}{T}.$$

Faisant le produit scalaire par n, nous en déduisons Δn et $\Delta\frac{1}{R}$. Ayant ainsi introduit ξ, η, ζ qui figurent dans Δt et Δn, nous remarquons que ces quantités définissent le vecteur-rotation infinitésimal qui permet le passage du trièdre principal de P en P_1. Δb est donc nécessairement de la forme indiquée.

Il reste à trouver la variation de la torsion. Or, cette quantité peut s'évaluer à partir de la relation suivante :

$$\frac{1}{T} = \vec{b}\frac{d\vec{n}}{ds},$$

dont nous écrivons la variation

$$\Delta\frac{1}{T} = \Delta\vec{b}.\vec{n}' + \vec{b}(\Delta\vec{n})',$$

d'où le résultat annoncé.

Introduisons le *trièdre* « *matériel* » de la courbe en P. C'est un trièdre trirectangle défini par trois vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $\vec{i} = \vec{t}$ est tangent à la fibre moyenne en P. $\vec{j}$ et $\vec{k}$ situés dans le plan normal en P ont la direction des axes de l'ellipse d'inertie de la section droite dont P est supposé être le centre de gravité. Soit ϖ l'angle dont il faut faire tourner le trièdre principal pour l'amener

sur le trièdre matériel. La rotation $\vec{\Omega}$ du trièdre matériel est égale à celle du trièdre principal augmentée de $\vec{i}\varpi'$. (Ces rotations sont les rotations instantanées au sens de la Cinématique pour un mobile décrivant la courbe avec la vitesse $+1$) :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R} + \varpi' \vec{t}.$$

Ce vecteur est rapporté au trièdre principal, il est préférable d'introduire le trièdre matériel qui a un sens mécanique :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{i}}{T_r} + \frac{\vec{j}}{R_g} + \frac{\vec{k}}{R_m},$$

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{T} + \varpi', \qquad \frac{1}{R_g} = \frac{\sin\varpi}{R}, \qquad \frac{1}{R_m} = \frac{\cos\varpi}{R}.$$

(Nous employons des notations qui sont celles de la Théorie des surfaces, mais ici il s'agit uniquement de notations commodes.)

Sous l'influence de charges données, la courbe se déforme et parvient à un état d'équilibre. Le trièdre matériel est défini par des vecteurs $\vec{i} + \Delta\vec{i}$, $\vec{j} + \Delta\vec{j}$, $\vec{k} + \Delta\vec{k}$ et la rotation $\vec{\Omega}$ devient

$$\left(\vec{\Omega} + \frac{\Delta\vec{i}}{T_r} + \frac{\Delta\vec{j}}{R_g} + \frac{\Delta\vec{k}}{R_m}\right) + \Delta\vec{\Omega},$$

où nous avons posé

$$\Delta\vec{\Omega} = \vec{i}\,\Delta\frac{1}{T_r} + \vec{j}\,\Delta\frac{1}{R_g} + \vec{k}\,\Delta\frac{1}{R_m}.$$

Si $\Delta\vec{\Omega}$ était nul, il n'y aurait pas de déformation locale de la courbe matérielle, mais uniquement un déplacement d'ensemble qui n'introduirait pas d'autres forces intérieures que celle qui existent au repos. Au contraire $\Delta\vec{\Omega}$ *caractérise la déformation de la courbe matérielle*. En plus du déplacement d'ensemble précédent, un élément d'arc de longueur *un* subit torsion et flexions : imaginant l'une des sections terminales fixe, l'autre tourne de l'angle $\Delta\frac{1}{T_r}$ autour de la tangente, et de $\Delta\frac{1}{R_g}$, $\Delta\frac{1}{R_m}$ autour de chacun des axes de l'ellipse d'inertie de la section considérée. Or, *les hypothèses classiques de la Résistance des matériaux relient ces trois composantes de la rotation aux composantes sur les mêmes axes du moment* $\vec{M}$, *par rapport à* P, *de toutes les forces appliquées à la courbe, au delà de* P, *toutes réactions comprises, sauf le système des réactions en* P,

$$M_1 = GJ\,\Delta\frac{1}{T_r}, \qquad M_2 = EI_2\,\Delta\frac{1}{R_g}, \qquad M_3 = EI_3\,\Delta\frac{1}{R_m}.$$

E, G sont les modules d'élasticité et de glissement; I_2, I_3, J sont respectivement les moments d'inertie de l'aire de la section droite par rapport à ses deux axes et son centre. Nous ne tenons pas compte de l'effort tranchant ni de l'allongement de la fibre moyenne.

La troisième fonction-paramètre qui achève de définir la position voisine de la courbe est l'angle de rotation des axes de l'ellipse d'inertie de la section droite, $\chi = \Delta\varpi$.

Montrons maintenant comment la détermination de φ, ψ, χ peut être faite, connaissant les charges supportées par la courbe et les conditions aux limites. D'une manière plus complète, nous allons donner les équations du mouvement de la courbe : les trois fonctions-paramètres φ, ψ, χ qui sont les inconnues du problème, sont des fonctions de s et t. Conformément à la théorie classique, nous prenons la valeur suivante du potentiel interne de la courbe

$$2\varpi = \int_0^l \left(\frac{M_1^2}{GJ} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} \right) ds.$$

La vitesse du point P se calcule par rapport au trièdre principal du point P au repos. En effet, ce dernier est immobile, et les coordonnées rectangulaires de P sont φ, $R\varphi'$, ψ. Il suffit de dériver par rapport au temps pour avoir les composantes de la vitesse, d'où la valeur de la force vive

$$2T = \int_0^l \rho (\varphi_t'^2 + R^2 \varphi_{st}''^2 + \psi_t'^2)\, ds.$$

Cette expression est une fonctionnelle de φ_t' et de ψ_t', et non de φ, ψ, χ, χ_t'. Comme il s'agit d'une intégrale définie portant sur un polynome en φ_t', ψ_t' et leurs dérivées en s, nous avons immédiatement

$$\delta T = [\rho R^2 \varphi_{st}'' \delta\varphi_t']_0^l + \int_0^l \{ [\rho \varphi_t' - (\rho R^2 \varphi_{st}'')_s'] \delta\varphi_t' + \rho \psi_t' \delta\psi_t' \}\, ds,$$

d'où les trois équations de Lagrange :

$$\rho \varphi_{t^2}'' - (\rho R^2 \varphi_{st^2}''')_s' + \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = 0, \qquad \rho \psi_{t^2}'' + \frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = 0, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\chi} = 0,$$

en l'absence de forces extérieures. Il nous reste à former effectivement le potentiel de forme ϖ (1). Nous utiliserons la formule suivante équivalente à celle que nous avons donnée :

$$2\varpi = \int_0^l (GJ\lambda^2 + EI_2\mu^2 + EI_3\nu^2)\, ds.$$

(1) La confusion entre le potentiel de forme ϖ et l'angle de rotation ϖ, qui amène le trièdre principal sur le trièdre matériel, n'est pas à craindre.

λ, μ, ν sont les trois composantes de $\Delta\Omega$ sur les axes du trièdre matériel. Nous avons donc, en fonction des ξ, η, ζ :

$$\lambda = \Delta\frac{1}{T} + \chi', \qquad \mu = \chi\frac{\cos\varpi}{R} + \sin\varpi\,\Delta\frac{1}{R}, \qquad \nu = -\chi\frac{\sin\varpi}{R} + \cos\varpi\,\Delta\frac{1}{R};$$

$$2\varpi = \int_0^l \left[GJ\left(\xi' - \frac{\eta}{T} + \chi'\right)^2 + E(I_2\cos^2\varpi + I_3\sin^2\varpi)\frac{\chi^2}{R^2} \right.$$
$$\left. + 2E\sin\varpi\cos\varpi(I_2 - I_3)\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right)\frac{\chi}{R} + E(I_2\sin^2\varpi + I_3\cos^2\varpi)\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right)^2 \right] ds$$

(ξ, η, ζ s'exprimant en fonction de φ, ψ et de leurs dérivées au moyen de formules données antérieurement). On constate que le potentiel est une intégrale définie portant sur un polynome par rapport à φ, ψ, χ et leurs dérivées en s, nous savons donc former sa variation. Les calculs sont assez longs, aussi nous nous bornons à former l'équation de Lagrange en χ dans le cas général, et les trois équations de Lagrange dans le cas particulier d'un ressort hélicoïdal.

Comme χ n'intervient pas dans ξ, η et ζ, ces quantités sont des termes constants dans le calcul de la dérivée partielle en χ :

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\chi} = -\left[GJ\left(\xi' - \frac{\eta}{T} + \chi'\right)\right]' + E(I_2\cos^2\varpi + I_3\sin^2\varpi)\frac{\chi}{R^2}$$
$$+ E(I_2 - I_3)\sin\varpi\cos\varpi\left(\zeta' - \frac{\eta}{T}\right)\frac{1}{R}.$$

Cette expression est nulle d'après la troisième équation de Lagrange. On a une relation indépendante du temps entre φ, ψ, χ (²). On peut l'écrire

$$\chi'' + A\chi' + B\chi + C = 0.$$

Les coefficients sont des fonctions de l'arc par l'intermédiaire de φ, ψ, R, T. Considérée comme une équation différentielle du second ordre en χ, cette relation fournit χ connaissant la forme de la courbe au repos, ainsi que φ, ψ, à condition de préciser les conditions d'extrémité. Ainsi, pour une extrémité libre, χ est nul si aucun couple de torsion n'agit.

Évaluons les seconds membres à mettre aux équations de Lagrange dans le cas où une force $\vec{F}\,ds$ agit sur chaque élément d'arc. Si F_1, F_2, F_3 sont les composantes de cette force massique sur les axes principaux, le travail élémentaire des forces extérieures, qu'il conviendrait d'ajouter à celui des forces d'inertie et des forces intérieures considéré jusqu'ici serait

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l (F_1\,\delta\varphi + RF_2\,\delta\varphi' + F_3\,\delta\psi)\,ds.$$

(²) Cette relation est encore vraie si la courbe est chargée.

Une intégration par parties donne le résultat suivant :

$$\delta\varpi = [RF_2\,\delta\varphi]_0^l + \int_0^l \{[F_1 - (RF_2)']\,\delta\varphi + F_3\,\delta\psi\}\,ds,$$

de sorte que les équations de Lagrange ont la forme suivante, en supposant certaines conditions d'extrémités remplies :

$$\rho\varphi''_{ts} - (\rho R^2 \varphi'''_{st s})'_s + \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = F_1 - (RF_2)'_s,$$

$$\rho\psi''_{ts} + \frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = F_3, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\chi} = 0.$$

Ces équations sont à employer dans le cas de l'équilibre, toutes les dérivées en t étant nulles. Dans le cas du mouvement, il est en général plus simple de déterminer d'abord la position d'équilibre sous l'action des charges données. On considère cette position comme étant une position de courbe non déformée, en l'absence de toute charge, et l'on retrouve alors des équations homogènes pour le mouvement.

Considérons le potentiel de forme dans les cas intéressants suivants : $I_2 = I_3$ qui correspond à une section circulaire ou carrée; $I_3 = 0$, c'est-à-dire I_3 négligeable vis-à-vis de I_2, et qui correspond au cas d'une courbe découpée dans une surface mince d'épaisseur négligeable. Dans ces deux cas le potentiel de forme vaut

$$2\varpi = \int_0^l I\left[2G\left(\xi' - \frac{\eta}{T} + \chi'\right)^2 + E\frac{\zeta^2}{R^2} + E\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right)^2\right] ds \qquad \text{si} \quad I_2 = I_3 = I,$$

$$2\varpi = \int_0^l I\left\{G\left(\xi' - \frac{\eta}{T} + \chi'\right)^2 + E\left[\cos\varpi\frac{\zeta}{R} + \sin\varpi\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right)\right]^2\right\} ds \qquad \text{si} \quad I_3 = 0.$$

Un autre cas de simplification important est celui où $\varpi = 0$, il correspond au cas où le trièdre matériel est confondu avec le trièdre principal. Cela est obtenu par découpage d'une bande étroite sur une surface où les tensions internes sont absentes, la courbe choisie étant une géodésique ou une asymptotique. Dans ce cas, nous avons

$$2\varpi = \int_0^l \left[GJ\left(\xi' - \frac{\eta}{T} + \chi'\right)^2 + EI_2\frac{\zeta^2}{R^2} + EI_3\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right)^2\right] ds.$$

Étudions plus complètement le cas d'un ressort. La courbure et la torsion sont constantes. Nous supposons de plus que la section du ressort est circulaire et constante, et nous désignons par I la valeur commune de I_2 et I_3. $J = 2I$. Le potentiel de forme vaut dans ces conditions :

$$2\varpi = \int_0^l I\left[2G\left(\frac{2R^2}{T}\varphi''' + \frac{2\varphi'}{T} + R\psi''' + \frac{T^2 - R^2}{RT^2}\psi' + \chi'\right)^2 + \frac{E}{R^2}\chi^2 + E\left(R\varphi''' + \frac{T^2 - R^2}{RT^2}\varphi' - \frac{2\psi'}{T}\right)^2\right] ds.$$

C'est une intégrale portant sur un polynome par rapport à φ, ψ, χ et leurs dérivées. Nous savons donc en trouver la variation, et en particulier, en l'absence de forces extérieures, nous avons les équations suivantes pour le mouvement

$$\rho\varphi''_{t^2} - \rho R^2 \varphi^{IV}_{s^2t^2} = \frac{4GI}{T}\frac{\partial\omega_1}{\partial s} + \frac{4GIR^2}{T}\frac{\partial^3\omega_1}{\partial s^3} + EI\frac{T^2-R^2}{RT^2}\frac{\partial\omega_2}{\partial s} + ERI\frac{\partial^3\omega_2}{\partial s^3},$$

$$\rho\psi''_{t^2} = -4GI\frac{R^2-T^2}{RT^2}\frac{\partial\omega_1}{\partial s} + 4GIR\frac{\partial^3\omega_1}{\partial s^3} - \frac{2EI}{T}\frac{\partial\omega_2}{\partial s},$$

$$-2GI\frac{\partial\omega_1}{\partial s} + \frac{E}{R^2}\chi = 0,$$

avec

$$\omega_1 = \frac{2R^2}{T}\varphi''' + \frac{2\varphi'}{T} + R\psi''' + \frac{T^2-R^2}{RT^2}\psi' + \chi', \qquad \omega_2 = R\varphi'' + \frac{T^2-R^2}{RT^2}\varphi' - \frac{2\psi'}{T}.$$

Si nous cherchons en particulier les petits mouvements périodiques du ressort, de pulsation ω, nous posons

$$\varphi = \Phi e^{i\omega t}, \qquad \psi = \Psi e^{i\omega t}, \qquad \chi = X e^{i\omega t}.$$

Les fonctions de l'arc, Φ, Ψ, X sont alors solution du système différentiel suivant :

$$\rho\omega^2(\Phi - R^2\Phi'') + \frac{4GI}{T}(\Omega'_1 + R^2\Omega'''_1) + EI\left(\frac{T^2-R^2}{RT^2}\Omega'_2 + R\Omega'''_2\right) = 0,$$

$$\rho\omega^2\Psi + 4GI\left(-\frac{R^2-T^2}{RT^2}\Omega'_1 + R\Omega'''_1\right) - \frac{2EI}{T}\Omega'_2 = 0,$$

$$-2GI\Omega'_1 + \frac{E}{R^2}X = 0,$$

avec

$$\Omega_1 = \frac{2R^2}{T}\Phi''' + \frac{2\Phi'}{T} + R\Psi''' + \frac{T^2-R^2}{RT^2}\Psi' + X',$$

$$\Omega_2 = R\Phi''' + \frac{T^2-R^2}{RT^2}\Phi' - \frac{2\Psi'}{T}.$$

Conditions d'extrémités. — Nous allons opérer à la manière classique, en introduisant l'effort tranchant $\vec{T}$ et le moment fléchissant $\vec{M}$ au point P. Pour définir ces éléments on procède de la manière suivante. Soit un fil d'extrémités A et B. Si l'on coupe le fil en P, pour ne pas modifier le mouvement de la portion AP, il est nécessaire d'introduire un système de réactions en P, de somme géométrique $\vec{T}$ et de moment $\vec{M}$ en P. Considérons alors la portion de fil BP. Elle est en équilibre, statique ou dynamique, à condition d'admettre à côté des forces massiques données le long du fil, toutes les réactions éventuelles, y compris les réactions définies par $-\vec{T}$ et $-\vec{M}$ en P. Ce système de forces étant en équilibre, il en résulte que $\vec{T}$ et $\vec{M}$ sont respectivement la somme géométrique et le moment en P de toutes les actions extérieures agissant sur l'arc PB. Telles sont les définitions classiques des efforts en P. Si l'on applique le principe

fondamental de la Mécanique à l'arc dont les extrémités ont pour abscisses curvilignes s et $s+ds$, on trouve les deux équations vectorielles suivantes, valables s'il n'existe pas de répartition continue de moments, et en dehors des forces isolées appliquées :

$$\vec{F}+\vec{T}'=0, \qquad \vec{M}'+\vec{t}\wedge\vec{T}=0.$$

$\vec{F}\,ds$ désigne la résultante des actions extérieures sur l'arc considéré.

Les accents désignent des dérivées par rapport à l'arc. Faisons le produit scalaire par $\vec{t}$, vecteur unitaire tangent au fil $\vec{t}.\vec{M}'=0$. Cette relation a été obtenue précédemment sous la forme fonctionnelle $\frac{\partial\varpi}{\partial\chi}=0$. Pour le vérifier écrivons ainsi la formule vectorielle :

$$R\left(\vec{M}.\vec{t}\right)'-\vec{M}.\vec{n}=0.$$

Or, avec les notations antérieures, nous avons

$$\vec{M}.\vec{t}=M_1, \qquad \vec{M}.\vec{n}=M_2\cos\varpi-M_3\sin\varpi,$$

d'où résulte

$$-R\frac{\partial M_1}{\partial s}+M_2\cos\varpi-M_3\sin\varpi=0,$$

qui est la relation antérieurement trouvée sous la forme $\frac{\partial\varpi}{\partial\chi}=0$.

Si dans la formule $\vec{M}'+\vec{t}\wedge\vec{T}=0$ nous faisons les produits scalaires par n ou b, nous trouvons deux des composantes de T, ce qui montre que M est un élément essentiel de l'étude des poutres ou arcs. En effet

$$\vec{T}.\vec{n}=-\vec{b}.\vec{M}', \qquad \vec{T}.\vec{b}=\vec{n}.\vec{M}'.$$

Pour avoir la troisième composante de T, dérivons la relation entre T et M :

$$\vec{M}''+\vec{t}\wedge\vec{T}'+\frac{\vec{n}}{R}\wedge\vec{T}=0,$$

remplaçons T′ par $-F$, puis multiplions par b :

$$\vec{T}.\vec{t}=R\left(\vec{b}.\vec{M}''-\vec{n}.\vec{F}\right).$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour obtenir les conditions d'extrémités :

En une extrémité fixe (rotule sphérique), le déplacement u, v, w est nul, donc pour la courbe variée, $\delta\varphi=\delta\varphi'=\delta\psi=0$, de plus $\vec{M}=0$.

En une extrémité encastrée, u, v, w sont nuls, $\vec{t}$ est inchangé, ce qui entraîne

$$\delta\varphi=\delta\varphi'=\delta\varphi''=\delta\psi=\delta\psi'=0.$$

En une extrémité libre, $\vec{T}$ et $\vec{M}$ sont nuls. Nous rappelons les formules qui donnent les composantes de $\vec{M}$ sur les axes du trièdre matériel

$$M_1 = GJ\left(\xi - \frac{\eta}{R} + \chi'\right),$$

$$M_2 = EI_2\left[\sin\varpi\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right) + \frac{\chi}{R}\cos\varpi\right], \qquad M_3 = EI_3\left[\cos\varpi\left(\zeta' + \frac{\eta}{T}\right) - \frac{\chi}{R}\sin\varpi\right],$$

et l'on en déduirait des composantes de T, d'où les conditions pour $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\chi$ et leurs dérivées.

CHAPITRE VI.

Équations d'équilibre des poutres droites.

Notre intention est d'indiquer un moyen d'obtenir des équations d'équilibre des poutres droites, en partant des équations de l'équilibre élastique à trois dimensions, grâce à certaines approximations que l'on peut améliorer, au moins en théorie. On peut ainsi mieux tenir compte de la répartition des efforts à la surface que dans la théorie classique de la Résistance des matériaux. En revanche, on doit éviter les charges concentrées, et des difficultés peuvent se présenter aux extrémités quand on veut préciser la nature des supports.

Hypothèses. — La poutre considérée sera presque droite, sa section ne variera que lentement, le centre de gravité des sections parallèles au plan yOz sera voisin de l'axe Ox. De plus, cette poutre est soumise à des forces données sur sa surface et à des forces massiques connues. Toutes ces forces sont supposées varier lentement quand le point d'application se déplace dans la poutre. Ainsi, une force ponctuelle doit être écartée et remplacée par une force étalée sur une certaine aire de la surface ou un certain volume intérieur. Ceci est plus conforme à la réalité physique, et plus conforme aussi à notre méthode. La méthode peut cependant être légèrement modifiée pour en tenir compte. Le principe de la méthode, utilisation de fonctions-paramètres, est très général et pourrait s'appliquer aussi à des corps de structure cristalline quelconque.

Un point quelconque de la poutre déformée sous l'action de charges quelconques sera caractérisé par les coordonnées x, y, z de sa position quand la poutre est libre de charges. x, y, z sont donc des constantes. La position de ce point dans la poutre chargée sera définie par les coordonnées rectangulaires $x + U$, $y + V$, $z + W$. Appelons section de la poutre l'ensemble des points de la poutre pour lesquels le paramètre x a une valeur bien déterminée. *Nous admettons* et c'est là une de nos hypothèses essentielles, *que* U, V, W *peuvent*

être représentés par un développement limité suivant les puissances croissantes de y et z. Ainsi

$$U(x, y, z) = u + a_1 y + a_2 z + \frac{1}{2}(a_{11} y^2 + 2 a_{12} yz + a_{22} z^2) + \dots$$

V et W ont un développement analogue, où u et a seraient remplacés par v et b, ou w et c. Les fonctions $u, v, \dots, a_1, \dots, c_{22}$ dépendent uniquement de x.

Les fonctions U, V, W composantes du déplacement de $P(x, y, z)$ sont donc supposées suffisamment régulières dans chaque section de la poutre pour avoir un développement limité de Taylor; de plus les dérivées d'ordre maximum écrites sont supposées varier très peu dans chaque section, et l'on remplace leur valeur variable par une valeur fixe, celle qui est prise pour $y = z = 0$. Ceci n'est admissible que si les forces appliquées, comme nous l'avons indiqué plus haut, varient assez lentement dans le volume ou sur la surface.

Tous les coefficients u, v, w, et les a, b, c sont des fonctions de x, et il convient de les déterminer, connaissant les charges appliquées. Appelons approximation d'ordre n, celle dans laquelle nous conservons tous les termes en y et z de degré inférieur ou égal à $n - 1$, et nous supprimons tous les termes de degré supérieur. Il est bon de remarquer que nous ne supposons pas que y et z sont des quantités petites, mais seulement que les dernières dérivées conservées varient peu dans une section donnée.

Nous bornant par exemple à l'approximation du second ordre, les neuf fonctions $u, v, w, a_1, \dots, c_2$ peuvent être considérées comme des fonctions-paramètres pour le système matériel. Soit φ l'une d'entre elles, ϖ le potentiel de forme considéré comme une fonctionnelle des φ et

$$\delta\varpi = \int_0^l Q_\varphi \, \delta\varphi \, dx$$

le travail élémentaire des forces extérieures dans un déplacement virtuel. Les équations de Lagrange de l'équilibre se réduisent alors à

$$Q_\varphi = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}.$$

Nous constaterons que *ce sont des équations différentielles ordinaires.*

Nous plaçant dans les hypothèses habituellement admises, le potentiel de forme a la valeur suivante :

$$2\varpi = \iiint [\lambda(e_1 + e_2 + e_3)^2 + 2\mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4\mu^2(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)] \, dx \, dy \, dz,$$

où figurent les notations suivantes :

$$e_1 = U'_x, \qquad e_2 = V'_y, \qquad e_3 = W'_z,$$
$$2g_1 = W'_y + V'_z, \qquad 2g_2 = U'_z + W'_x, \qquad 2g_3 = V'_x + U'_y.$$

APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE. — Tous les a, b, c sont négligés. Les coefficients de la déformation ont les valeurs suivantes :

$$e_1 = u', \qquad e_2 = 0, \qquad e_3 = 0,$$
$$2g_1 = 0, \qquad 2g_2 = w', \qquad 2g_3 = v'.$$

Les accents désignent, ici et dans la suite, les dérivées en x.

On en déduit la valeur du potentiel de forme

$$2\varpi = \int_0^l A[(\lambda + 2\mu)u'^2 + \mu(v'^2 + w'^2)]\,dx,$$

A représentant l'aire de la section.

Soient d'autre part X, Y, Z les composantes de la résultante des actions extérieures sur une tranche de longueur-unité de la poutre. Le travail élémentaire de ces actions a pour valeur

$$\delta\mathfrak{T} = \int_0^l (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,dx.$$

Nous avons donc les trois équations suivantes d'équilibre :

$$A(\lambda + 2\mu)u'' = X, \qquad \mu A v'' = Y, \qquad \mu A w'' = Z.$$

En particulier, pour une poutre horizontale supportant uniquement des charges verticales :

$$u'' = v'' = 0, \qquad \mu A w'' = Z.$$

Ces équations sont nettement différentes de celles qui sont employées.

APPROXIMATION DU SECOND ORDRE. — Nous admettons que le déplacement du point P a la forme suivante :

$$U = u + a_1 y + a_2 z, \qquad V = v + b_1 y + b_2 z, \qquad W = w + c_1 y + c_2 z.$$

Nous avons donc les coefficients suivants pour la déformation

$$e_1 = u' + y a'_1 + z a'_2, \qquad e_2 = b_1, \qquad e_3 = b_2;$$
$$2g_1 = c_1 + b_2, \qquad 2g_2 = a_2 + w' + y c'_1 + z c'_2, \qquad 2g_2 = a_1 + v' + y b'_1 + z b'_2,$$

Le potentiel de forme est une intégrale de volume dans laquelle nous effectuons les intégrations en y et z. Employons les notations suivantes *qui ne sont pas les notations classiques* :

$$A = \iint dy\,dz, \qquad I_y = \iint y\,dy\,dz, \qquad I_z = \iint z\,dy\,dz,$$
$$I_{yy} = \iint y^2\,dy\,dz, \qquad I_{yz} = \iint yz\,dy\,dz, \qquad I_{zz} = \iint z^2\,dy\,dz.$$

On a les transformations suivantes sur le potentiel de forme :

$$2\varpi = \iiint \{\lambda(b_1+c_2+u'+ya'_1+za'_2)^2+2\mu[(u'+ya'_1+za'_2)^2+b_1^2+c_2^2] + \mu[(c_1+b_2)^2+(a_2+w'+yc'_1+zc'_2)^2+(a_1+v'+yb'_1+zb'_2)^2]\}\,dx\,dy\,dz,$$

$$2\varpi = \int_0^l \{A\lambda(b_1+c_2+u')^2+2\mu(u'^2+b_1^2+c_2^2)+\mu[(c_1+b_2)^2+(a_2+w')^2+(a_1+v')^2]\}\,dx$$
$$+2\int_0^l I_y\{\lambda a'_1(b_1+c_2+u')+2\mu a'_1u'+\mu[c'_1(a_2+w')+b'_1(a_1+v')]\}\,dx$$
$$+2\int_0^l I_z\{\lambda a'_2(b_1+c_2+u')+2\mu a'_2u'+\mu[c'_2(a_2+w')+b'_2(a_1+v')]\}\,dx$$
$$+\int_0^l I_{yy}[(\lambda+2\mu)a'^2_1+\mu(c'^2_1+b'^2_1)]\,dx$$
$$+2\int_0^l I_{yz}[(\lambda+2\mu)a'_1a'_2+\mu(b'_1b'_2+c'_1c'_2)]\,dx+\int_0^l I_{zz}[(\lambda+2\mu)a'^2_2+\mu(b'^2_2+c'^2_2)]\,dx.$$

On en déduit le système des dérivées fonctionnelles

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} = -[A\lambda(b_1+c_2+u')+2A\mu u'+(\lambda+2\mu)(I_ya'_1+I_za'_2)]',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial v} = -[\mu A(a_1+v')+\mu(I_yb'_1+I_zb'_2)]',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial w} = -[\mu A(a_2+w')+\mu(I_yc'_1+I_zc'_2)]',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial a_1} = A\mu(a_1+v')+\mu(I_yb'_1+I_zb'_2)-[\lambda I_y(b_1+c_2+u')+2\mu I_yu'+(\lambda+2\mu)(I_{yy}a'_1+I_{yz}a'_2)]',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial a_2} = A\mu(a_2+w')+\mu(I_yc'_1+I_zc'_2)-[\lambda I_z(b_1+c_2+u')+2\mu I_zu'+(\lambda+2\mu)(I_{yz}a'_1+I_{zz}a'_2)]',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial b_1} = A\lambda(b_1+c_2+u')+2\mu Ab_1+\lambda(I_ya'_1+I_za'_2)-\{\mu[I_y(a_1+v')+I_{yy}b'_1+I_{yz}b'_2]\}',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial b_2} = A\mu(c_1+b_2)-\{\mu[I_z(a_1+v')+I_{yz}b'_1+I_{zz}b'_2]\}',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial c_1} = A\mu(c_1+b_2)-\{\mu[I_y(a_2+w')+I_{yy}c'_1+I_{yz}c'_2]\}',$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial c_2} = A\lambda(b_1+c_2+u')+2\mu Ac_2+\lambda(I_ya'_1+I_za'_2)-\{\mu[I_z(a_2+w')+I_{yz}c'_1+I_{zz}c'_2]\}'.$$

Ces dérivées existent au sens où nous les avons définies, pourvu que les conditions d'extrémités permettent de vérifier la relation suivante, ce que nous admettons :

$$[F'_{u'}\delta u+F'_{v'}\delta v+F'_{w'}\delta w+F'_{a'_1}\delta a_1+\ldots+F'_{c'}\delta c_1]'_0=0,$$

après avoir posé

$$2\varpi = \int_0^l F(u,u',v,v',\ldots,c_2,c'_2)\,dx.$$

$F'_{u'}, \ldots, F'_{c'_2}$ sont des dérivées partielles ordinaires, moyennant quoi, les dérivées fonctionnelles ci-dessus s'écrivent

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u} = F'_u - (F'_{u'})', \quad \ldots.$$

Nous avons besoin d'autre part de connaître le travail virtuel des forces extérieures. Désignons par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les composantes de la force unitaire agissant sur l'élément d'aire de la surface latérale de la poutre et par $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ les composantes de la force massique. Le travail virtuel cherché se présente sous la forme suivante :

$$\delta \mathfrak{T} = \sum \iint \mathfrak{X}(\delta u + y\,\delta a_1 + z\,\delta a_2)\,dx\,ds + \sum \iiint \mathfrak{X}_1(\delta u + y\,\delta a_1 + z\,\delta a_2)\,dx\,dy\,dz,$$

ou encore

$$\delta \mathfrak{T} = \int_0^l (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w + \mathfrak{A}_1\,\delta a_1 + \mathfrak{A}_2\,\delta a_2 + \mathfrak{B}_1\,\delta b_1 + \mathfrak{B}_2\,\delta b_2 + \mathfrak{C}_1\,\delta c_1 + \mathfrak{C}_2\,\delta c_2)\,dx,$$

grâce aux notations suivantes :

$$X = \int \mathfrak{X}\,ds + \int \mathfrak{X}_1\,dy\,dz, \qquad \mathfrak{A}_1 = \int y\,\mathfrak{X}\,ds + \int y\,\mathfrak{X}_1\,dy\,dz, \qquad \ldots.$$

Les intégrales simples et doubles sont respectivement étendues au contour et à l'aire de la section.

Nous pouvons maintenant écrire le système des neuf équations à neuf inconnues dont dépend la résolution du problème posé. Précisons encore qu'il s'agit des conditions les plus générales pour une poutre presque droite : le centre de gravité n'est pas nécessairement sur Ox, la section peut varier lentement en grandeur, ainsi que la direction et les axes de l'ellipse d'inertie; les charges ont une direction quelconque :

$$\begin{aligned}
&-(F'_{u'})' = X, \qquad -(F'_{v'})' = Y, \qquad -(F'_{w'})' = Z;\\
&F'_{a_1} - (F'_{a'_1})' = \mathfrak{A}_1, \qquad F'_{a_2} - (F'_{a'_2})' = \mathfrak{A}_2,\\
&F'_{b_1} - (F'_{b'_1})' = \mathfrak{B}_1, \qquad F'_{b_2} - (F'_{b'_2})' = \mathfrak{B}_2,\\
&F'_{c_1} - (F'_{c'_1})' = \mathfrak{C}_1, \qquad F'_{c_2} - (F'_{c'_2})' = \mathfrak{C}_2.
\end{aligned}$$

Pour comparer avec les résultats classiques, plaçons-nous dans les conditions les plus fréquentes : le centre de gravité se trouve rigoureusement sur Ox ($I_y = I_z = 0$), la poutre admet le plan vertical xOz comme plan de symétrie ($I_{yz} = 0$), les sections sont toutes égales et le matériau homogène (λ, μ, A, I_{yy}, I_{zz} sont des constantes). Enfin supposons que toutes les charges soient verticales : $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1 = 0$. Ceci entraîne

$$X = Y = 0, \qquad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = 0.$$

Nous avons alors le système suivant, qui, bien entendu, peut être obtenu directement par la même méthode, avec un peu moins de calculs :

$$\begin{cases} -\mathrm{A}[\lambda(b_1+c_2+u')+2\mu u']'=0, \\ \mathrm{A}[\lambda(b_1+c_2+u')+2\mu b_1]-\mu \mathrm{I}_{yy} b_1''=0, \\ \mathrm{A}[\lambda(b_1+c_2+u')+2\mu c_2]-\mu \mathrm{I}_{zz} c_2'=\mathcal{C}_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu \mathrm{A}(a_1+w')'=0, \\ \mu \mathrm{A}(a_1+w')-(\lambda+2\mu)\mathrm{I}_{yy} a_1''=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu \mathrm{A}(a_2+w')'=\mathrm{Z}, \\ \mu \mathrm{A}(a_2+w')-(\lambda+2\mu)\mathrm{I}_{zz} a_2''=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu \mathrm{A}(c_1+b_2)-\mu \mathrm{I}_{zz} b_2''=0, \\ \mu \mathrm{A}(c_1+b_2)-\mu \mathrm{I}_{yy} c_1''=\mathcal{C}_1. \end{cases}$$

Les inconnues sont groupées en quatre systèmes partiels. Les équations sont obtenues respectivement quand on dérive par rapport aux fonctions-paramètres u, b_1, c_2 ; v, a_1 ; w, a_2 ; b_2, c_1.

Prenons plus particulièrement le troisième système. Le second membre Z représente la densité de charge $p(x)$ habituellement introduite. On constate que la première équation de ce système peut s'intégrer

$$\mu \mathrm{A}(a_2+w')=\mathrm{T}, \qquad \mathrm{T}=\int_x^l \mathrm{Z}\,dx+\text{const.}$$

T est analogue à l'effort tranchant, à une constante additive près, peut-être. (Pour étudier ce point il faudrait faire intervenir les conditions d'extrémité.) Nous en déduisons a_2'' :

$$a_2''=\frac{\mu \mathrm{A}(a_2+w')}{(\lambda+2\mu)\mathrm{I}_{zz}}=\frac{\mathrm{T}}{(\lambda+2\mu)\mathrm{I}_{zz}}.$$

Une intégration nous permet d'introduire un élément analogue au moment fléchissant, toujours sous réserve des conditions d'extrémité :

$$a_2'=\frac{\mathrm{M}}{(\lambda+2\mu)\mathrm{I}_{zz}}, \qquad \mathrm{M}=-\int_x^l \mathrm{T}\,dx+\text{const.}$$

Éliminons a_2' en utilisant à nouveau la première équation du système :

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{I}_{zz} w''=-\mathrm{M}-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\mathrm{I}_{zz}}{\mathrm{A}}\mathrm{Z}.$$

Cette équation est à rapprocher de l'équation classique

$$\mathrm{E}\mathrm{I}w''=-\mathrm{M}.$$

Il convient de faire les remarques suivantes : M *n'a peut-être pas la même signification dans les deux formules; le moment d'inertie* I *est bien le même, mais*

le coefficient E *est remplacé par* $\lambda + 2\mu$, or, ces deux termes ne sont pas égaux :

$$\lambda + 2\mu = E\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},$$

σ étant le coefficient de Poisson. C'est une différence sensible. Enfin *nous avons un terme supplémentaire au second membre.*

Faisons une remarque relative aux charges ponctuelles. Nous avons dit pourquoi il fallait les remplacer par des charges étalées. Si ces charges ne causent pas trop de perturbation, et si l'on peut accepter une déformation partout linéaire en y et z, on remarque que les termes T et M introduits peuvent se calculer comme l'effort tranchant et le moment fléchissant habituels, c'est-à-dire (à une constante additive près qui ne peut être précisée que grâce aux conditions d'extrémité), en faisant la somme de toutes les charges (ou des moments) finis ou infiniment petits, au delà du point considéré.

Interprétation géométrique des approximations des divers ordres. — Dans l'approximation du premier ordre, tous les points d'une section ont le même déplacement. Cette section se déplace donc par translation. Ceci est très loin des hypothèses habituelles : Bernoulli admet que chaque section est indéformable en grandeur et reste perpendiculaire à la fibre moyenne. Nous avons ici conservation de la grandeur de la section, mais elle ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne.

Dans l'approximation du second ordre, chaque section subit une affinité définie par une relation linéaire en y et z, puisque x reste constant. *Cette section reste donc plane, son plan change, mais elle n'est pas indéformable en général.* Ceci est une supériorité de la méthode présentée qui, dans l'approximation du second ordre, est plus souple que la méthode habituelle, puisqu'elle tient compte, d'une certaine manière, de la déformation de cette section qui, de plus, ne reste sans doute pas exactement perpendiculaire à la fibre moyenne. De plus, *par la présence des termes* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_2$, *elle tient compte de la répartition des charges à la surface.*

Une *approximation* meilleure, celle *du troisième ordre*, où le déplacement a la valeur suivante :

$$U = u + y a_1 + z a_2 + \frac{1}{2}(y^2 a_{11} + 2yz a_{12} + z^2 a_{22}), \qquad V = \ldots, \qquad W = \ldots,$$

transforme une section en un morceau de surface algébrique, ce qui est plus satisfaisant encore. Les calculs sont plus pénibles. Il s'agit de former un système de 18 équations à 18 inconnues. La méthode suivie jusqu'ici s'applique sans autre difficulté que la longueur des calculs. Parmi les coefficients s'introduisent des termes qui ne sont pas considérés habituellement, tels que

$$I_{yyy} = \iint y^3\, dy\, dz, \qquad I_{yyz} = \iint y^2 z\, dy\, dz, \qquad \ldots,$$

étendus à une section.

Les forces extérieures, au contour ou massiques font intervenir les termes suivants :

$$\int y^2 \mathfrak{X}\, ds + \iint y^2 \mathfrak{X}_1\, dy\, dz, \qquad \int yz\mathfrak{X}\, ds + \iint yz\, dy\, dz, \qquad \ldots,$$

où comme au second ordre déjà, la disposition des charges à la surface n'est pas négligeable.

Conditions aux limites. — Cette question paraît assez délicate, elle a pour but de déterminer les constantes qui s'introduisent dans l'intégration des divers systèmes différentiels. La principale difficulté vient de ce que nous excluons *a priori* les charges ponctuelles et qu'il faut revenir sur la notion de réactions aux extrémités. D'autre part, il convient de vérifier la condition d'extrémité qui a été indiquée lors de l'écriture des équations de Lagrange.

On peut concevoir un encastrement parfait, purement théorique, pour lequel la section encastrée serait parfaitement indéformable. Pour $x = 0$, on devrait avoir

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0, \qquad \delta a_1 = \ldots = \delta c_2 = 0,$$

mais cela paraît difficile à imaginer réalisé dans la pratique.

Une extrémité libre est plus naturelle. Il nous faut alors revenir sur la détermination des tensions à l'intérieur de la poutre, on sait qu'elles sont données par les relations suivantes :

$$N_1 = \lambda e + 2\mu U'_x, \qquad N_2 = \lambda e + 2\mu U'_y, \qquad N_3 = \lambda e + 2\mu U'_z \qquad (e = U'_x + V'_y + W'_z),$$
$$T_1 = \mu(W'_y + V'_z), \qquad T_2 = \mu(U'_z + W'_x), \qquad T_3 = \mu(V'_x + U'_y).$$

Il sera particulièrement intéressant d'évaluer les composantes de la tension unitaire pour une aire située dans une section de la poutre, à savoir N_1, T_3, T_2, nous allons constater que les moyennes de ces éléments ou de leurs différents moments du premier ordre ont une interprétation assez simple, quand on introduit les dérivées partielles de la fonction F rencontrée à propos du potentiel de forme. Nous avons ici

$$N_1 = (\lambda + 2\mu)(u' + ya'_1 + za'_2) + \lambda(b_1 + c_2),$$
$$T_3 = \mu(a_1 + v' + yb'_1 + zb'_2), \qquad T_2 = \mu(a_2 + w' + yc'_1 + zc'_2),$$

de sorte qu'en surlignant la quantité dont on prend la moyenne, nous avons

$$\overline{N_1} = F'_{u'}, \qquad \overline{T_3} = F'_{v'}, \qquad \overline{T_2} = F'_{w'}, \qquad \overline{yN_1} = F'_{a'_1}, \qquad \overline{zN_1} = F'_{a'_2},$$
$$\overline{yT_3} = F'_{b'_1}, \qquad \overline{zT_3} = F'_{b'_2}, \qquad \overline{yT_2} = F'_{c'_1}, \qquad \overline{zT_2} = F'_{c'_2}.$$

On peut remarquer que les éléments de réduction du système des réactions dans une section donnée sont $F'_{u'}$, $F'_{v'}$, $F'_{w'}$, pour la somme géométrique, et $F'_{c'_1} - F'_{b'_2}$, $F'_{a'_2}$, $-F'_{a'_1}$ pour le moment calculé au point de la section situé

sur Ox. L'ensemble de ces six derniers nombres est insuffisant à remplacer le tableau des neuf nombres ci-dessus, d'où des difficultés aux extrémités.

Si nous nous reportons au terme tout intégré dans la variation du potentiel de forme, nous trouvons

$$[\overline{N}_1\,\delta u+\overline{T}_3\,\delta v+\overline{T}_2\,\delta w+\overline{yN}_1\,\delta a_1+\overline{zN}_1\,\delta a_2+\overline{yT}_3\,\delta b_1+\overline{zT}_3\,\delta b_2+\overline{yT}_2\,\delta c_1+\overline{zT}_2\,\delta c_2]_0'.$$

En une extrémité libre, le crochet sera nul si toutes les moyennes sont nulles, ce sont les conditions cherchées pour la détermination des constantes d'intégration.

Remarque. — La distribution des efforts intérieurs que nous déduisons des équations trouvées, après leur intégration, ne doit pas être considérée comme parfaite. Ainsi, à la surface, les tensions calculées ne sont pas rigoureusement égales aux efforts donnés qui ont servi à les déterminer. Ces deux catégories de forces sont équivalentes au sens suivant : elles rendent égales les trois composantes de la somme géométrique et les six moments du premier ordre, dans le cas de l'approximation du second ordre. L'approximation du troisième ordre ajouterait l'égalité des neuf moments du second ordre.

L'intégration des quatre systèmes différentiels comportant neuf inconnues en tout peut être présentée d'une manière simple. On constate que les véritables inconnues sont les groupements déjà rencontrés, à savoir certaines dérivées partielles de F, ce qui est commode pour utiliser les conditions d'extrémités.

CONCLUSION.

Les idées générales développées au sujet des systèmes mécaniques dont la position ou la forme dépendent de fonctions arbitraires dépassent le cadre de l'exposé des exemples traités. Si des considérations physiques conduisent à une forme différente du potentiel ou même conduisent à rejeter la loi de Hooke, les principes subsistent. Des considérations particulières peuvent conduire à des développements du déplacement, dans la théorie des poutres, qui ne soient pas des développements de Taylor.

Un autre sujet important d'application, que nous réservons pour une publication particulière est la *théorie des membranes élastiques* où on se heurte à la grande longueur des calculs. Nous pensons aussi pouvoir développer notre point de vue sur la combinaison du Calcul fonctionnel et du Calcul tensoriel qui mène à une étude des propriétés géométriques des espaces de Banach.

La méthode exposée permet encore de retrouver les *équations du mouvement des fluides en variables quelconques de Lagrange*. Cette méthode permet donc de donner une grande unité à l'étude des systèmes matériels dépendant de paramètres arbitraires ou de fonctions arbitraires en nombre quelconque.

SUR

LES COURBES DÉFINIES A LA SURFACE DU TORE

PAR

DES ÉQUATIONS ADMETTANT UN INVARIANT INTÉGRAL

PAR M. TARO URA.

I. — Introduction.

1. Depuis les recherches de Poincaré (1), les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore ont été étudiées par beaucoup de géomètres, parce que ce problème intéresse les mathématiques pures ainsi que leur application à la Mécanique céleste. Il a été démontré sous des conditions de continuité que, quand le système d'équations n'a aucun point singulier, ou bien il existe au moins une caractéristique périodique, ou bien le mouvement du point représentatif est ergodique. Mais, au contraire, quand il y a des points singuliers, le problème devient très difficile, et, autant que je le sache, M. Cherry seul a étudié (2) ce cas, et démontré que le système d'équations différentielles peut donner « the quasi-periodic flow of discontinuous type ».

Quand le système d'équations différentielles admet un invariant intégral, et n'a aucun point singulier, sous certaines conditions, ou bien toutes les caractéristiques sont périodiques, ou bien le mouvement du point est ergodique. La démonstration en a été donnée (3) d'une façon purement analytique par M. Saito.

(1) *J. Math. pures et appl.*, t. 1, 1885, p. 220-244 ; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 137-158.
(2) *Proc. London Math. Soc.*, vol. 44, 1938, p. 175-215.
(3) *Sugaku*, vol. 1, 1949 (en japonais).

2. Alors je me suis proposé de résoudre la question : qu'arrive-t-il quand le système d'équations admet un invariant intégral et a des points singuliers ?

Dans ce cas, l'un des points singuliers au moins doit être un centre, selon le terme de Poincaré, et par conséquent il doit exister un ensemble de caractéristiques périodiques homotopes à zéro. Donc l'extension directe du théorème de M. Saito est impossible.

Dans ce qui suit, nous démontrons un théorème qui est une extension modifiée du théorème de M. Saito, et d'autres théorèmes sur les caractéristiques périodiques et sur les points singuliers.

Nous considérons le cas qui correspond dans les notations de M. Cherry à la valeur $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, cas que lui-même a écarté, et qui ne peut pas être traité par sa méthode. Notre démonstration est tout à fait élémentaire et topologique, mais nous n'utilisons ni la notion du « nombre de rotation » introduite par Poincaré et utilisée ([4]) par MM. Denjoy et Cherry, ni celle du « cycle sans contact » introduite par Poincaré et utilisée ([5]) par MM. Denjoy et Siegel.

Pour terminer cette introduction, j'exprime mes remerciements à MM. J. Chazy, Y. Hagihara, M. Hukuhara et T. Saito, qui m'ont aidé par plusieurs remarques importantes à ce sujet.

II. — Hypothèses et points singuliers.

3. Soit T le tore dont les coordonnées x et y ont la période 1 toutes les deux. Envisageons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = dt, \tag{1}$$

où X et Y sont deux fonctions uniformes sur le tore T, et t est un paramètre représentant le temps. Nous appelons les courbes définies par le système (1) les caractéristiques. Nous supposons les deux fonctions X et Y analytiques sur le tore, ou seulement développables en chaque point (x_0, y_0) du tore sous la forme

$$\begin{cases} X = a_1 + a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + \varepsilon_1, \\ Y = a_2 + a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + \varepsilon_2, \end{cases} \tag{2}$$

où a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} sont des constantes, et ε_1, ε_2 deux fonctions des variables $x - x_0$, $y - y_0$, qui tendent vers zéro plus rapidement que $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) : c'est-à-dire que X et Y sont continûment différentiables sur le tore.

Alors nous pouvons classer les points singuliers, c'est-à-dire les points

([4]) A. Denjoy, *J. Math. pures et appl.*, t. 18, 1932, p. 333-375.
([5]) C. L. Siegel, *Ann. Math.*, vol. 46, 1945, p. 423-428.

(x_0, y_0) où $a_1 = a_2 = 0$, en deux espèces, comme le fait Poincaré ([6]). Les points singuliers de la première espèce sont ceux où l'on a

$$a_1 = a_2 = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

dans les développements (2).

D'après la définition de Poincaré, pour qu'un point soit singulier de la première espèce, il faut qu'il remplisse une autre condition, savoir que l'équation (7) que nous envisagerons plus loin, n'ait pas de racine multiple. Mais cette autre condition n'est pas indépendante de la condition (3) dans le cas que nous considérons.

Nous supposons d'ailleurs que le système (1) n'a que des points singuliers de première espèce. Alors on démontre aisément que ces points singuliers sont en nombre fini.

4. En outre, supposons que le système (1) admet ([7]) un invariant intégral positif, c'est-à-dire qu'il y a une fonction M uniforme et continûment différentiable sur le tore T, telle que l'on ait

$$0 < \overline{m} < M < \overline{\overline{m}} < \infty, \tag{4}$$

où $\overline{m}$ et $\overline{\overline{m}}$ sont deux constantes positives, et

$$\iint_{N(t)} M \, dx \, dy = K, \tag{5}$$

où K désigne une constante indépendante du temps t, où N(0) est un ensemble mesurable de points sur le tore T, et où $N(t)$ est l'ensemble de toutes les positions à l'époque t des points qui appartiennent à N(0) à l'époque $t = 0$, et qui se meuvent selon les équations (1).

Nous remarquons que dans le cas du tore la condition plus générale $0 < M < \infty$ peut remplacer la condition (4), parce que la surface du tore est compacte.

La condition (5) est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial M}{\partial x} X + \frac{\partial M}{\partial y} Y + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0. \tag{6}$$

([6]) *J. Math. pures et appl.*, t. 7, 1881, p. 385-393; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 12-20.

([7]) H. Poincaré, *Acta Mathematica*, t. 13, 1890, p. 56-57; *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, 1899, p. 4-7; E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, 1922; J. Chazy, *Bull. Astron.*, t. 16, 1951, p. 155-156.

Considérons l'équation (6) en un point singulier. En chaque point singulier nous avons $X = Y = 0$, donc l'équation (6) se réduit à

$$M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$

ou encore, à cause de la condition (4), à

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial Y}{\partial y},$$

c'est-à-dire à

$$a_{11} = -a_{22}.$$

Envisageons l'équation

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Quand on pose

$$a_{11} = -a_{22} = a,$$

l'équation (7) se réduit à

$$-\lambda^2 = -a^2 - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

et il résulte que les deux racines de l'équation (7) sont réelles et de signes contraires, ou bien imaginaires pures et conjuguées. D'après la classification de Poincaré, il ne peut y avoir de nœud : dans le premier cas le point singulier considéré est un col, et un col particulier, puisque les deux racines y sont opposées; dans le second cas c'est un foyer particulier, ou exceptionnellement un centre.

5. Par un col passent deux caractéristiques et deux seulement. Parmi les quatre branches de ces deux caractéristiques, le point tend vers le col sur deux de ces branches quand $t \to \infty$, et sur les deux autres branches quand $t \to -\infty$. Les deux branches sur lesquelles le point tend vers le col quand $t \to \infty$ (ou bien $t \to -\infty$) ont la même tangente au col (*fig.* 1). Donc, comme Poincaré, nous conviendrons de suivre l'une des branches de droite ou de gauche, mais non celle qui a la même tangente, si nous voulons prolonger la caractéristique passant par le col.

Au contraire, toutes les caractéristiques passant suffisamment près d'un foyer tendent vers ce foyer en figurant une spirale quand $t \to \infty$ ou bien $t \to -\infty$. Mais nous allons montrer qu'il ne peut exister de foyer.

En effet, pour fixer les idées, supposons que les points dans un certain voisinage U du foyer A tendent vers le point A quand $t \to \infty$. Alors dans ce voisi-

nage U la valeur de l'intégrale (5) est une certaine constante c positive :

$$\iint_U M\,dx\,dy = c > 0, \qquad 0 < \overline{m} < M < \overline{\overline{m}} < \infty.$$

Mais, puisque M est un invariant intégral, on a

$$\lim_{t \to \infty} \iint_U M\,dx\,dy = c > 0.$$

Et il résulte que la mesure de l'ensemble U tendrait vers l'infini avec le temps, contrairement à notre hypothèse. Ce qui montre que, dans les hypothèses considérées, il ne peut exister de foyer.

Le centre est un point singulier, au voisinage duquel toutes les caractéristiques sont périodiques, et ces caractéristiques couvrent une région fermée

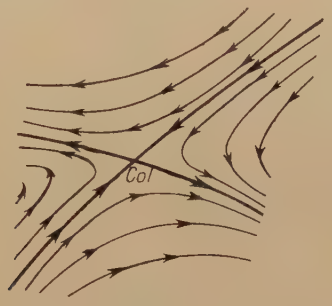


Fig. 1.

dont le bord est une caractéristique périodique sur laquelle il y a au moins un col.

Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé la nature spéciale du tore; tout le raisonnement a été local. Donc tous les résultats sont vrais aussi dans le mouvement du point défini par les équations différentielles (1) admettant un invariant intégral, dans une région du plan ou d'une surface fermée quelconque.

6. Poincaré a démontré ([8]) sur le tore, la relation

$$C - F - N = 0,$$

où C désigne le nombre des cols, N celui des nœuds, et F la somme du nombre des foyers et du nombre des centres. Or, dans le cas étudié, il n'y a ni nœud ni foyer, et nous avons

$$C = F,$$

F étant le nombre des centres, c'est-à-dire que *le nombre des cols et le nombre des centres sont égaux.*

([8]) *J. Math. pures et appl.*, t. 1, 1885, p. 203-208; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 121-125.

Pour éviter des explications compliquées, fixons ici la signification de certaines notations. Soit P un point quelconque sur le tore T : nous désignons par la même lettre P un certain point parmi les points de la représentation plane du tore T, qui correspondent au point P du tore. Nous désignons par $P(t)$ la caractéristique sur le tore qui passe par le point P à l'époque $t = 0$, et nous désignons également par $P(t)$ la courbe intégrale qui sur la représentation plane passe à l'époque $t = 0$ par le point représentatif P auparavant choisi. Nous désignons encore par $P(t)$ le point correspondant à l'époque t sur la caractéristique $P(t)$ du tore, ou sur la courbe intégrale $P(t)$ de la représentation plane.

III. — Périodicité.

7. Dans la démonstration des théorèmes que nous allons donner, le théorème de Jordan et le théorème de récurrence de Poincaré joueront un grand rôle. Ce dernier a été démontré (9) par Poincaré dans le mouvement d'un fluide incompressible dans un volume fermé, et étendu à un espace d'un nombre de dimensions quelconque. Nous ne l'utiliserons toutefois que dans une région du plan et sur une surface fermée. Et je crois qu'il convient de l'expliquer ici sous la forme où nous allons l'utiliser.

Théorème de récurrence de Poincaré. — *Dans une région du plan, soit* S, *ou bien sur une surface fermée* S, *nous envisageons le mouvement du point* $P(x, y)$ *défini par les équations différentielles*

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = dt, \tag{8}$$

où les deux fonctions X *et* Y *sont continûment différentiables ; nous supposons que le système* (8) *admet un invariant intégral selon la définition du* n° 4, *et que la région* S, *ou la surface* S, *a une mesure finie.*

Soit U *un voisinage quelconque d'un point* P : *il y a au moins une courbe intégrale* $Q(t)$ *telle que le point* $Q(0)$ *se trouve dans* U, *et que la courbe intégrale* $Q(t)$ *traverse* U *à infinité d'époques différentes, toutes égales à un multiple positif ou négatif de* τ, τ *étant une constante déterminée par le voisinage* U.

8. Avant d'entrer dans le sujet principal de ce Mémoire, nous donnons des lemmes qui servent de fondement à la démonstration des théorèmes I et II qui suivront :

Lemme 1. — *Dans les mêmes hypothèses que celles du théorème de récurrence que nous venons de rappeler, nous envisageons le mouvement du point défini par le sys-*

(9) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, 1899, p. 140-151 et 155-157.

tème (8). *Soit* P *un point quelconque, qui n'est pas un point singulier, et soit* N *un segment passant par* P *et qui n'est pas tangent à la courbe intégrale* $P(t)$: *nous pouvons trouver une autre courbe intégrale* $Q(t)$ *qui coupe le segment* N *aux points* $Q(t_1)$ *et* $Q(t_2)$, t_1 *et* t_2 *étant deux nombres finis et* $t_1 < t_2$. *Le segment* N *peut être aussi petit que nous voulons* (*fig.* 2).

En effet, si le segment N est suffisamment petit, il n'y a pas de point singulier sur le segment N, et toutes les courbes intégrales passant par un point du segment N ne sont pas tangentes au point N, puisque le segment N n'est pas tangent à la courbe intégrale $P(t)$, et que les deux fonctions X et Y sont

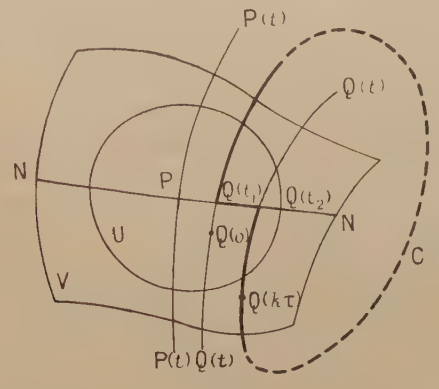


Fig. 2.

continues. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que le segment donné N remplit ces deux conditions.

Désignons par $\overline{N}$ le segment ouvert du segment N, c'est-à-dire le segment que nous obtenons en excluant les deux extrémités du segment N; soit V l'ensemble des positions où se trouveront, à toutes les époques t comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$, tous les points appartenant au segment $\overline{N}$ à l'époque $t = o$, quand ces points se meuvent selon les équations (8), ε étant un nombre positif assez petit.

Alors l'ensemble V est ouvert, puisqu'il n'y a pas de point singulier sur le segment $\overline{N}$, et que toutes les courbes intégrales passant par un point du segment $\overline{N}$ ne sont pas tangentes au segment $\overline{N}$. Si nous désignons par Q un point quelconque de l'ensemble V, la courbe intégrale passant par le point Q à une époque t_1 doit couper le segment $\overline{N}$ à une époque $t_2 (t_1 - \varepsilon < t_2 < t_1 + \varepsilon)$.

Nous désignons par U un voisinage du point P tel qu'on a $U \subset V$. Ce voisinage U existe toujours, puisque l'ensemble V est ouvert et que le point P appartient à l'ensemble V.

En appliquant le théorème de récurrence au voisinage U, nous pouvons trouver une courbe intégrale $Q(t)$ telle que le point $Q(o)$ se trouve dans U, et que

la courbe intégrale $Q(t)$ traverse U à infinité d'époques différentes, toutes égales à un multiple positif ou négatif de τ, τ étant une constante.

Envisageons les deux points $Q(o)$ et $Q(k\tau)$ $(k\tau > 2\varepsilon)$, k étant un nombre entier. Comme les deux points $Q(o)$ et $Q(k\tau)$ appartiennent au voisinage U et *a fortiori* à l'ensemble V, la courbe intégrale $Q(t)$ doit couper le segment N au moins en deux points, soit $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$, t_1 et t_2 étant deux nombres finis tels que l'on a

$$t_1 < \varepsilon; \qquad t_2 > k\tau - \varepsilon > \varepsilon.$$

Donc on a $t_1 < t_2$.

9. Cela posé, dans la suite nous conviendrons d'appeler une courbe intégrale $P(t)$ périodique, si elle remplit l'une des trois conditions suivantes :

1° ou bien il existe un nombre positif T tel que

$$P(o) = P(T);$$

2° ou bien l'on a

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to-\infty} P(t);$$

3° ou bien il existe d'autres courbes intégrales $Q(t)$, $R(t)$, ..., $S(t)$ telles que l'on ait

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to-\infty} Q(t), \quad \lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to-\infty} R(t), \quad \ldots, \quad \lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to-\infty} P(t).$$

La condition 1° est la condition ordinaire pour qu'une courbe intégrale soit périodique, et elle est suffisante, parce que les fonctions X et Y, dans toutes les équations de ce Mémoire, ne contiennent pas le temps t. Le nombre T est la période de la courbe intégrale $P(t)$. D'après la condition 1°, nous pouvons considérer comme périodique la solution correspondant à un point singulier et à une position d'équilibre, et représentée par une constante; le point singulier est ainsi considéré comme une courbe intégrale périodique, et la période correspondante est arbitraire.

La condition 2° nous permet de considérer une courbe intégrale comme périodique si les points de cette courbe intégrale tendent vers un col pour $t \to \infty$, et vers le même col pour $t \to -\infty$.

La condition 3° signifie que, si une courbe intégrale aboutit à un col, si on la prolonge un certain nombre de fois suivant la convention énoncée plus haut, et si l'on revient au point de départ, la courbe intégrale est considérée comme périodique.

Dans les deux cas 2° et 3°, on peut dire que la période est infinie.

Lemme II. — *Si l'on considère le mouvement du point dans une région du plan, et les hypothèses du théorème de récurrence énoncées au n° 7, toutes les courbes*

intégrales du système (8) *sont périodiques*. Il faut remarquer que ce lemme ne peut s'étendre comme le théorème de récurrence au mouvement du point sur une surface fermée arbitraire.

En effet, soit P un point quelconque dans la région S du plan. Si P est un point singulier, la courbe singulière $P(t) \equiv P$ est périodique, comme nous l'avons précisé au commencement de ce numéro. Si P n'est pas un point singulier, nous désignons par N la normale à la courbe intégrale $P(t)$ au point P, limitée à un segment assez petit pour que toutes les courbes intégrales passant par un point de ce segment N ne lui soient pas tangentes. D'après le lemme I nous pouvons trouver une courbe intégrale $Q(t)$ qui traverse le segment N deux fois aux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ $(t_1 < t_2)$.

Supposons que les points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ soient distincts : je dis que cette

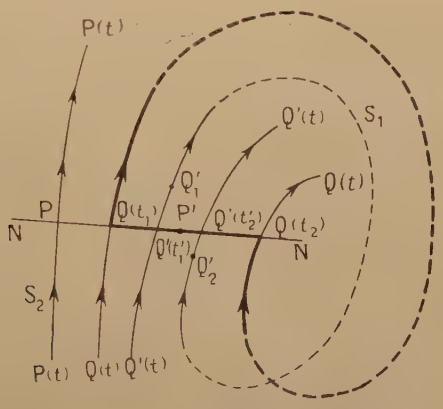


Fig. 3.

hypothèse conduit à une contradiction. Envisageons, en effet, la courbe fermée C constituée par l'arc $\overset{\frown}{Q(t_1), Q(t_2)}$ de la courbe intégrale $Q(t)$ et par le segment $\overset{\frown}{Q(t_2), Q(t_1)}$ de la normale N (*fig.* 2).

Soit P′ un point quelconque sur le segment $\overset{\frown}{Q(t_2), Q(t_1)}$ (*fig.* 3) : d'après le lemme I nous pouvons trouver encore une courbe intégrale $Q'(t)$ qui traverse le segment N aux points $Q'(t'_1)$ et $Q'(t'_2)$ situés entre les deux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$.

Jusqu'ici tous les résultats sont valables aussi dans le mouvement sur la surface fermée pourvu que cette surface ait une mesure finie, parce que nous n'avons pas utilisé la nature spéciale du plan.

Comme $t_2 - t_1$ est fini, il n'y a aucun point singulier sur l'arc $\overset{\frown}{Q(t_1), Q(t_2)}$, et la courbe C a partout une tangente continue excepté aux deux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$. Il résulte que la courbe C est une courbe de Jordan, et elle partage le

plan en deux parties, que nous appelons S_1 et S_2. Pour fixer les idées, nous supposons que le point $Q(t_2+\varepsilon)$ appartienne à S_1, ε étant un nombre positif suffisamment petit.

Par hypothèse la courbe intégrale passant par un point quelconque du segment N n'est pas tangente à ce segment N, donc toutes les courbes intégrales passant par un point du segment N doivent traverser ce segment dans le même sens. Il résulte que les points $Q'(t_1'+\varepsilon')=Q_1'$ et $Q'(t_2'-\varepsilon')=Q_2'$ se trouvent respectivement dans S_1 et S_2, ε' étant un nombre suffisamment petit positif.

Donc, d'après le théorème de Jordan, il faut que l'arc $\overset{\frown}{Q_1', Q_2'}$ de la courbe intégrale $Q'(t)$, soit l'arc C', coupe la courbe C. Or, il n'y a aucun point singulier sur l'arc C'. D'ailleurs aucune courbe intégrale ne peut couper le segment N de S_1 à S_2 dans U : d'où une contradiction. Il résulte qu'il faut que les points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ soient confondus, c'est-à-dire que la courbe intégrale $Q(t)$ est périodique.

Donc, nous avons démontré que la courbe intégrale passant par chacun des points d'un ensemble partout dense dans la région S, est périodique, et que la période correspondante est finie.

10. Désignons encore par P un point non singulier quelconque dans la région S. Soit comme précédemment N la normale de la courbe intégrale $P(t)$ au point P, limitée à un segment assez petit pour que toutes les courbes intégrales passant par un point de ce segment N ne lui soient pas tangentes. Suivant le résultat du numéro précédent, la courbe intégrale passant par chacun des points d'un sous-ensemble partout dense du segment N, est périodique. Soit $f(x)$ la loi de conséquence définie ([10]) par Poincaré sur le segment N, où x est une abscisse convenablement choisie. Alors $f(x)$ est continu sur le segment N, et s'annule sur un sous-ensemble partout dense de N. Donc, $f(x)$ est identiquement nul sur N, et en particulier au point P, c'est-à-dire que la courbe intégrale $P(t)$ est périodique.

Il faut remarquer d'ailleurs que la période de la courbe intégrale $P(t)$ peut être infinie.

Or, par hypothèse, le point P est arbitraire dans la région S. Donc toutes les courbes intégrales de cette région sont périodiques.

11. Théorème I. — *S'il y a une caractéristique périodique non homotope à zéro, toutes les caractéristiques du système* (1) *sont périodiques.*

En effet, soit $U(t)$ la caractéristique périodique non homotope à zéro. Alors

([10]) *J. Math. pures et appl.*, t. 8, 1882, p. 251-261; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 44-53.

l'ensemble qu'on obtient en retranchant cette caractéristique du tore, soit $R = T - U(t)$, est équivalent à la région d'anneau du plan.

Si la caractéristique $U(t)$ ne passe par aucun col, l'ensemble R est invariant par rapport au système (1). En appliquant le lemme II au mouvement du point dans la région R, nous pouvons démontrer que toutes les caractéristiques sont périodiques.

Au contraire, si la caractéristique $U(t)$ passe par un col au moins, l'ensemble R n'est pas invariant, mais la démonstration subsiste. Ajoutons ici quelques remarques.

Soit P un point quelconque de l'ensemble R. Si le point P est singulier, la caractéristique $P(t) \equiv P$ est déjà périodique, selon la définition 1°. Si le point P n'est pas un point singulier, désignons par N un segment de la normale à la caractéristique $P(t)$ au point P, assez petit pour que toutes les caractéristiques passant par un point du segment N coupent ce segment dans le même sens. En appliquant le lemme I deux fois au mouvement sur le tore, et en raisonnant comme dans la première partie de la démonstration du lemme II, nous pouvons trouver deux caractéristiques $Q(t)$ et $Q'(t)$, dont la première $Q(t)$ coupe le segment N aux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ $(t_1 < t_2)$, et dont la deuxième $Q'(t)$ coupe le segment aux points $Q'(t'_1)$ et $Q'(t'_2)$ $(t'_1 < t'_2)$ situés entre les deux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$. Comme $t_2 - t_1$ et $t'_2 - t'_1$ sont finis, les caractéristiques $Q(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ et $Q'(t)$ $(t'_1 \leq t \leq t'_2)$ ne peuvent pas traverser la caractéristique $U(t)$.

Donc nous pouvons traiter les courbes $Q(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ et $Q'(t)$ $(t'_1 \leq t \leq t'_2)$ sur le tore T, comme nous avons traité plus haut la courbe C et l'arc C' dans la région d'anneau R sur le plan. Alors, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme II, nous démontrons aisément le théorème I.

IV. — Ergodicité.

12. Théorème II. — *S'il n'existe pas de caractéristique périodique non homotope à zéro, le mouvement du point défini par les équations* (1) *dans l'ensemble*

$$S = T - R$$

est périodique, R *étant la réunion des régions couvertes par les caractéristiques périodiques homotopes à zéro autour des centres.*

Rappelons que dans le cas considéré l'ergodicité signifie ce qui suit : *Si* P *et* Q *sont deux points quelconques de l'ensemble* S, *et si* U *est un voisinage quelconque du point* P, *il existe un nombre* $\bar{t}$ *tel que* $Q(\bar{t})$ *appartient au voisinage* U : $Q(\bar{t}) \in U$.

Pour démontrer le théorème, remarquons qu'évidemment l'ensemble R et *a posteriori* l'ensemble S sont invariants par rapport au système (1). Donc la

fonction M est un invariant intégral dans le mouvement du point défini par le système (1) dans l'ensemble S.

Cela posé, la normale à la caractéristique $P(t)$ aux point P est définie, puisqu'il n'y a pas de point singulier dans l'ensemble S : soit N_P un segment de cette normale qui appartient au voisinage U.

D'après le lemme I, nous pouvons trouver une caractéristique $P'(t)$ qui coupe le segment N_P au moins deux fois aux points $P'(t_1)$ et $P'(t_2)$ $(t_1 < t_2)$.

Nous envisageons la courbe fermée C constituée par l'arc $\overset{\frown}{P'(t_1), P'(t_2)}$ de la caractéristique $P'(t)$ et par le segment $\overset{\frown}{P'(t_2), P'(t_1)}$ du segment N_P. Il est évident que la courbe fermée C est une courbe de Jordan, mais n'est pas homotope à zéro.

Pour fixer les idées, nous supposons que l'on a

$$P'(t_1) = (0, 0), \qquad P'(t_2) = (m + \varepsilon, n + \varepsilon'),$$

où m et n sont deux nombres entiers tels que

$$(m, n) \neq (0, 0), \qquad (m, n) \neq (1, 0),$$

et où ε et ε' sont deux nombres voisins de zéro.

Nous désignons par C_0 la courbe constituée par l'arc $\overset{\frown}{(0,0),(m+\varepsilon, n+\varepsilon')}$ de la courbe intégrale $P'(t)$ et par le segment $\overset{\frown}{(m+\varepsilon, n+\varepsilon'),(m,n)}$ du segment N_P; nous désignons par C_1 la courbe partant du point (m, n) et congruente à la courbe C_0, par C_{-1} la courbe aboutissant au point $(0, 0)$ et congruente à la courbe C_0, et ainsi de suite.

Posons

$$\overline{C} = \ldots + C_{-1} + C_0 + C_1 + \ldots.$$

Nous désignons par $\overline{\overline{C}}$ la courbe passant par le point $(1, 0)$ et congruente à la courbe $\overline{C}$. Envisageons la région A bordée par les deux courbes $\overline{C}$ et $\overline{\overline{C}}$. Cette région A est équivalente à la région d'anneau du plan (*fig.* 4).

Soit Q un point quelconque dans l'ensemble S. Si le point Q était situé sur la courbe C, la démonstration du théorème serait achevée. Donc nous pouvons supposer que le point Q ne se trouve pas sur la courbe C. La caractéristique $Q(t)$ ne peut couper l'arc $\overset{\frown}{P'(t_1), P'(t_2)}$ de la caractéristique $P'(t)$, parce qu'il n'y a pas de point singulier sur l'arc $\overset{\frown}{P'(t_1), P'(t_2)}$, $t_2 - t_1$ étant fini. Si la caractéristique $Q(t)$ coupait le segment de la normale N_P, la démonstration serait encore achevée. Il résulte que nous pouvons supposer que la caractéristique $Q(t)$ ne coupe pas la courbe C.

Nous désignons par la même lettre Q un des points représentatifs de la

région d'anneau A qui correspondent au point Q sur le tore T. Alors la caractéristique $Q(t)$ dans la région d'anneau A qui passe par le point Q que nous venons de choisir, ne peut couper les bords $\overline{C}$ et $\overline{\overline{C}}$ de la région d'anneau A.

Soit U_Q un voisinage quelconque du point Q dans la région d'anneau A et dans l'ensemble S. Je dis qu'il existe au moins un point dans le voisinage U_Q par lequel passe la caractéristique qui coupe le bord C ou $\overline{C}$, quand ce voisinage se meut selon les équations (1).

Soit

$$U'_Q = \bigcup_t U_Q(t),$$

c'est-à-dire la réunion des ensembles $U_Q(t)$ pour toutes les valeurs de t

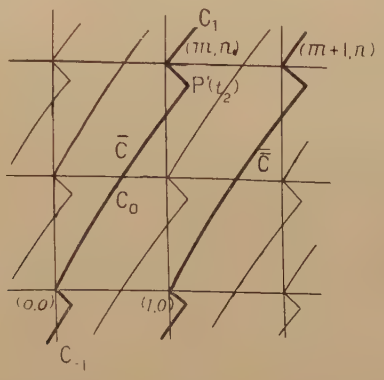


Fig. 4.

comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Supposons $U'_Q \subset A$, et nous trouverons une contradiction. En effet, U'_Q est alors une région invariante par rapport aux équations (1), et de mesure finie. En appliquant le lemme II au mouvement du point dans la région U'_Q, nous pouvons démontrer que toutes les caractéristiques dans la région U'_Q doivent être périodiques; ce qui est en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle il n'y a pas de caractéristique périodique dans la région S.

Il résulte qu'il existe au moins un point dans le voisinage U_Q, par lequel passe la caractéristique coupant la normale N_P. Donc la caractéristique, qui passe par chacun des points dont l'ensemble est partout dense dans l'ensemble S, coupe le segment N_P.

13. Nous désignons encore par Q un point quelconque dans l'ensemble S et par U_Q un voisinage du point Q dans lequel toutes les caractéristiques coupent dans le même sens la normale de la caractéristique $Q(t)$ au point P. Soit N_Q le segment de cette normale qui appartient au voisinage U_Q. Par le résultat du numéro précédent, la caractéristique passant par chacun des points dont

l'ensemble est partout dense dans U_Q coupe le segment N_P. Donc la caractéristique passant par chacun des points d'un sous-ensemble partout dense de N_Q, coupe le segment N_P.

Soit x une abscisse convenablement choisie du segment N_Q et y celle du segment N_P. Alors nous pouvons obtenir une correspondance $y = f(x)$, telle que le domaine de x est un sous-ensemble partout dense de N_Q, et que y est l'abscisse du point où la caractéristique passant par le point d'abscisse x coupe le segment N_P pour la première fois. Cette fonction $f(x)$ est continue. Donc $f(x)$ est bien définie au point Q, d'où résulte que la caractéristique $Q(t)$ doit couper le segment N_P, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\bar{t}$ tel qu'on a $Q(\bar{t}) \in U$.

V. — Distribution des caractéristiques et des points singuliers.

14. L'objet principal de cette section est de démontrer que le cas du n° 17 ne peut avoir lieu. Nous pouvons obtenir plusieurs résultats concernant la distribution des caractéristiques et des points singuliers en utilisant les idées de la démonstration du théorème III, que nous allons donner. Mais l'étude complète du cas général où la valeur commune de F et C est un entier quelconque, est très laborieuse, et nous ne traiterons ici que le cas où cette valeur commune est l'unité : $F = C = 1$.

15. Nous désignons par F et C respectivement le centre et le col. Une région R autour du centre F est couverte par les caractéristiques périodiques homotopes à zéro, et la caractéristique qui constitue le bord de la région R est une caractéristique passant par le col. Donc, parmi les quatre branches A′, A″, B′ et B″ qui tendent vers le col pour $t \to \infty$ ou pour $t \to -\infty$, une paire au moins doit constituer une seule caractéristique périodique. Nous supposons que ce soit la paire A′, A″, et nous désignons par A cette caractéristique périodique.

16. Considérons le cas où *la caractéristique* A *est homotope à zéro*.

a. Supposons d'abord que *les deux branches* B′ *et* B″ *forment une seule caractéristique* B, *dans la région* T — R.

D'après la définition de la caractéristique périodique dans le second cas, la caractéristique B est périodique, mais elle ne peut être homotope à zéro, parce qu'alors, dans la région bordée par la caractéristique B, il existerait au moins un centre en outre du centre F, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $F = 1$.

Il résulte que *toutes les caractéristiques dans la région* T — R *sont périodiques et non homotopes à zéro*, par application du théorème I.

b. Supposons que *les branches* B′ *et* B″ *ne forment pas une seule caractéristique dans la région* T — R.

Dans ce cas, d'après le théorème II, *le mouvement du point dans la région* T — R *est ergodique*.

17. Considérons le cas où *la caractéristique* A *n'est pas homotope à zéro*.

Supposons le col placé à l'origine $x = 0$, $y = 0$. Nous désignons par A la courbe intégrale sur la représentation plane qui tend vers le point $(0, 0)$ pour $t \to -\infty$, et qui correspond à la caractéristique A sur le tore. Puisque la caractéristique A est périodique et non homotope à zéro, il faut qu'il existe un

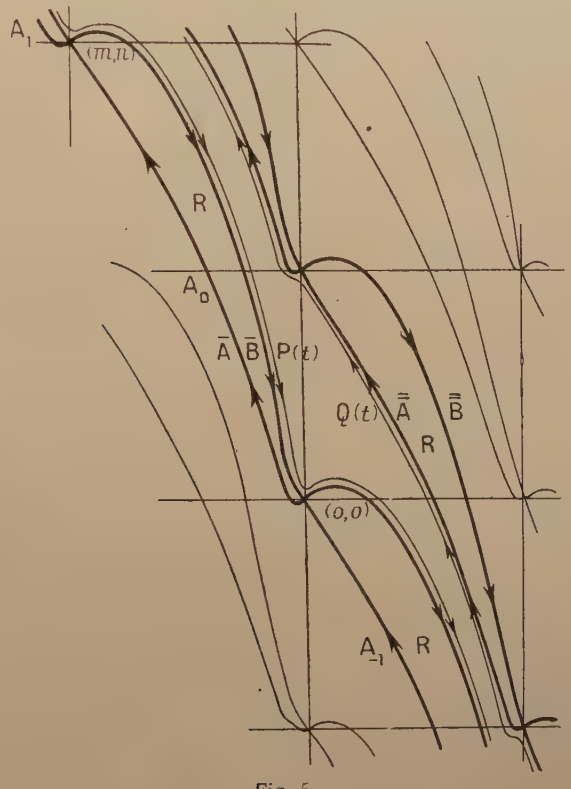


Fig. 5.

couple de nombres entiers $(m, n) \neq (0, 0)$ tels que la courbe intégrale A sur la représentation plane tende vers le point (m, n) pour $t \to \infty$, et qu'il n'y ait pas de col sur l'arc $\overset{\frown}{(0,0),(m,n)}$ de la courbe intégrale A. Nous désignons par A_0 l'arc $\overset{\frown}{(0,0),(m,n)}$ de la courbe intégrale A, par A_1 l'arc $\overset{\frown}{(m,n),(2m,2n)}$ congruent à la courbe A_0, par A_{-1} l'arc $\overset{\frown}{(-m,-n),(0,0)}$, et ainsi de suite, et par $\bar{A}$ la courbe totale (*fig.* 5), soit

$$\bar{A} = \ldots + A_{-1} + A_0 + A_1 + \ldots .$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la courbe $\overline{A}$ ne passe pas par le point $(1, 0)$. Soit x la plus petite des valeurs telles qu'une courbe intégrale congruente à la courbe $\overline{A}$ et différente de $\overline{A}$ passe par le point $(x, 0)(0 < x \leq 1)$. Désignons par $\overline{\overline{A}}$ cette courbe intégrale.

Cela posé, la région R est couverte par les caractéristiques périodiques homotopes à zéro, et la caractéristique A n'est pas homotope à zéro. Donc la courbe A ne constitue pas le bord entier de la région R. Donc la branche B′ et la branche B″ forment une seule caractéristique périodique B, qui est l'autre partie du bord de la région R.

Soit B la courbe intégrale sur la représentation plane, qui correspond à la caractéristique B sur le tore, et tend vers le point $(0, 0)$ quand $t \to \infty$. Alors la courbe B doit tendre vers le point (m, n) quand $t \to -\infty$. Appliquons à partir de cette courbe la construction qui nous a donné la courbe $\overline{A}$ à partir de la courbe A : nous obtenons la courbe $\overline{B}$.

18. Envisageons la région $\overline{T}$ bordée par les deux courbes $\overline{A}$ et $\overline{\overline{A}}$ sur la représentation plane. Si P est un point quelconque du tore T, il y a infinité de points dans la région $\overline{T}$ qui correspondent au point P. Donc la courbe $\overline{B}$, ou une courbe $\overline{\overline{B}}$ congruente à la courbe $\overline{B}$, appartient à la région $\overline{T}$.

Or, si l'on considère la définition de la courbe $\overline{\overline{A}}$, il est aisé de démontrer qu'il n'y a pas de col dans la région $\overline{T}$, excepté sur les bords. Donc deux courbes différentes et congruentes à la courbe B ne peuvent appartenir à la région $\overline{T}$ à la fois. Et, si la courbe $\overline{B}$ n'appartient pas à la région $\overline{T}$, la courbe $\overline{\overline{B}}$ appartient à la région $\overline{T}$, et passe par les cols situés sur la courbe $\overline{\overline{A}}$ qui sont en nombre infini dans la représentation plane. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la courbe $\overline{B}$ appartient à la région $\overline{T}$.

19. Soit $P(t)$ une courbe intégrale assez proche de la courbe intégrale $\overline{B}$ dans la région $\overline{T}$, pour que le mouvement du point sur la courbe intégrale $P(t)$ ait le même sens que celui de la courbe intégrale $\overline{B}$. Nous définissons la courbe intégrale $Q(t)$ à partir de la courbe intégrale $\overline{\overline{A}}$ comme nous avons défini $P(t)$ à partir de la courbe intégrale $\overline{B}$. Puisque la caractéristique A est périodique non homotope à zéro, d'après le théorème I, les deux caractéristiques $P(t)$ et $Q(t)$ sont périodiques et non homotopes à zéro. Désignons par $\overline{\overline{T}}$ la région bordée par les deux courbes intégrales $P(t)$ et $Q(t)$. Cette région est évidemment équivalente à la région d'anneau du plan, et il n'y a pas de point singulier dans cette région, bords compris, et le mouvement du point sur les bords a le sens contraire. La région $\overline{\overline{T}}$ est, bien entendu, une région invariante admettant l'invariant intégral M. Mais, d'après le dernier théorème de Géométrie de

Poincaré, cela est impossible ([11]), puisque dans la région $\overline{T}$, il n'y a pas de point singulier.

20. Nous avons donc le

THÉORÈME III. — *Quand on a*

$$F = C = 1,$$

les deux branches qui tendent vers le col pour $t \to \infty$ *ou pour* $t \to -\infty$, *forment une caractéristique périodique homotope à zéro, qui constitue le bord entier de la région* R *couverte par les caractéristiques homotopes à zéro autour du centre. Si les deux autres branches aboutissant au col forment dans la région* T — R *une seule caractéristique, cette caractéristique périodique ne doit pas être homotope à zéro, et toutes les caractéristiques de la région* T — R *sont périodiques non homotopes à zéro; mais au contraire, si ces deux branches ne forment pas une seule caractéristique non homotope à zéro, le mouvement du point dans la région* T — R *est ergodique.*

([11]) *Rendiconti del Circolo Matematico di Parlermo*, t. 33, 1912, p. 376-378; GEORGE D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, 1927, p. 165-169.

SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

PAR M. MICHEL HERVÉ.

Introduction.

Une fonction fuchsienne relative à un groupe discontinu γ d'automorphismes d'un domaine D est une fonction $\theta(z)$ holomorphe sur D et vérifiant, pour chaque automorphisme $z'=f(z)$ du groupe γ, l'identité $\theta[f(z)]\equiv\theta(z)[\mathrm{D}f(z)]^{-m}$, où $\mathrm{D}f(z)$ désigne le déterminant fonctionnel et m un entier appelé dimension de la fonction $\theta(z)$. Cette notion, sous ce nom et aussi sous quelques autres (fonction thêtafuchsienne, forme automorphe), joue, dans de nombreux travaux sur les fonctions automorphes, un rôle important quoique intermédiaire, les séries de Poincaré permettant de construire des fonctions fuchsiennes, et celles-ci à leur tour fournissant des fonctions automorphes.

Si l'on porte son attention sur les fonctions fuchsiennes les premières questions me semblent être :

1° Toute fonction automorphe est-elle quotient de deux fonctions fuchsiennes ?

2° Toute fonction fuchsienne est-elle somme d'une série de Poincaré ?

3° Quel est le nombre maximum, soit $d(m)$, de fonctions fuchsiennes de dimension m linéairement indépendantes ?

Le Mémoire de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes d'une variable [12] (1) contient les réponses à ces questions pour un groupe γ de la première famille, c'est-à-dire dont le polygone fondamental a sa frontière tout entière dans D (et aussi pour d'autres groupes, mais avec des hypothèses supplémentaires

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie (à la fin).

sur le comportement d'une fonction fuchsienne à la frontière de D); les réponses sont : oui aux 1re et 2e questions et, à la 3e,

$$d(m) = (2m-1)(P-1) + \sum_i \left[m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \right],$$

où le crochet désigne la partie entière, P et β_i des entiers, en nombre fini, attachés à γ; $\frac{2\pi}{\beta_i}$ est la somme des angles du polygone fondamental aux divers sommets d'un cycle elliptique; ce résultat est de la forme

$$d(m) = am + b(r),$$

r étant le reste de la division de m par le PPCM des β_i, a ne dépendant que de γ. La méthode de Poincaré peut être qualifiée d'algébrique : ayant établi que toutes les fonctions automorphes relatives à γ sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles, convenablement choisies, il calcule le nombre des conditions imposées à une courbe algébrique d'ordre donné par le fait qu'elle a, en des points donnés, des contacts d'ordres donnés avec des courbes données.

Pour les fonctions automorphes de n variables relatives à un groupe γ, Blumenthal a montré [1] qu'elles sont fonctions rationnelles de $n+1$ d'entre elles, convenablement choisies; mais l'extension à n variables du raisonnement de Poincaré me semble poser un problème de géométrie algébrique si ardu que j'ai cherché une autre méthode dans la théorie des fonctions, en me bornant aux hypothèses suivantes : D borné et univalent, γ de la 1re famille (hypothèse qui ne suppose pas connu un domaine fondamental, mais seulement un ensemble compact $K \subset D$ tel que D soit réunion des images de K par γ). On sait alors [13] que D est domaine d'holomorphie, ce qui permet d'appliquer les théorèmes de M. H. Cartan [4] sur les idéaux de fonctions analytiques.

Contrairement aux propriétés précédentes, certains procédés employés ici (par exemple dans la représentation paramétrique locale d'une variété analytique) ne valent que pour $n = 2$; ne pouvant donner, pour n quelconque, que des résultats partiels, j'ai préféré consacrer ce travail aux fonctions de deux variables complexes. Des trois questions posées ci-dessus, la première est résolue au n° 13, les deux autres, mais seulement pour m assez grand, au n° 18, et cela dans tout domaine D admettant un groupe γ d'automorphismes à la fois discontinu et de la 1re famille : c'est dire, peut-être, que les démonstrations sont communes au bicercle et à l'hypersphère.

La plus grande partie de ce travail a été exposée dans les leçons que j'ai faites cette année au Collège de France, au titre de la Fondation Peccot. Je suis heureux de remercier MM. les Membres de l'Université et du Collège de France qui m'ont fait l'honneur de me charger de ces leçons, et en particulier M. Montel qui a inséré ce Mémoire dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*.

I. — Terminologie.

1. Soit D un domaine borné, univalent, de l'espace $\mathcal{C}^2$ rapporté à deux coordonnées complexes x, y; la notation $z=(x, y)$ désignera un point de D.

Toute suite, uniformément convergente sur tout compact, d'automorphismes ([2]) de D a pour limite, soit un automorphisme de D, soit une transformation dégénérée, à déterminant fonctionnel identiquement nul, qui transforme chaque point de D en un point de la frontière de D[2].

Un groupe γ d'automorphismes de D est *discontinu* si toute suite convergente d'automorphismes distincts pris dans γ a pour limite une transformation dégénérée. Il revient au même de dire :

a. qu'on ne peut extraire de γ une suite d'automorphismes distincts de la transformation identique et convergeant vers celle-ci;

b. qu'étant donné dans D deux compacts quelconques K_1 et K_2, les ensembles K_1 et $f(K_2)$ n'ont de points communs que pour un nombre fini d'automorphismes f appartenant à γ.

Ainsi un groupe discontinu comprend au plus une infinité dénombrable d'automorphismes. D'autre part, les automorphismes du groupe qui laissent fixe un point z_0 de D forment un sous-groupe fini $\gamma(z_0)$, donc chacun d'eux compte la transformation identique parmi ses itérés.

Soit $Df(z)$ le déterminant fonctionnel de l'automorphisme $z'=f(z)$: il existe un entier positif $q(z_0)$, que nous prendrons le plus petit possible, tel que $f\in\gamma(z_0)$ entraîne $[Df(z_0)]^{q(z_0)}=1$. Si z_0 et z_1 sont *équivalents par* γ, c'est-à-dire $z_1=g(z_0)$, avec $g\in\gamma$, l'ensemble des valeurs prises par $Df(z_0)$ pour $f\in\gamma(z_0)$ est aussi l'ensemble des valeurs prises par $Df(z_1)$ pour $f\in\gamma(z_1)$, donc $q(z_0)=q(z_1)$. D'autre part, $q(z)$ est borné sur tout compact K : en effet, γ ne comprend qu'un nombre fini d'automorphismes laissant fixes des points de K; si f_i est l'un d'entre eux, il existe un entier $r_i>0$ tel que $f_i^{r_i}$ soit la transformation identique, et $z\in K$ entraîne

$$q(z)\leq \text{PPCM}\, r_i.$$

2. Nous dirons que γ est de la *première famille* si tout point de D est équivalent par γ à un point au moins d'un compact K convenablement choisi dans D :

$$D=\bigcup_{f\in\gamma} f(K);$$

cela revient à dire que l'espace quotient $\frac{D}{\gamma}$ est compact; l'expression « première

([2]) Ou transformations analytiques biunivoques de D en lui-même.

famille » a ainsi le même sens que dans la classification de Poincaré [12], mais peut, contrairement à cette classification, être appliquée à des groupes non discontinus.

Bien que certains passages de ce Mémoire supposent seulement que γ soit discontinu (n^{os} 5-6), ou seulement qu'il soit de la première famille (th. 4), il s'agira essentiellement d'un groupe à la fois discontinu et de la 1re famille; de tels groupes existent dans le bicercle $|x|<1$, $|y|<1$ et dans l'hypersphère $|x|^2+|y|^2<1$ [13]; il se peut, d'ailleurs, que tout domaine borné, à deux dimensions complexes, admettant un groupe d'automorphismes à la fois discontinu et de la 1re famille, se ramène, par une transformation analytique biunivoque, au bicercle ou à l'hypersphère.

Si γ est à la fois discontinu et de la 1re famille, le nombre $q(z)$ défini au n° 1 est borné sur tout le domaine D; il divise donc un entier positif q, que nous prendrons le plus petit possible, tel que $f\in\gamma$ et $f(z_0)=z_0$ entraînent $[\mathrm{D}f(z_0)]^q=1$; ce nombre q peut être appelé *période* du groupe γ. Pour un groupe fuchsien de la 1re famille [12], c'est le PPCM des nombres β_i tels que $\frac{2\pi}{\beta_i}$ soit la somme des angles du polygone fondamental aux divers sommets d'un cycle elliptique.

3. Étant donné un entier m, nous appellerons *fonction fuchsienne de dimension m* relative à γ toute fonction $\theta(z)$ *holomorphe* sur D et vérifiant les identités

$$\theta[f(z)]\equiv\theta(z)[\mathrm{D}f(z)]^{-m} \qquad \text{pour tout} \quad f\in\gamma. \tag{1}$$

Comme on le verra plus loin (n° 13), relativement à un groupe γ à la fois discontinu et de la 1re famille, toute fonction méromorphe sur D et vérifiant les identités (1) est le quotient de deux fonctions fuchsiennes dont les dimensions ont pour différence m; en particulier, toute *fonction automorphe* relative à γ, c'est-à-dire toute fonction $\varphi(z)$ méromorphe sur D et vérifiant

$$\varphi[f(z)]\equiv\varphi(z) \qquad \text{pour tout} \quad f\in\gamma, \tag{2}$$

est quotient de deux fonctions fuchsiennes de même dimension.

La *série de Poincaré* formée à partir d'une fonction $u(z)$ holomorphe sur D :

$$\sum_{f\in\gamma} u[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^m,$$

satisfait formellement aux identités (1); on démontre [5] ou [10], en supposant seulement γ discontinu, que la série de terme général $|\mathrm{D}f(z)|^2$ converge normalement sur tout compact. On obtient donc une fonction fuchsienne de dimension $m\geq 2$, relative à un groupe γ discontinu, en formant une série de Poincaré relative à une fonction $u(z)$ bornée sur D (par exemple un polynome),

plus généralement à une fonction $u(z)$ telle que les fonctions $u|f(z)||\mathrm{D}f(z)|^{m-2}$ (associées aux divers $f \in \gamma$) soient bornées dans leur ensemble sur tout compact.

On obtient aussi des fonctions fuchsiennes, d'une part par multiplication de fonctions fuchsiennes, d'autre part par combinaison linéaire, à coefficients complexes, de fonctions fuchsiennes de même dimension : les fonctions fuchsiennes de dimension m relatives à un groupe γ forment un espace vectoriel complexe dont la dimension (qui peut *a priori* être ∞) sera notée $d(m)$. D'autre part, si $\theta(z)$ et $\theta'(z)$ sont deux fonctions fuchsiennes de dimensions m et m', $\frac{\theta(z)}{\theta'(z)}$ en est une de dimension $m-m'$, pourvu que ce quotient soit holomorphe sur D, ce que nous énoncerons : $\theta(z)$ *divisible* par $\theta'(z)$ sur D.

Nous nous proposons, relativement à un groupe à la fois discontinu et de la 1re famille, d'une part de déterminer $d(m)$, d'autre part de reconnaître si toute fonction fuchsienne est somme d'une série de Poincaré; ces buts seront atteints (n° 18), du moins pour m assez grand, $m > m_0$.

4. Si E est une variété analytique dans D, c'est un ensemble fermé dans D et, si $z_0 = (x_0, y_0)$ est un point de E, ou bien c'est un point isolé de E, ou bien, au voisinage de ce point, E se compose d'un nombre fini de *rameaux* (3) au point z_0, dont chacun est défini, soit par $x = x_0$, soit par $y - y_0 = \mathcal{S}\left[(x-x_0)^{\frac{1}{n}}\right]$, n étant un entier positif, $\mathcal{S}$ une série entière sans terme constant, où les exposants des termes non nuls sont premiers dans leur ensemble avec n. Ainsi, un voisinage convenable de z_0 sur le rameau considéré est mis en correspondance biunivoque avec un disque $|t| < r_0$, où $t = y - y_0$ dans le 1er cas, $t = (x-x_0)^{\frac{1}{n}}$ dans le 2e cas, et r_0 est inférieur, dans le 2e cas, au rayon de convergence de $\mathcal{S}$: t sera appelé *paramètre local* attaché au point z_0 et au rameau considéré.

La variété E sera dite *ramifiée* en un point z_0 de E si elle a plusieurs rameaux en ce point; s'il en est ainsi, dans un voisinage convenable de z_0, z_0 est le seul point commun à deux de ces rameaux; les points de E où E est ramifiée sont donc isolés.

Si $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe sur D s'annulant en un point z_0 de E, ou bien z_0 est point isolé de la variété $\mathrm{E} \cap (\varphi = 0)$, ou bien $\varphi(z) \equiv 0$ au voisinage de z_0 sur un rameau (au moins) de E en z_0 et, par suite, sur toute la composante irréductible de E qui contient ce rameau [3].

Si $f \in \gamma$, f étant distinct de la transformation identique, $f(z) = z$ définit une variété analytique dans D, sur laquelle $|\mathrm{D}f(z)| = 1$; sur un rameau de cette variété, $\mathrm{D}f(z)$ est fonction holomorphe du paramètre local, donc, sur

(3) Expression employée de préférence à « composantes irréductibles au point z_0 », afin d'éviter toute confusion avec les composantes irréductibles globales.

une composante irréductible de cette variété, $Df(z) = \text{const.}$; parmi ces composantes irréductibles, considérons celles où $Df(z) \neq 1$ et cela pour tous les automorphismes de γ : γ étant discontinu, on obtient une variété analytique Q dans D, qui est le lieu des points z de D, où $q(z) > 1$ et, par suite, est conservée par les automorphismes de γ :

$$f(Q) = Q \qquad \text{pour} \quad f \in \gamma.$$

II. — Propriétés préliminaires des fonctions fuchsiennes.

5. Théorème 1. — *Étant donné le groupe discontinu γ, un point z_0 de* D *que ne laisse fixe aucun automorphisme de γ (sauf la transformation identique), $\frac{h(h+1)}{2}$ nombres complexes et un nombre positif ε, pour m assez grand il existe une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m telle que les valeurs prises en z_0 par θ, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial^{h-1}\theta}{\partial y^{h-1}}$ diffèrent respectivement de moins de ε des $\frac{h(h+1)}{2}$ valeurs données.*

Puisque $\sum_{f\in\gamma} |Df(z_0)|^2 < +\infty$, les $f \in \gamma$ tels que $|Df(z_0)| \geq 1$, parmi lesquels figure la transformation identique, soit f_1, sont en nombre fini, soit $f_1, \ldots, f_p$; on peut trouver un polynome $u(z)$ tel que u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial^{h-1} u}{\partial y^{h-1}}$ prennent, au point z_0 les $\frac{h(h+1)}{2}$ valeurs données, aux points $f_2(z_0), \ldots, f_p(z_0)$ la valeur 0; si

$$\theta_1(z) \equiv \sum_{i=1}^{p} u[f_i(z)][Df_i(z)]^m,$$

quel que soit m, θ_1, $\frac{\partial\theta_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial^{h-1}\theta_1}{\partial y^{h-1}}$ prennent au point z_0 les $\frac{h(h+1)}{2}$ valeurs données; d'autre part, si $\theta(z)$ est la somme de la série de Poincaré de dimension m formée à partir de $u(z)$, $\theta(z) - \theta_1(z) \to 0$ (quand $m \to +\infty$) uniformément sur un voisinage convenablement choisi de z_0.

Conséquences. — Pour m assez grand, on peut trouver deux fonctions fuchsiennes de dimension m linéairement indépendantes; leur quotient est une fonction automorphe non constante. On peut, d'autre part, k étant convenablement choisi, trouver trois fonctions fuchsiennes θ_1, θ_2, θ_3 de dimension k telles que

$$\theta_3(z_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{D\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}, \frac{\theta_2}{\theta_3}\right)}{D(x, y)} \neq 0$$

au point z_0; alors les fonctions automorphes $\frac{0_1}{0_3}$, $\frac{0_2}{0_3}$ ne sont liées en particulier par aucune relation algébrique, et les monomes 0_1^n, $0_1^{n-1}0_2$, ..., 0_3^n sont des fonctions fuchsiennes linéairement indépendantes de dimension kn : $d(kn) \geq C_{n+2}^2$. Si k est tel qu'il existe des fonctions fuchsiennes non identiquement nulles de toute dimension au moins égale à k, $m - m' \geq k$ entraîne $d(m) \geq d(m')$; chaque entier $m (m \geq 2k)$ peut s'écrire

$$m = kn + l, \qquad \text{avec} \quad 0 \leq l \leq k-1,$$

et l'on a

$$d(m) \geq d[k(n-1)] \geq C_{n+1}^2 > \frac{n^2}{2};$$

ainsi

$$\lim_{m=+\infty} \frac{d(m)}{m^2} \geq \frac{1}{2k^2} > 0.$$

6. Le théorème 1 est, en général, en défaut en un point z_0 invariant par des automorphismes de γ (autres que la transformation identique), car l'identité (1) relative à chacun de ces automorphismes entraîne des relations entre les valeurs en z_0 d'une fonction fuchsienne et de ses dérivées partielles. En laissant de côté les dérivées partielles, on peut énoncer :

THÉORÈME 2. — *Étant donné les points $z_1, \ldots, z_s$ (en nombre s fini quelconque) non équivalents par le groupe discontinu γ, un nombre complexe a_1 et un nombre positif ε, pour m assez grand et multiple de $q(z_1)$ (4), il existe une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m telle que*

$$|\theta(z_1) - a_1| < \varepsilon, \qquad |\theta(z_2)| < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\theta(z_s)| < \varepsilon.$$

Soient encore $f_1, \ldots, f_p$ les $f \in \gamma$ tels que $|Df(z_j)| \geq 1$ pour l'un au moins des $z_j (1 \leq j \leq s)$; parmi ces automorphismes, figurent la transformation identique f_1 et tous les éléments du sous-groupe $\gamma(z_1)$ (4), soit $f_1, \ldots, f_r (r \leq p)$; on choisit un polynome $u(z)$ tel que

$$u(z_1) = \frac{a_1}{r}, \qquad u[f_i(z_1)] = 0 \qquad \text{pour} \quad r+1 \leq i \leq p,$$

enfin

$$u[f_i(z_j)] = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad 2 \leq j \leq s,$$

conditions compatibles, puisque z_1 et z_j ne sont pas équivalents par γ. En conservant les notations θ et θ_1 du théorème 1, on a

$$\theta_1(z_2) = \ldots = \theta_1(z_s) = 0,$$

(4) Défini au n° 1.

quel que soit m et, d'autre part, $\theta - \theta_1 \to 0$ quand $m \to +\infty$ en chacun des points $z_1, \ldots, z_s$; enfin

$$\theta_1(z_1) = \frac{a_1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mathrm{D} f_i(z_1)]^m = a_1$$

si m est multiple de $q(z_1)$.

A noter que la valeur de m à partir de laquelle l'énoncé du théorème est vérifié dépend des points $z_1, \ldots, z_s$, de ε et de $\sup_{\mathrm{D}} |u|$, quantité proportionnelle à $|a_1|$ pour des points $z_1, \ldots, z_s$ donnés.

Corollaire 1. — *Étant donné les points $z_1, \ldots, z_s$ non équivalents par γ, pour m assez grand et multiple de $q(z_1), \ldots, q(z_s)$ une fonction fuchsienne de dimension m peut prendre en $z_1, \ldots, z_s$ n'importe quel système de s valeurs.*

Les systèmes de valeurs prises en $z_1, \ldots, z_s$ par les diverses fonctions fuchsiennes de dimension m forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^s$, de dimension au plus égale à $d(m)$; s'il ne remplit pas $\mathcal{C}^s$, il admet un sous-espace perpendiculaire, sur lequel on considère un point, de coordonnées $a_1, \ldots, a_s$, à la distance 1 de l'origine

$$\sum_{j=1}^{s} |a_j|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{s} \overline{a_j} \theta(z_j) = 0$$

pour toute fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m; de là résulte

$$\sum_{j=1}^{s} |\theta(z_j) - a_j|^2 \geq 1;$$

mais, d'après le théorème 2, étant donné $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{s}}$, une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m peut vérifier les s conditions $|\theta(z_j) - a_j| < \varepsilon$, pourvu que m soit multiple de $q(z_1), \ldots, q(z_s)$ et au moins égal à un nombre m_0 dépendant de $z_1, \ldots, z_s, \varepsilon$, mais indépendant des a_j si chaque $|a_j| \leq 1$, ce qui est le cas ici.

Corollaire 2. — *A tout point z_1 de D on peut associer un voisinage V_1 de ce point et un nombre m_1 tels que, pour $m \geq m_1$ et m multiple de $q(z_1)$, il existe une fonction fuchsienne de dimension m ne s'annulant en aucun point de V_1.*

D'après le théorème 2, il existe deux fonctions fuchsiennes, $\theta_1(z)$ de dimension $kq(z_1)$, $\theta_2(z)$ de dimension $(k+1)q(z_1)$ ne s'annulant ni l'une ni l'autre au point z_1, ni par suite sur un voisinage convenable V_1 de ce point; tout entier assez grand peut s'écrire $kn_1 + (k+1)n_2$, n_1 et n_2 étant deux entiers positifs, et $\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}$ est une fonction fuchsienne de dimension $[kn_1 + (k+1)n_2]q(z_1)$, ne s'annulant en aucun point de V_1.

7. Si le groupe γ est à la fois discontinu et de la 1re famille, on peut d'abord, dans les énoncés du théorème 2 et de ses corollaires, remplacer les nombres $q(z)$ par la période q de γ, définie au n° 2; mais surtout :

THÉORÈME 3. — *Si le groupe γ est à la fois discontinu et de la 1re famille, il existe un nombre μ, ne dépendant que de γ, tel que, étant donné un ensemble fini ou dénombrable $X \subset D$ et un entier m au moins égal à μ et multiple de q, on puisse trouver une fonction fuchsienne de dimension m ne s'annulant en aucun point de X.*

γ étant de la 1re famille, soit le compact K tel que $D = \bigcup_{f \in \gamma} f(K)$; comme une fonction fuchsienne s'annule en même temps en deux points équivalents par γ, on peut supposer $X \subset K$; le corollaire 2 fait correspondre à chaque point z_i de D un ensemble ouvert V_i contenant z_i et un nombre m_i; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut trouver les points z_j, en nombre fini s, tels que la réunion des ensembles V_j correspondants couvre K. Soit $\mu = \operatorname{Max}_{1 \leq j \leq s} m_j$: si m est au moins égal à μ et multiple de q, alors, pour chaque j, m est au moins égal à m_j et multiple de $q(z_j)$, donc il existe une fonction fuchsienne $\theta_j(z)$ de dimension m ne s'annulant en aucun point de V_j; la forme linéaire (en λ_j) $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \theta_j(z)$ n'est identiquement nulle pour aucun point z de K; étant donné de telles formes, en nombre fini ou en infinité dénombrable, on peut choisir les λ_j n'annulant aucune d'elles.

THÉORÈME 4. — *Relativement à un groupe de la 1re famille, toute fonction fuchsienne de dimension négative est identiquement nulle; toute fonction fuchsienne de dimension* 0 *est une constante; toute fonction fuchsienne de dimension positive a une variété de zéros non vide.*

Si une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension $m < 0$ n'est pas identiquement nulle, on peut trouver une suite de points $z_k \in D$, sans points d'accumulation dans D, telle que

$$\theta(z_1) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad |\theta(z_{k+1})| \geq |\theta(z_k)|;$$

pour chaque k,

$$z_k = f_k(w_k), \qquad \text{avec} \quad f_k \in \gamma \quad \text{et} \quad w_k \in K;$$

toute suite convergente extraite de la suite f_k a pour limite, uniforme sur K, une transformation dégénérée, à déterminant fonctionnel identiquement nul; ainsi

$$D f_k(w_k) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \theta(z_k) = \theta(w_k)\,[D f_k(w_k)]^{-m} \to 0.$$

Si $\theta(z)$ est une fonction fuchsienne de dimension o, c'est-à-dire une fonction automorphe holomorphe sur D,

$$\sup_{D} |\theta| = \sup_{K} |\theta|.$$

Si, enfin, $\theta(z)$ est une fonction fuchsienne de dimension $>$ o ne s'annulant en aucun point de D, $\frac{1}{\theta(z)}$ est une fonction fuchsienne de dimension $<$ o non identiquement nulle.

8. L'hypothèse, jusqu'à présent inutile, que le nombre des variables est 2, nous sert lorsque nous considérons une variété analytique E dans D (*cf.* n° 4) :

Théorème 5. — *Étant donné une variété analytique* E *dans* D *et un entier m au moins égal à* μ *et multiple de q, on peut trouver une fonction fuchsienne* $\theta(z)$ *de dimension m telle que la variété* $E \cap (\theta = o)$ *n'ait que des points isolés.*

Si cette variété a un point non isolé, $\theta(z) \equiv o$ sur une composante irréductible au moins de E; on choisit donc un point sur chacune des composantes irréductibles de E, en nombre fini ou en infinité dénombrable [3], d'où un ensemble X auquel on applique le théorème 3.

Remarque. — L'emploi de ce théorème 3*a*, sur celui du corollaire 1, l'avantage, important pour la suite, de donner le résultat pour $m \geqq \mu$ et m multiple de q, μ et q ne dépendant que de γ. Néanmoins, l'emploi du corollaire 1 est intéressant si la variété E est conservée par les automorphismes de γ et la variété $E \cap Q$ (*cf.* n° 4) réduite à des points isolés : pour démontrer le théorème 5, il suffit de marquer, sur chacune des composantes irréductibles non ponctuelles de E qui rencontrent K, un point $z_i \notin Q$, donc tel que $q(z_i) = 1$, d'où le résultat pour *toute* valeur de m au moins égale à un nombre qui peut dépendre de E.

Théorème 6. — *Étant donné un entier k au moins égal à* μ *et multiple de q, on peut trouver une fonction fuchsienne* $\alpha(z)$ *de dimension k telle que la variété*

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = o$$

n'ait que des points isolés.

On choisit d'abord une fonction fuchsienne $\alpha_1(z) \not\equiv o$, de dimension k; si la variété

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = o$$

a des points non isolés, soit E cette variété, et $\alpha_2(z)$ une fonction fuchsienne de dimension k telle que la variété $E \cap (\alpha_2 = o)$ n'ait que des points isolés; K dési-

gnant toujours un compact tel que $D = \bigcup_{f\in\gamma} f(K)$, l'ensemble $E \cap (\alpha_2 = o) \cap K$ n'a qu'un nombre fini de points, soit $z_1, \ldots, z_r$.

Si l'on avait

$$\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \equiv \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y},$$

on aurait

$$\alpha_2(z) \equiv \lambda \alpha_1(z), \qquad \text{avec} \quad \lambda = \text{const.}$$

et $\alpha_1(z)$ répondrait à la question; ce cas écarté, les équations

$$\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}, \qquad \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}$$

définissent une variété analytique $E_1 \supset E$. Les points de E qui sont points d'accumulation de $E_1 - E$ sont isolés, car ce sont, soit des points isolés de E, soit des points où E_1 est ramifiée; ainsi l'ensemble $E \cap (E_1 - E)' \cap K$ n'a qu'un nombre fini de points, soit $z_{r+1}, \ldots, z_s$.

Pour chaque $j (1 \leq j \leq s)$, soit B_j une boule ouverte de centre z_j, de rayon assez petit pour que $\bar{B}_j \subset D$ et pour que la frontière S_j de B_j ne passe par aucun point $f(z_{j'}) (f \in \gamma;\ 1 \leq j' \leq s)$; l'ensemble

$$K_1 = \left(K - \bigcup_{j=1}^{s} B_j \right) + \bigcup_{\substack{f\in\gamma \\ 1\leq j\leq s}} [K \cap f(S_j)]$$

est un compact contenu dans K et ne contenant aucun z_j; je dis que, pour λ constant non nul et $|\lambda|$ assez petit, la variété

$$\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = \frac{\partial(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)}{\partial y} = o$$

n'a aucun point dans K_1.

Dans le cas contraire, en effet, on aurait deux suites λ_k et ζ_k telles que

$$\alpha_1(\zeta_k) + \lambda_k \alpha_2(\zeta_k) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(\zeta_k) + \lambda_k \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(\zeta_k) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(\zeta_k) + \lambda_k \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(\zeta_k) = o,$$

$$\lambda_k \neq o, \qquad \lambda_k \to o, \qquad \zeta_k \in K_1, \qquad \zeta_k \to \zeta;$$

d'où

$$\zeta_k \in E_1 \qquad \text{et} \qquad \zeta \in E;$$

mais on ne peut avoir $\zeta_k \in E$, qui entraînerait $\alpha_2(\zeta_k) = o$, ζ_k serait l'un des points $z_1, \ldots, z_r$; d'autre part, $\zeta_k \in E_1 - E$ donnerait $\zeta \in (E_1 - E)'$, ζ serait l'un des points $z_{r+1}, \ldots, z_s$.

Ainsi l'on peut trouver la fonction

$$\alpha(z) \equiv \alpha_1(z) + \lambda\alpha_2(z)$$

telle que la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

soit ε, n'ait aucun point dans K_1. Puisque

$$\alpha(z) \equiv \alpha[f(z)]\,[Df(z)]^k \qquad \text{pour} \quad f \in \gamma,$$

tout point de ε a toutes ses images par γ sur ε, et l'une d'elles au moins dans K; ε n'ayant aucun point sur $\bigcup_{f\in\gamma} [K \cap f(S_j)]$, ε ne rencontre pas S_j, donc n'a qu'un nombre fini de points dans B_j; d'autre part, ε n'a aucun point dans $K - \bigcup_{j=1}^{s} B_j$, donc n'a qu'un nombre fini de points dans K.

Remarque. — Une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ de dimension k s'annule, ainsi que $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, sur une variété de dimension 1 conservée point par point par un automorphisme $f \in \gamma$, lorsque sur cette variété

$$[Df(z)]^k \neq 1 \qquad \text{et} \qquad [Df(z)]^{k+1} \neq 1;$$

le théorème 6 pourrait donc être en défaut si k n'était pas multiple de q.

III. — Classes E-fuchsiennes.

9. Le groupe γ étant à la fois discontinu et de la 1re famille, soit E une variété analytique dans D conservée (dans son ensemble) par chaque automorphisme appartenant au groupe γ :

$$f(E) = E \qquad \text{pour} \quad f \in \gamma.$$

Il en est ainsi, par exemple, de la variété de zéros d'une fonction fuchsienne de dimension positive relative à γ, ou de la variété d'infinis d'une fonction automorphe non constante, variétés qui ne peuvent être vides (th. 4) et sont, d'autre part, sans point isolé.

m étant un entier, nous appellerons *fonction* E-*fuchsienne de dimension m* relative à γ toute fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D et vérifiant, pour $z \in E$, les relations

$$\varphi[f(z)] = \varphi(z)\,|Df(z)|^{-m} \qquad \text{pour tout} \quad f \in \gamma; \tag{1}$$

deux fonctions E-fuchsiennes de même dimension seront dites *équivalentes* si elles prennent la même valeur en tout point de E. L'ensemble des fonctions E-fuchsiennes équivalentes à une fonction E-fuchsienne $\varphi(z)$ de dimension m

sera appelé *classe* E-*fuchsienne* de dimension m et noté (φ); une classe E-fuchsienne de dimension m sera dite *fuchsienne* si elle contient au moins une fonction fuchsienne de dimension m. Une classe E-fuchsienne a une valeur en tout point de E.

Les classes E-fuchsiennes de dimension m et les classes fuchsiennes de dimension m forment deux espaces vectoriels complexes dont les dimensions seront notées respectivement $\delta_E(m)$ et $d_E(m)$: $d_E(m) \leq \delta_E(m)$; l'origine de ces deux espaces est la classe fuchsienne (o), formée de toutes les fonctions holomorphes sur D et identiquement nulles sur E.

Si, en particulier, E est la variété de zéros de la fonction fuchsienne $\alpha(z)$ fournie par le théorème 6, cette classe (o) se compose des fonctions holomorphes sur D et divisibles par $\alpha(z)$: en effet, quelle que soit la fonction $\alpha(z)$ holomorphe sur D, toute fonction nulle sur la variété $\alpha = 0$ est divisible, au voisinage d'un point z_0 de cette variété, par le produit des facteurs irréductibles de $\alpha(z)$ en ce point; et d'autre part, si un de ces facteurs figurait plus d'une fois dans $\alpha(z)$, tout zéro de ce facteur appartiendrait à la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

qui aurait donc des points non isolés.

Les classes E-fuchsiennes (resp. fuchsiennes) (φ_1) de dimension m_1, (φ_2) de dimension m_2, ont pour produit une classe E-fuchsienne (resp. fuchsienne) $(\varphi_1)(\varphi_2)$ de dimension $m_1 + m_2$; si $(\varphi_1)(\varphi_2) = (0)$, $(\varphi_2) \neq (0)$ n'entraîne pas nécessairement $(\varphi_1) = (0)$, mais seulement (φ_1) nulle identiquement sur une composante irréductible de E au moins. D'après les théorèmes 3 et 5, pour $m_1 \geq \mu$ et m_1 multiple de q, on peut choisir (φ_1) de manière que $(\varphi_1)(\varphi_2) = (0)$ entraîne $(\varphi_2) = (0)$.

10. On sait, d'autre part [13], que D, admettant un groupe d'automorphismes de la 1re famille, est domaine d'holomorphie; si donc la variété E est réduite à des points isolés, on peut [4, n° 33] se donner arbitrairement les valeurs en ces points d'une fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D; si l'on veut que $\varphi(z)$ soit E-fuchsienne de dimension m, ces valeurs sont déterminées par p d'entre elles (p étant le nombre des classes d'équivalence par γ des points de E), soit $\varphi(z_i)$; mais $\varphi(z_i)$ n'est arbitraire que si m est multiple de $q(z_i)$, sinon $\varphi(z_i) = 0$. Ainsi, *quel que soit l'entier* m, $\delta_E(m)$ est le nombre des indices i pour lesquels $q(z_i)$ divise m : c'est une fonction du reste r de la division de m par q. Le corollaire 1 (n° 6) conduit au même résultat pour $d_E(m)$, mais seulement *pour m assez grand*.

Si E n'est pas réduite à des points isolés, on peut marquer deux points z_1, z_2 non équivalents par γ sur une même composante irréductible de E, puis, k étant convenablement choisi, multiple de $q(z_1)$ et $q(z_2)$, trouver deux

fonctions fuchsiennes θ_1, θ_2 de dimension k telles que $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ prenne deux valeurs déterminées distinctes en z_1 et z_2; alors $(\theta_1)^n$, $(\theta_1)^{n-1}(\theta_2)$, ..., $(\theta_2)^n$ sont des classes fuchsiennes linéairement indépendantes de dimension kn, car sinon l'on aurait $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \text{const.}$ sur chaque composante irréductible de E. D'autre part (*cf.* n° 9), $m - m' \geqq \mu$ et $m - m'$ multiple de q entraînent $d_E(m) \geqq d_E(m')$; le raisonnement fait à la fin du n° 5 ne s'applique que pour m multiple du PGCD de k et q, donc, au mieux, pour m multiple du PPCM de $q(z_1)$ et $q(z_2)$; ainsi

$$\overline{\lim_{m=+\infty}} \frac{d_E(m)}{m} > 0.$$

Mais si, de plus, une composante irréductible non ponctuelle de E n'a en commun avec la variété Q(*cf.* n° 4) que des points isolés, on peut, sur cette composante, choisir z_1 et z_2 tels que

$$q(z_1) = q(z_2) = 1,$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$\lim_{m=+\infty} \frac{d_E(m)}{m} > 0.$$

Ces premières indications seront précisées plus loin (n° 20).

11. Théorème 7. — *Si la variété* E *est* sans point isolé, *toute classe* E-*fuchsienne de dimension négative est la classe* (0).

Si une fonction E-fuchsienne $\varphi(z)$ de dimension négative n'est pas identiquement nulle sur E, le raisonnement employé au théorème 4 montre que $\sup_E |\varphi|$ est atteinte en un point $z_0 \in E$; comme z_0 n'est pas point isolé de E, par z_0 passe au moins un rameau de E, défini paramétriquement (*cf.* n° 4) par

$$x = x_0 + t^n, \qquad y = y_0 + \mathfrak{S}(t), \qquad |t| < r_0; \tag{2}$$

la fonction $\varphi[x_0 + t^n, y_0 + \mathfrak{S}(t)]$ est holomorphe pour $|t| < r_0$ et son module est maximum à l'origine; ainsi $\varphi(z) = \text{const.}$ sur le rameau considéré, donc [3] sur la composante irréductible ε de E qui le contient; comme ε a des points d'accumulation sur la frontière de D, la valeur constante de $\varphi(z)$ sur ε est 0; ainsi

$$\sup_E |\varphi| = 0.$$

Remarque. — En appliquant le théorème 7 à la variété de zéros d'une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ fournie par le théorème 6, on peut montrer [7] l'existence de $\lim_{m=\infty} \frac{d(m)}{m^2}$; mais un résultat plus complet sera obtenu plus loin (n° 18).

COROLLAIRE 3. — *Si la variété* E, *conservée par les automorphismes appartenant à* γ, *n'est pas réduite à des points isolés, une fonction fuchsienne de dimension positive ne peut être non nulle en tout point de* E.

En retirant de E ses points isolés, on obtient une variété E_1 conservée par les automorphismes de γ et sans point isolé; si une fonction fuchsienne $\theta(z)$, de dimension positive, était non nulle en tout point de E_1, $\frac{1}{\theta(z)}$ serait holomorphe au voisinage de E_1; D étant domaine d'holomorphie, il existerait [4, n° 33] une fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D et telle que $\varphi(z) = \frac{1}{\theta(z)}$ pour $z \in E_1$, donc E_1-fuchsienne de dimension négative.

COROLLAIRE 4. — *Deux fonctions fuchsiennes de dimensions positives ont toujours une variété de zéros communs non vide.*

COROLLAIRE 5. — *Si la variété* E, *conservée par les automorphismes de* γ, *et les fonctions fuchsiennes* $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, *de même dimension positive, sont telles que la variété* $E \cap (\theta_1 = \theta_2 = 0)$ *soit vide* (5), *alors, quel que soit le scalaire* λ, *la variété* $E \cap (\theta_1 + \lambda\theta_2 = 0)$ *n'a que des points isolés.*

On suppose $\lambda \neq 0$ et applique le corollaire 3 à la variété $E \cap (\theta_1 + \lambda\theta_2 = 0)$ et à la fonction fuchsienne θ_1.

12. THÉORÈME 8. — *Le rapport* $\frac{\delta_E(m)}{m}$ *est borné.*

En chaque point z_0 de la variété analytique E_1 obtenue en retirant de E ses points isolés, et sur chaque rameau ρ_0 de E_1 en z_0, défini paramétriquement par (2) (on suppose $\bar{\rho}_0 \subset D$), soit σ_0 l'ensemble défini par $|t| < \frac{r_0}{2}$; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il suffit, pour couvrir $E_1 \cap K$ (6), d'un nombre fini d'ensembles tels que σ_0, soient $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$, associés aux points $z_0, \ldots, z_r$; soient, d'autre part, $z_{r+1}, \ldots, z_s$ les points isolés de E situés dans K. Pour chaque fonction E-fuchsienne $\varphi(z)$, on peut développer $\varphi[x_0 + t^n, y_0 + \mathfrak{S}(t)]$ en série de puissances de t : ce développement, étant le même pour toutes les fonctions d'une même classe E-fuchsienne, peut être appelé développement de Taylor de cette classe au point z_0 sur ρ_0.

Soit (φ) une classe E-fuchsienne de dimension m, nulle en $z_{r+1}, \ldots, z_s$ et dont les développements de Taylor, au point z_j sur $\rho_j (0 \leq j \leq r)$, ne comportent pas de termes de degré inférieur à h; si $\varphi(z)$ est une fonction E-fuchsienne de cette classe, supposée non nulle, $\sup_{E \cap K} |\varphi| > 0$, et cette borne

(5) Les théorèmes 3 et 5 permettent de trouver de telles fonctions, en commençant par une fonction θ_1 telle que la variété $E \cap (\theta_1 = 0)$ n'ait que des points isolés.

(6) K est l'ensemble défini au n° 2.

est atteinte en un point $\zeta \in E_1 \cap K$; on a, par exemple, $\zeta \in \sigma_0$ et ζ correspond, sur le rameau ρ_0, à la valeur τ du paramètre local t; par hypothèse,

$$\psi(t) \equiv \frac{\varphi[x_0 + t^n, y_0 + \mathcal{S}(t)]}{t^h}$$

est holomorphe pour $|t| < r_0$, donc

$$|\psi(\tau)| \leq \sup_{|t| = \frac{1}{2}|\tau|} |\psi(t)|,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(\zeta)| \leq \frac{1}{2^h} \sup_{\rho_0} |\varphi(z)|.$$

Comme les conditions $f \in \gamma$, $z \in K$, $f(z) \in \bigcup_{j=0}^{r} \rho_j$ ne sont satisfaites que pour un nombre fini d'automorphismes f, $\frac{1}{|Df(z)|}$ a dans ces conditions une borne supérieure finie λ, ne dépendant que de γ et E, et l'on a

$$2^h \leq \lambda^m, \qquad h \leq \frac{\log \lambda}{\log 2} m.$$

Si donc h est le premier entier supérieur à $\frac{\log \lambda}{\log 2} m$, les $(s-r)+(r+1)h$ conditions linéaires imposées à (φ) entraînent $(\varphi) = (0)$, donc

$$\delta_E(m) \leq (s-r) + (r+1)h.$$

Corollaire 6. — *Pour toute variété* E *conservée par les automorphismes de* γ, *il existe des fonctions fuchsiennes identiquement nulles sur* E, *mais non dans* D.

Dans le cas contraire, des fonctions fuchsiennes linéairement indépendantes appartiendraient à des classes E-fuchsiennes linéairement indépendantes, d'où $\delta_E(m) \geq d(m)$, contrairement au théorème précédent et au résultat du n° 5.

13. Corollaire 7. — *Toute fonction* $\omega(z)$ *méromorphe sur* D *et vérifiant les identités*

$$\omega[f(z)] \equiv \omega(z)[Df(z)]^{-m}$$

pour tout $f \in \gamma$ (*où* $m \geq 0$) *est le quotient de deux fonctions fuchsiennes de dimensions positives.*

Soit $\theta(z)$ une fonction fuchsienne de dimension $p > 0$, identiquement nulle, non dans D, mais sur la variété E d'infinis de $\omega(z)$; chaque point z_0 de E a un voisinage ouvert V_0 où

$$\omega(z) \equiv \frac{g_0(z)}{h_0(z)},$$

g_0 et h_0 étant holomorphes sur V_0 ainsi que les facteurs irréductibles de h_0 au point z_0, et 0 divisible, sur V_0, par le produit de ces facteurs irréductibles; si n_0 est le plus grand des exposants auxquels ces facteurs figurent dans h_0, $[\theta(z)]^{n_0}\omega(z)$ est holomorphe sur V_0; comme on peut couvrir $E \cap K$ à l'aide d'un nombre fini d'ensembles tels que V_0, il existe un entier $n > 0$ tel que $[\theta(z)]^n\omega(z)$ soit holomorphe au voisinage de tout point de $E \cap K$, donc sur D; et c'est une fonction fuchsienne de dimension $m + np$.

Remarque. — Il résulte aussi du théorème 8 que étant donné trois classes E-fuchsiennes (φ_1), (φ_2), (φ_3) de même dimension, il existe un polynome homogène P à trois variables, non identiquement nul, tel que $P[(\varphi_1), (\varphi_2), (\varphi_3)] = (0)$: en effet, les C^2_{n+2} classes E-fuchsiennes $(\varphi_1)^n$, $(\varphi_1)^{n-1}(\varphi_2)$, ..., $(\varphi_3)^n$ ne peuvent être linéairement indépendantes dès que n est assez grand.

Corollaire 8. — *Trois fonctions automorphes relatives à γ sont liées par une relation algébrique.*

Puisque (cor. 7) toute fonction automorphe est quotient de deux fonctions fuchsiennes, il suffit de montrer qu'étant donné quatre fonctions fuchsiennes θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 de même dimension, il existe un polynome homogène P à quatre variables, non identiquement nul, tel que $P(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \equiv 0$: cela résulte, comme dans la remarque ci-dessus, de ce que le rapport $\frac{d(m)}{m^2}$ est borné [6], propriété retrouvée plus loin (n° 18).

On a ainsi une démonstration plus élémentaire, mais valable seulement pour deux variables, d'un théorème établi par M. Siegel [13] pour un nombre quelconque de variables.

IV. — Classes E-fuchsiennes relatives à une variété E particulière : applications aux fonctions fuchsiennes.

14. Étant donné un entier k au moins égal à μ et multiple de q, il existe (th. 6) une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ de dimension k telle que la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

n'ait que des points isolés : c'est une combinaison linéaire de deux fonctions fuchsiennes $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ de dimension k, choisies, α_1 arbitrairement, α_2 telle que la variété

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \alpha_2 = 0$$

n'ait que des points isolés.

Étant donné la variété analytique Q définie au n° 4, on peut imposer à α_1 et α_2 les conditions supplémentaires suivantes : la variété $Q \cap (\alpha_1 = 0)$ n'a que des points isolés (th. 5) et $\alpha_2 \neq 0$ en tout point de celle-ci (th. 3); alors (cor. 5, n° 11) la variété $Q \cap (\alpha = 0)$ n'a que des points isolés.

Dans toute la suite, ε sera la variété de zéros d'une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ ainsi choisie *une fois pour toutes:* ce choix entraîne les propriétés suivantes des classes ε-fuchsiennes.

a. La classe (0) se compose des fonctions holomorphes sur D et divisibles par $\alpha(z)$ (n° 9);

b. Pour $m \geq m_0$, il existe une classe ε-fuchsienne (φ_1) de dimension m telle que $(\varphi_1)(\varphi_2) = (0)$ entraîne $(\varphi_2) = (0)$ (n^{os} 8, remarque, et 9).

D'autre part, k_1 étant au moins égal à μ et multiple de q, soient $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ deux fonctions fuchsiennes de dimension k_1 telles que :

c. La variété $\varepsilon \cap (\beta_1 = 0)$ est réduite à des points isolés et $\beta_2 \neq 0$ en tout point de celle-ci (th. 3 et 5).

Le changement de β_1 en $\beta_1 + \lambda\beta_2$ conserve la propriété *c* (cor. 5, n° 11) et déplace, d'aussi peu que l'on veut, les points de ε où $\beta_1 = 0$, donc permet, ces points étant répartis en p_1 classes d'équivalence par γ, contenant chacune un point ζ_i, de faire sur les ζ_i les hypothèses suivantes :

d. Les ζ_i n'appartiennent, ni à Q, ni à la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

de sorte qu'en un point $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$, ε a un seul rameau défini par exemple par $y - \eta_i = \mathcal{S}(x - \xi_i)$, $\mathcal{S}$ étant une série entière sans terme constant;

e. L'équation $\beta_1[x, \eta_i + \mathcal{S}(x - \xi_i)] = 0$ admet $x = \xi_i$ comme racine simple.

Les propriétés *c* à *e* seront remplies dans toute la suite par les fonctions β_1, β_2, dont la dimension k_1 pourra varier en restant au moins égale à μ et multiple de q.

15. Voici les premières conséquences des propriétés *a* à *e* :

f. D'après *c*, les fonctions $\alpha(z)$, $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ n'ont aucun zéro commun; D étant domaine d'holomorphie, il existe [4, n° 32] trois fonctions $u(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$, holomorphes sur D, telles que

$$\alpha u + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \equiv 1.$$

g. D'après *d* et *e*, pour toute fonction $\varphi(z)$ holomorphe au point ζ_i et telle que

$$\varphi(\zeta_i) = 0,$$

$\varphi[x, \eta_i + \mathcal{S}(x-\xi_i)]$ est divisible par $\beta_1[x, \eta_i + \mathcal{S}(x-\xi_i)]$ au voisinage de ζ_i, tandis que $\varphi(x, y) - \varphi[x, \eta_i + \mathcal{S}(x-\xi_i)]$ et $\beta_1(x, y) - \beta_1[x, \eta_i + \mathcal{S}(x-\xi_i)]$ sont divisibles par $y - \eta_i - \mathcal{S}(x-\xi_i)$, donc par α. Ainsi, toute fonction de z holomorphe et nulle au point ζ_i appartient à l'idéal engendré en ce point par $\alpha(z)$ et $\beta_1(z)$; de même en un point équivalent par γ à ζ_i.

h. L'idéal de fonctions holomorphes sur D engendré par $\alpha(z)$ et $\beta_1(z)$ est fermé [1, n° 32] et engendre, en un point ζ_i ou équivalent par γ à un ζ_i, l'idéal des fonctions holomorphes et nulles en ce point, en tout autre point l'idéal de toutes les fonctions holomorphes en ce point; ainsi [1, n° 30], pour qu'une fonction holomorphe sur D soit de la forme $\alpha\psi + \beta_1\varphi_1$, $\psi(z)$ et $\varphi_1(z)$ étant holomorphes sur D, il faut et il suffit qu'elle s'annule aux p_1 points ζ_i et en tous les points qui leur sont équivalents par γ.

16. Théorème 9. — *Pour m assez grand* ($m \geqq M_1$), *on a* (*cf.* n° 9) $\delta_\varepsilon(m) = \lambda m + \rho_1(r)$, *$r$ étant le reste de la division de m par q, λ ne dépendant que de ε* (*d'une manière précisée au n° 18*).

D'après la propriété *d* du n° 14, on peut appliquer le corollaire 1 (n° 6) aux points ζ_i avec $q(\zeta_i) = 1$: pour $m \geqq M_1$, on peut se donner arbitrairement les valeurs en ces points d'une fonction fuchsienne, *a fortiori* ε-fuchsienne, de dimension m, et les classes ε-fuchsiennes de dimension m nulles aux points ζ_i forment un espace vectoriel de dimension $\delta_\varepsilon(m) - p_1$. D'autre part, on vient de voir (*h*) que, si une fonction ε-fuchsienne $\varphi(z)$ s'annule aux points ζ_i, on a

$$\varphi(z) \equiv \alpha(z)\psi(z) + \beta_1(z)\varphi_1(z),$$

ψ et φ_1 étant holomorphes sur D; les relations

$$(1) \qquad \varphi[f(z)] = \varphi(z)[Df(z)]^{-m} \qquad \text{pour } f \in \gamma, \ z \in \varepsilon$$

entraînent

$$(2) \qquad \varphi_1[f(z)] = \varphi_1(z)[Df(z)]^{-(m-k_1)} \qquad \text{pour } f \in \gamma, \ z \in \varepsilon \text{ et } \beta_1(z) \neq 0,$$

restriction qui disparaît aussitôt puisque $\beta_1(z)$ ne s'annule sur ε qu'en des points isolés; ainsi toute classe ε-fuchsienne (φ) de dimension m nulle aux points ζ_i s'écrit $(\varphi) = (\beta_1)(\varphi_1)$, (φ_1) étant une classe ε-fuchsienne de dimension $m - k_1$. Enfin, le produit de (β_1) par une classe non nulle ne peut être nul, donc

$$\delta_\varepsilon(m) - p_1 = \delta_\varepsilon(m - k_1) \qquad \text{pour } m \geqq M_1.$$

Ainsi, dans un plan auxiliaire, les points de coordonnées m, $\delta_\varepsilon(m)$ dont les abscisses $m \equiv l_1 \pmod{k_1}$ sont alignés pour m assez grand; de même, pour les points d'abscisses $m \equiv l_2 \pmod{(k_1 + q)}$; or ces deux ensembles ont une

infinité de points communs pourvu que $l_2 \equiv l_1 \pmod{q}$; donc tous les points d'abscisses $m \equiv r \pmod{q}$ sont alignés pour m assez grand :

$$\delta_\varepsilon(m) = \lambda(r)\, m + \rho_1(r) \qquad \text{pour} \quad m \geq M_1.$$

Enfin, d'après la propriété b du n° 14,

$$\delta_\varepsilon(m) \geq \delta_\varepsilon(m') \qquad \text{dès que} \quad m - m' \geq m_0;$$

par suite, λ est indépendant de r.

Remarque. — Une autre conséquence de cette démonstration est que le nombre $\frac{p_1}{k_1} = \lambda$ ne dépend que de ε. Ce théorème 9 précise le théorème 8, mais seulement pour une variété ε.

17. Lemme. — *Pour $m \geq M_1$, toute classe ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$ s'écrit $(\beta_1)(\varphi_1) + (\beta_2)(\varphi_2)$, (φ_1) et (φ_2) étant deux classes de dimension m dont la seconde au moins est fuchsienne.*

Pour $m \geq M_1$, on peut (*cf.* n° 16) se donner arbitrairement les valeurs aux points ζ_i d'une fonction fuchsienne $\varphi_2(z)$ de dimension m : comme (*cf.* n° 14, *c*) $\beta_2(\zeta_i) \neq 0$, on peut poser

$$\varphi_2(\zeta_i) = \frac{\varphi(\zeta_i)}{\beta_2(\zeta_i)}$$

quelle que soit la fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D; si celle-ci est ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$ on a du même coup

$$\varphi_2(z) = \frac{\varphi(z)}{\beta_2(z)}$$

en tout point z équivalent par γ à un ζ_i; alors (*cf.* n° 15, *h*)

$$\varphi - \beta_2 \varphi_2 \equiv \alpha \psi + \beta_1 \varphi_1,$$

$\psi(z)$ et $\varphi_1(z)$ étant holomorphes sur D; comme $\varphi - \beta_2 \varphi_2$ est une fonction ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$, le raisonnement du n° 16 montre que φ_1 en est une de dimension m.

Théorème 10. — *Pour m assez grand ($m \geq M$), on a $d_\varepsilon(m) = \lambda m + \rho(r)$.*

Choisissons d'une part les $(\varphi_1)_{j_1}$, où

$$1 \leq j_1 \leq \delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m - k_1),$$

formant, avec les produits de (β_2) par les classes fuchsiennes de dimension $m - k_1$, une base des classes ε-fuchsiennes de dimension m; d'autre part, les $(\varphi_2)_{j_2}$, où $1 \leq j_2 \leq d_\varepsilon(m)$, formant une base des classes fuchsiennes de dimension m; d'après le lemme, toute classe ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$

(où $m \geq M_1$) est combinaison linéaire des classes $(\beta_1)(\varphi_1)_{j_1}$ et $(\beta_2)(\varphi_2)_{j_2}$, donc

$$\delta_\varepsilon(m+k_1) \leq \delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m-k_1) + d_\varepsilon(m).$$

Or, au n° 16, on a trouvé, pour $m \geq M_1$,

$$\delta_\varepsilon(m) - \delta_\varepsilon(m-k_1) = \delta_\varepsilon(m+k_1) - \delta_\varepsilon(m) = p_1;$$

la comparaison des résultats donne

$$\delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m) \leq \delta_\varepsilon(m-k_1) - d_\varepsilon(m-k_1).$$

Comme la différence $\delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m)$ est positive ou nulle, pour m assez grand elle est constante lorsque $m = \text{const.}\ (\text{mod. } q)$; le théorème 10 découle ainsi du théorème 9.

Remarque. — Lorsque le domaine D est un bicercle, on peut, par de tout autres méthodes [8], montrer que, pour m assez grand, $\delta_\varepsilon(m) = d_\varepsilon(m)$, autrement dit toute classe ε-fuchsienne de dimension m est fuchsienne; j'ignore s'il en est encore ainsi lorsque D n'est pas un bicercle.

THÉORÈME 11 (7). — *Pour $m \geq M$, toute fonction fuchsienne de dimension $m+k_1$ s'écrit $\alpha\Theta + \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$, où $\theta(z)$, $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$ sont des fonctions fuchsiennes de dimensions $m+k_1-k$, m, m.*

Si $m_1 \geq M_1$ et $n \geq 0$, n applications du lemme montrent que la forme générale des classes ε-fuchsiennes de dimension $m_1 + nk_1$ est $\sum_{i=1}^{\delta_\varepsilon(m_1)} P_i[(\beta_1),(\beta_2)](\varphi_i)$, les (φ_i) formant une base des classes ε-fuchsiennes de dimension m_1, les P_i étant des polynomes homogènes et de degré n à deux variables; les systèmes de polynomes P_i, de même degré, tels que la classe $\sum_i P_i[(\beta_1),(\beta_2)](\varphi_i)$ soit fuchsienne forment un module de formes algébriques, qui admet [9] une base finie formée des systèmes P_i^j $(1 \leq j \leq s)$. Alors la classe $\sum_i P_i^j[(\beta_1),(\beta_2)](\varphi_i)$ contient une fonction fuchsienne ω_j et toute classe fuchsienne de dimension $m_1 + nk_1$ est de la forme $\sum_j Q_j[(\beta_1),(\beta_2)](\omega_j)$, les Q_j étant des polynomes homogènes, autrement dit toute fonction fuchsienne Θ de dimension $m_1 + nk_1$ est équivalente à une fonction fuchsienne de la forme $\sum_j Q_j(\beta_1,\beta_2)\omega_j$; la différence $\Theta - \sum_j Q_j(\beta_1,\beta_2)\omega_j$ est divisible par α (n° 14, *a*) et le quotient est

(7) Ce théorème sera généralisé au n° 21 (cor. 11).

encore une fonction fuchsienne; $\Theta(z)$ possède la propriété annoncée pourvu que sa dimension dépasse celles de toutes les ω_j.

18. Ces deux théorèmes entraînent à leur tour les propriétés annoncées dans l'introduction :

COROLLAIRE 9. — *Toute fonction fuchsienne de dimension assez grande est somme d'une série de Poincaré* (*cf.* n° 3).

D'après le théorème 11, il suffit de montrer qu'il en est ainsi d'une fonction fuchsienne de la forme $\alpha\theta+\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2$, où θ, θ_1, θ_2 sont des fonctions fuchsiennes quelconques, tandis que α, β_1, β_2 sont des fonctions fuchsiennes fournies par les théorèmes 1 à 6, qui utilisent les trois procédés de construction suivants : formation d'une série de Poincaré de dimension au moins égale à 2 à partir d'un polynome $u(z)$, multiplication, combinaison linéaire.

Soient donc un polynome $u(z)$,

$$\omega(z)=\sum_{f\in\gamma} u[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^m,$$

et $\theta(z)$ une fonction fuchsienne quelconque de dimension p; $\omega(z)\theta(z)$ est la somme de la série, normalement convergente sur tout compact, de terme général

$$u[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^m\theta(z)\equiv u[f(z)]\theta[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^{m+p},$$

donc de la série de Poincaré de dimension $m+p$ construite à partir de la fonction $u\theta$.

COROLLAIRE 10. — *Pour* $m\geqq \mathrm{M}$, *on a*

$$d(m)=am^2+b(r)m+c(r),$$

r étant le reste de la division de m par q, a ne dépendant que du groupe γ.

Les fonctions fuchsiennes de dimension m identiquement nulles sur ε forment (*cf.* n° 14, *a*) un espace vectoriel de dimension $d(m-k)$, donc

$$d_\varepsilon(m)=d(m)-d(m-k);$$

pour $m\geqq \mathrm{M}$, le théorème 10 donne

$$d_\varepsilon(m)=\lambda m+\rho(r),$$

d'où

$$d(m)-\frac{\lambda}{2k}m^2-\left[\frac{\lambda}{2}+\frac{\rho(r)}{k}\right]m=\text{const.}\quad\text{pour}\quad m\equiv l\pmod k;$$

la démonstration s'achève comme celle du théorème 9.

Remarque. — Inversement, le nombre a, attaché au groupe γ, détermine le coefficient $\lambda = 2ak$ du théorème 9, puis le nombre $p_1 = \lambda k_1 = 2akk_1$ défini au n° 14.

V. — Idéaux de fonctions fuchsiennes.

19. Nous adoptons ici une définition analogue à celle des idéaux de formes algébriques : un *idéal* de fonctions fuchsiennes contient, d'une part, avec deux fonctions fuchsiennes de même dimension, leur somme; d'autre part, avec une fonction fuchsienne, son produit par n'importe quelle fonction fuchsienne, en particulier par une constante.

THÉORÈME 12. — *Tout idéal de fonctions fuchsiennes a une base finie.*

Parmi les fonctions dont se compose un idéal $\mathfrak{I}$, celles qui ont une dimension donnée sont combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles; il suffit donc de montrer que, pour k fixe et $m_1 \geq M$, les fonctions de $\mathfrak{I}$ dont la dimension est de la forme $m_1 + nk$ (n entier ≥ 0) sont des combinaisons (où les multiplicateurs sont des fonctions fuchsiennes) d'un nombre fini d'entre elles.

Pour cela, reprenons les résultats du chapitre IV avec $k_1 = k$: n applications du théorème 11 montrent que la forme générale des fonctions fuchsiennes de dimension $m_1 + nk$ est $\sum_{i=1}^{d(m_1)} P_i(\alpha, \beta_1, \beta_2)\theta_i$, les θ_i formant une base des fonctions fuchsiennes de dimension m_1, les P_i étant des polynomes homogènes et de degré n à trois variables; les systèmes de polynomes P_i, de même degré, tels que la fonction fuchsienne $\sum_i P_i(\alpha, \beta_1, \beta_2)\theta_i$ appartienne à $\mathfrak{I}$ forment un module de formes algébriques, qui admet [9] une base finie formée des systèmes P^j ($1 \leq j \leq s$); de la relation

$$P_i \equiv \sum_{j=1}^{s} P_i^j Q_j,$$

où les Q_j sont s polynomes homogènes dont les degrés présentent entre eux des différences convenables, résulte

$$\sum_{i=1}^{d(m_1)} P_i(\alpha, \beta_1, \beta_2)\theta_i \equiv \sum_{j=1}^{s} Q_j(\alpha, \beta_1, \beta_2)\omega_j,$$

où

$$\omega_j \equiv \sum_{t=1}^{d(m_1)} P_t^j(\alpha, \beta_1, \beta_2)\,\theta_t$$

appartient à $\mathfrak{J}$.

20. Comme pour les idéaux de formes algébriques [9] et [11], nous appellerons *fonction caractéristique* de $\mathfrak{J}$ le nombre $\chi(m)$ des conditions linéaires imposées à une fonction fuchsienne de dimension m par son appartenance à $\mathfrak{J}$, ou encore la dimension de l'espace vectoriel quotient par $\mathfrak{J}$ de celui des fonctions fuchsiennes de dimension m; par exemple les fonctions fuchsiennes identiquement nulles sur une variété E, conservée par les automorphismes de γ, forment l'idéal de E, dont la fonction caractéristique est le nombre $d_E(m)$ défini au n° 9.

Théorème 13. — *La fonction caractéristique d'un idéal est, pour m assez grand, de la forme* $\chi(m) = \lambda(r)\,m + \rho(r)$, *r étant le reste de la division de m par q (sauf si l'idéal est réduit à* 0).

$d(m_1 + nk) - \chi(m_1 + nk)$ est la dimension du sous-espace des fonctions fuchsiennes de dimension $m_1 + nk$ appartenant à $\mathfrak{J}$; la démonstration du théorème 12 fait correspondre une telle fonction à chaque système de polynomes Q_j de degrés $n - p_j$ (p_j étant le degré des polynomes P_i^j); les systèmes de Q_j formant un espace vectoriel de dimension $\sum_{j=1}^{s} C_{n-p_j+2}^{2}$, reste à évaluer la dimension du sous-espace des systèmes auxquels correspond une fonction identiquement nulle : ceux-ci à leur tour forment un module,

$$Q_j \equiv \sum_{k=1}^{t} Q_j^k R_k,$$

et ainsi de suite, mais on sait [9] que la suite des systèmes dérivés du système d'équations linéaires (en R_k) $Q_j \equiv 0$ est limitée.

On trouve ainsi pour $\chi(m_1 + nk)$ un trinome en n, donc, comme expression de $\chi(m)$, un trinome en m valable pour m assez grand et $m \equiv l \pmod{k}$, puis, par le raisonnement déjà employé aux n^{os} 16 et 18, pour $m \equiv r \pmod{q}$:

$$\chi(m) = \varkappa(r)\,m^2 + \lambda(r)\,m + \rho(r).$$

Si l'idéal contient une fonction fuchsienne non identiquement nulle de dimension m_0, il contient aussi les produits de celle-ci par toutes les fonctions fuchsiennes de dimension m :

$$d(m + m_0) - \chi(m + m_0) \geq d(m),$$

d'où, avec l'aide du corollaire 10, $\varkappa(r) = 0$ quel que soit r.

Exemples. — 1° Si $\mathfrak{J}$ est l'idéal d'une variété E conservée par les automorphismes de γ et réduite à des points isolés, on a vu au n° 10 que

$$\chi(m) = d_E(m) = \rho(r).$$

2° Si E n'est pas réduite à des points isolés, on a vu au n° 10 que $\lambda(r) > 0$ au moins pour $r = 0$; si, de plus, une composante irréductible non ponctuelle de E n'a en commun avec Q que des points isolés, $\lambda(r) > 0$ quel que soit r.

3° Si E n'a pas de point isolé et si $E \cap Q$ n'a que des points isolés, λ ne dépend pas de r (*cf.* th. 9); ainsi l'expression de $d_\varepsilon(m)$ résultant du théorème 10 est aussi celle de $d_E(m)$ pour toute variété E conservée par les automorphismes de γ, sans points isolés, mais telle que $E \cap Q$ soit réduite à des points isolés :

$$d_E(m) = \lambda m + \rho(r),$$

λ et $\rho(r)$ dépendant de E.

21. Théorème 14. — *Pour un idéal $\mathfrak{J}$ de fonctions fuchsiennes, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. les fonctions de $\mathfrak{J}$ n'ont aucun zéro commun;
b. $\mathfrak{J}$ contient trois fonctions sans zéro commun;
c. $\chi(m) = 0$ pour m assez grand.

La propriété *c* signifie que $\mathfrak{J}$ contient toutes les fonctions fuchsiennes de dimension assez grande; *a* et *b* résultent alors des théorèmes 3 et 5.

Partons de *a* : à tout point z_1 de D on peut associer une fonction fuchsienne $\theta \in \mathfrak{J}$ telle que $\theta(z_1) \neq 0$; sa dimension est multiple de $q(z_1)$; en la multipliant par les fonctions fuchsiennes $\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}$ utilisées pour le corollaire 2 (n° 6), on constate que celui-ci subsiste si l'on considère seulement les fonctions fuchsiennes de $\mathfrak{J}$; de même le corollaire 1, donc aussi les théorèmes 3, 5 et 6 (avec un nombre μ dépendant de $\mathfrak{J}$) et leurs conséquences : ainsi les fonctions $\alpha(z)$, $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ du n° 14 peuvent être prises dans $\mathfrak{J}$; alors (th. 11) toute fonction fuchsienne de dimension assez grande appartient à $\mathfrak{J}$.

Corollaire 11. — *Le théorème 11 reste vrai pour trois fonctions fuchsiennes α, β_1, β_2 quelconques, pourvu qu'elles n'aient aucun zéro commun.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] O. Blumenthal, *Math. Ann.*, t. 58, 1904, p. 497.
[2] H. Cartan, *Math. Zeits.*, t. 35, 1932, p. 760.
[3] H. Cartan, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, t. 61, 1944, p. 149 (app. 2).
[4] H. Cartan, *Bull. Soc. math. France*, t. 78, 1950, p. 29 (§ 8).
[5] G. Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Paris, 1920 (nos 9 à 16).
[6] M. Hervé, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 462.
[7] M. Hervé, *C. R. Acad. Sc.*, t., 232, 1951, p. 673.
[8] M. Hervé, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 41.
[9] D. Hilbert, *Math. Ann.*, t. 36, 1890, p. 473.
[10] L. K. Hua, *Ann. of math.*, t. 47, 1946, p. 167.
[11] E. Lasker, *Math. Ann.*, t. 60, 1905, p. 20.
[12] H. Poincaré, *Acta Math.*, t. 1, 1882, p. 193 ou *Œuvres*, t. 2, p. 169 (§ 6).
[13] C. L. Siegel, *Analytic functions of several complex variables*, Princeton, 1950 (chap. 10 et 11).

SUR LES

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

DES

SURFACES D'ORDRE BORNÉ

ET PLUS PARTICULIÈREMENT

DE CELLES DU TROISIÈME ORDRE

PAR M. ANDRÉ MARCHAUD.

INTRODUCTION.

Un des traits les plus marquants de la *Géométrie finie*, appelée aussi Géométrie de l'ordre (Ordnungsgeometrie) est l'étonnante richesse de la notion d'ordre. L'ordre d'une surface, par exemple, est la borne supérieure du nombre de ses points d'intersection avec une sécante quelconque, non située toute entière sur elle. Dans les travaux de C. Juel et de ses successeurs les surfaces considérées sont définies d'une manière très générale, elles ne sont pas supposées être algébriques ou même analytiques, mais elles sont pourvues par hypothèse d'un plan tangent continu. Or il se trouve que dans certains cas l'existence et la continuité du plan tangent est une conséquence de la seule hypothèse relative à l'ordre. Ainsi, ayant pu définir, dans un travail antérieur (1), la surface générale du troisième ordre immédiatement à partir de la notion de continu plan d'ordre 3, j'ai montré que si elle était réglée (non conique) elle possédait nécessairement partout, sauf le long d'une directrice

(1) A. MARCHAUD, *Sur les Surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie* (*Journ. Math. p. et appl.*, t. 18, fasc. IV, 1939).

rectiligne et peut-être le long de deux génératrices limites un plan tangent continu. Ce résultat inattendu m'a incité à entreprendre l'étude systématique des propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné en réduisant les hypothèses au minimum. Dans l'exemple qui vient d'être rappelé j'avais déduit l'existence et la continuité du plan tangent en partie des propriétés globales de la surface et non pas uniquement de ses propriétés locales. Il m'a paru nécessaire de considérer seulement un morceau de surface, défini d'une manière aussi large que possible. L'élément étudié dans le présent Mémoire sera un morceau de surface (S) représentable en axes rectangulaires ou obliques par une équation

$$z = f(x, y) \qquad (S)$$

où la fonction $f(x, y)$ est définie et continue sur un disque convexe (¹) (C) du plan des xy. Il revient au même de dire que (S) se projette sur (C) d'une manière biunivoque et bicontinue parallèlement à une direction fixe.

Pour simplifier l'écriture nous dirons généralement : surface et non pas : morceau de surface car il ne pourra y avoir de confusion.

La seule hypothèse faite sur (S) sera celle relative à son *ordre*. Mais comme celle-ci peut contenir des segments rectilignes ou des facettes planes il sera nécessaire de généraliser la définition habituellement adoptée.

Je dirai que (S) est d'*ordre borné* si toute sécante ne possédant sur elle aucun segment la rencontre en un nombre borné de points; la borne supérieure de ce nombre sera l'*ordre* de (S). *L'ordre local* en un point se définit aisément.

Pour établir une relation entre l'ordre local en un point et le faisceau dérivé en ce point (ensemble des demi-tangentes) il a été nécessaire d'introduire la notion d'*ordre conique* d'un demi-cône simple (c'est-à-dire sans rayon multiple). Un demi-cône simple de sommet O est d'ordre conique borné si tout plan issu de O ne possédant sur lui aucun secteur plan le rencontre suivant un nombre borné de demi-droites; son *ordre conique* (nécessairement pair) est la borne supérieure de ce nombre. Un demi-cône simple d'ordre conique 2 est un plan, un dièdre où la frontière d'un vrai demi-cône convexe. On voit que l'ordre conique est différent de l'ordre du demi-cône.

Dans les trois premières parties du Mémoire après avoir rappelé les résultats d'un précédent travail sur le faisceau dérivé et le faisceau des tangentes (²) (paratingent de M. Georges Bouligand) en un point où celui-ci ne remplit pas tout l'espace (point *ordinaire*), j'étudie les arcs simples plans d'ordre borné et plus en détail ceux du troisième ordre, puis les demi-cônes simples d'ordre conique borné, me limitant chaque fois aux propriétés indispensables à notre objet. Le résultat général auquel on aboutit est le suivant :

(¹) On verra au n° 3 pourquoi (C) est supposé convexe.

(²) A. MARCHAUD, *Sur les propriétés différentielles du premier ordre des Surfaces simples de Jordan et quelques applications* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 63, fasc. 2].

1° L'ensemble des points ordinaires de (S) est ouvert et partout dense;

2° En un point intérieur ordinaire où l'ordre local est n le faisceau dérivé est un demi-cône simple dont l'ordre conique est au plus égal à $2n-2$ ou $2n$, suivant que n est pair ou impair; lorsque l'ordre conique est $2n$ tout plan passant par le point et coupant le faisceau dérivé exactement suivant $2n$ rayons donne pour intersection n couples de demi-tangentes opposées.

Pour $n=2$ on retrouve un résultat connu : le faisceau dérivé est un plan, un dièdre ou la frontière d'un vrai demi-cône convexe. Résultat incomplet car j'ai montré, dans le travail qui vient d'être cité (1) que si (S) est du second ordre, c'est une partie de la frontière d'un corps convexe ou bien un morceau de vraie *quadrique réglée*. Autrement dit : si (S) est du second ordre et non convexe elle est *algébrique*, du second degré et réglée.

La quatrième partie est consacrée au cas où (S) est du troisième ordre. D'après la théorie générale l'ordre conique du faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ en un point ordinaire M est 6, 4 ou 2. Je montre d'abord que le premier cas ne peut se produire que si (S) est un morceau de cône (lieu de droites) de sommet M.

Lorsque $\mathcal{D}(M)$ est d'ordre conique 4, il possède nécessairement deux couples au moins de rayons opposés; s'il y en a plus de deux ils sont dans un même plan, lequel contient deux secteurs opposés de $\mathcal{D}(M)$; enfin tous les couples de demi-tangentes opposées sont entièrement sur (S) (2). Dans chacun des cas on peut décrire avec précision les différents types de faisceau dérivé. Des exemples sont donnés dans la Note I où l'on trouvera la définition d'une surface (close) du troisième ordre, non analytique et contenant trois droites coplanaires.

Le cas où $\mathcal{D}(M)$ est un plan conduit à des résultats intéressants sur le faisceau des tangentes : $\mathcal{T}(M)$; la plupart seront utilisés dans la cinquième partie. En voici un, qui donnera une idée de ce que l'on peut déduire d'hypothèses paraissant peu riches à première vue :

Si en un point M intérieur à (S) les demi-tangentes en ce point à une section de (S) par un plan parallèle à Oz (verticale), sont opposées et parallèles à cette droite, le faisceau des tangentes en M est un plan vertical, à moins que (S) ne contienne une droite passant par M, dans ce dernier cas on peut seulement affirmer que le faisceau dérivé est un plan vertical.

La cinquième et dernière partie du Mémoire, la plus longue et la plus délicate, traite du cas où (S), toujours supposée du troisième ordre, *ne possède nulle part de plan d'appui local*. J'y démontre que la surface admet alors un *plan tangent continu* (faisceau des tangentes) sauf peut-être en des points isolés ne pouvant avoir de point d'accumulation que sur le bord.

Autrement dit : pour le troisième ordre la non-convexité (entendue au sens

(1) Nos 22 et 23.

(2) Pour simplifier les énoncés je dis qu'une droite est toute entière sur (S) si le segment de cette droite contenu dans le cylindre projetant (S) parallèlement à Oz est sur la surface.

de l'absence de plans d'appuis locaux) implique l'existence d'un plan tangent continu, sauf en de très rares points. D'une manière plus précise voici l'essentiel des résultats.

1° Tous les points intérieurs de (S), sauf peut-être 4 au plus, sont ordinaires;

2° En tout point intérieur ordinaire le faisceau des tangentes est un plan à moins que le faisceau dérivé ne soit un dièdre;

3° Si en un point intérieur M_i le faisceau dérivé est un dièdre, l'arête Δ_i de celui-ci est toute entière sur (S), une de ses faces est plan tangent (faisceau des tangentes) stationnaire tout le long de Δ_i sauf en M_i et traverse la surface, laquelle n'a dans ce plan que les points Δ_i. L'ensemble des points M_i ne peut avoir de point d'accumulation que sur le bord de (S).

Comme le faisceau des tangentes, lorsqu'il se réduit à un plan en un point et dans son voisinage est nécessairement continu, on a bien la propriété annoncée.

Les conditions imposées à la surface par l'existence d'*un seul* point où le faisceau dérivé est un dièdre sont telles qu'il est permis de supposer que le nombre des points M_i doit être borné, mais je n'ai pu le démontrer. D'ailleurs j'ai longtemps douté de leur existence jusqu'au jour où j'ai pu construire (après de nombreux essais infructueux) l'exemple que l'on trouvera en Note II à la fin du Mémoire.

I. — Faisceau des tangentes et faisceau dérivé. Points ordinaires.

1. Avant d'aborder les problèmes qui font l'objet du présent travail il sera utile de rappeler quelques définitions et résultats essentiels dont nous ferons constamment usage. Pour les démonstrations je renverrai à mon Mémoire sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications, qui dans les références sera désigné par la lettre M (1).

Soit M un point intérieur (c'est-à-dire non situé sur le bord) d'une surface simple de Jordan, image biunivoque et bicontinue d'un disque circulaire plan. Une *tangente* en M à la surface est par définition toute droite d'accumulation d'une série de sécantes $M'M''$ lorsque les points M' et M'' tendent vers M en restant sur la surface. Une *demi-tangente* en M est toute demi-droite d'accumulation de demi-sécantes MM' quand M' tend vers M en restant sur la surface. L'ensemble des tangentes en M est le *faisceau des tangentes* en ce point, on le désignera par $\mathfrak{T}(M)$; l'ensemble des demi-tangentes est le *faisceau dérivé*, il sera représenté par $\mathfrak{D}(M)$.

Les deux faisceaux $\mathfrak{T}(M)$ et $\mathfrak{D}(M)$ sont évidemment fermés et le premier

(1) *Ann. Éc. Norm.*, (3), 63, fasc. 2.

contient le second. Il résulte immédiatement de sa définition que si $\mathfrak{C}(M)$ se réduit à un plan en un point M et dans son voisinage ce plan varie d'une manière continue, plus généralement que si $\mathfrak{C}(M_0)$ est un plan, tout plan contenu dans $\mathfrak{C}(M)$ a pour limite $\mathfrak{C}(M_0)$ quand M tend vers M_0.

Une catégorie importante de points intérieurs est constituée par ceux où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace. Nous les appellerons *points ordinaires*. Les autres points intérieurs seront les *points de remplissage tangentiel* ou encore *non ordinaires*.

2. Avec ces définitions les propositions annoncées sont les suivantes.

Soit M un point ordinaire :

1° Il existe sur la surface un voisinage Σ_M de M, représentable en axes rectangulaires ou obliques $M\xi\eta\zeta$ par une équation

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta) \qquad (\Sigma_M)$$

où la fonction est définie et à nombres dérivés bornés dans un cercle $\xi^2 + \eta^2 \leqq r^2$. Cette propriété est une conséquence directe des définitions; $M\zeta$ est assujetti à la seule condition d'être *extérieur* à $\mathfrak{C}(M)$. On voit immédiatement que les points intérieurs de Σ_M sont ordinaires.

2° Le complémentaire de $\mathfrak{C}(M)$ est un système de deux demi-cônes convexes ouverts et symétriques sans rayons communs : $\theta(M)$ et $\theta'(M)$.

Il en résulte que $\mathfrak{C}(M)$ est un plan, un bidièdre (système de deux dièdres opposés par l'arête) ou bien l'ensemble des droites issues de M ne pénétrant pas à l'intérieur d'un vrai cône convexe : le *cône directeur des tangentes*, ensemble des frontières de $\theta(M)$ et $\theta'(M)$ qui en constituent les deux nappes [M, n^{os} 7 et 8] (1).

De la convexité du complémentaire de $\mathfrak{C}(M)$ on déduit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{C}(M)$ se réduise à un plan est qu'on puisse trouver deux plans distincts passant par M tels que chacun d'eux ne contienne qu'une seule tangente, celle-ci étant distincte de l'intersection des deux plans [M, n° 8].

3° Les tangentes situées dans un plan contenant une droite extérieure à $\mathfrak{C}(M)$ s'obtiennent en considérant seulement les sécantes $M'M''$ parallèles à ce plan [M, n° 6].

4° Les rayons de $\mathfrak{D}(M)$ situés dans un demi-plan ayant pour arête une droite extérieure à $\mathfrak{C}(M)$ sont les demi-tangentes en M à la section de Σ_M par ce demi-plan [M, n° 6]. Cette proposition avait été établie par M. Bouligand, par une méthode différente de celle que nous utilisons dans [M] (2).

---

(1) Cette propriété est fondamentale. Je l'ai signalée pour la première fois (et établie) dans une Note aux *Comptes rendus*, séance du 11 janvier 1937.

(2) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p, 168.

5° Dans tout demi-plan dont l'arête est extérieure à $\mathfrak{C}(M)$ la trace du faisceau dérivé se compose d'un angle dont les côtés décrivent deux demi-cônes simples, qui peuvent être confondus [M, n° 6] (un demi-cône simple de sommet M est l'ensemble des demi-droites joignant M aux points d'une courbe simple, c'est-à-dire fermée et sans point double, tracée sur une sphère centrée en M).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on puisse trouver un faisceau partout dense de demi-droites issues de M, dont chaque rayon coupe Σ_M suivant un ensemble dans lequel M est isolé [M, n° 10].

Pour les surfaces que nous considérerons dans le présent travail, *le faisceau dérivé en un point ordinaire sera toujours un demi-cône simple*. Nous supposerons cette hypothèse réalisée désormais. Les propositions énoncées ci-dessous seront des cas particuliers de celles auxquelles on renvoie le lecteur.

7° Si $\mathfrak{C}(M)$ est un bidièdre, $\mathcal{D}(M)$ se réduit à deux demi-plans symétriques ou non [M, n° 8].

8° Si $\mathcal{D}(M)$ possède deux rayons non opposés, l'un sur la frontière de $\theta(M)$ l'autre sur celle de $\theta'(M)$, l'angle formé par ces deux rayons appartient à $\mathcal{D}(M)$ [M, n° 9 *b*].

9° Si $\mathcal{D}(M)$ a quatre rayons (au moins) sur la frontière de $\theta(M)$ ou de $\theta'(M)$ il est, au sens large, d'un même côté d'un certain plan passant par M.

Lorsque trois quelconques de ces quatre rayons ne sont pas coplanaires cette dernière proposition est un cas particulier de celle qu'on trouvera en M [n° 9 *a*] laquelle affirme de plus que le plan contient au plus quatre demi-tangentes. Il suffira donc d'examiner l'hypothèse contraire. Remarquons tout d'abord que la question se pose seulement si le cône directeur des tangentes est un vrai cône. Soient alors MD, MD′, MD″ trois demi-tangentes coplanaires situées sur la même nappe. Supposons, ce qui est permis, MD intérieur à l'angle D′MD″. On peut trouver un plan Π coupant la nappe suivant une courbe convexe Γ. Soient D, D′, D″ les points où les trois demi-tangentes rencontrent Π, D est intérieur au segment D′D″ qui est nécessairement sur Π; celle-ci est d'un certain côté par rapport au plan D′MD″.

Je vais montrer que $\mathcal{D}(M)$ ne peut avoir de rayon MD_1 du côté opposé au sens strict, ce qui établira la proposition. Supposons donc MD_1 situé par rapport au plan D′MD″ du côté opposé à Γ. Le plan D_1MD pénètre à l'intérieur de Γ, donc du cône directeur des tangentes. Dans le plan D_1MD une droite issue de M. voisine de MD et rencontrant Π à l'intérieur de Γ laissera MD et MD_1 d'un même côté ce qui est impossible.

II. — Arcs simples et surfaces simples d'ordre borné.

3. On définit habituellement l'ordre d'une surface comme la borne supérieure (lorsqu'elle existe) du nombre de ses points d'intersection avec une droite

quelconque. Cette définition a l'inconvénient d'écarter les surfaces contenant des segments rectilignes ou des facettes planes. Nous allons la généraliser pour les surfaces telles que (S) représentables en axes rectangulaires ou obliques, par une équation

$$z = f(x, y), \qquad (S) \tag{1}$$

f étant définie et continue dans un domaine borné, fermé et convexe (C) du plan des xy.

On ne réduit évidemment pas la généralité en supposant le plan des xy perpendiculaire à l'axe des z. C'est ce que nous ferons en appelant (pour simplifier le langage) *vertical* tout plan ou droite parallèle à Oz.

Il revient au même de dire que (S) se projette sur (C) parallèlement à OZ d'une manière biunivoque et bicontinue.

La surface (S) sera dite d'*ordre borné* si toute sécante *ne possédant sur elle aucun segment rectiligne* la rencontre en un nombre borné de points; la borne supérieure du nombre de ces points sera *l'ordre* de (S).

Il faut remarquer que si (C) n'était pas convexe l'ordre d'une surface pourrait en quelque sorte dépendre artificiellement du bord, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons un triangle $M_1M_2M_3$ dont le plan n'est pas vertical, et une ligne brisée $M_1N_1N_2, \ldots, N_{p2+1}M_2$, dont les sommets N_{2i} $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sont sur le segment M_1M_2, les autres étant intérieurs au triangle. En retranchant de celui-ci les points intérieurs aux triangles $M_1N_1N_2$, $N_2N_3N_4$, $\ldots$, $N_{2p}N_{2p+1}M_2$, on obtient un morceau de plan dont l'ordre serait $p+2$ avec la définition précédente. Cet ordre pourrait même n'être pas borné si l'on prenait une infinité de points N.

La section de (S) par un plan vertical est un arc simple rencontré en un nombre borné de points par toute sécante de son plan *ne possédant sur l'arc aucun segment rectiligne*. Il sera nécessaire pour la suite d'étudier quelques propriétés de ces arcs. Comme le fait qu'ils ont un seul point sur toute verticale n'apportera aucune simplification dans les raisonnements nous négligerons cette hypothèse.

4. Arcs simples plans d'ordre borné. — Soit donc $\overset{\frown}{AB}$ un arc simple plan, image biunivoque et bicontinue d'un segment rectiligne $\alpha\beta$, rencontré en n points au plus par toute sécante ne possédant sur lui aucun segment rectiligne, l'une au moins le rencontrant exactement en n points. L'arc AB est par définition d'ordre n.

Il est immédiat que si $\overset{\frown}{AB}$ est d'ordre *un* c'est un segment de droite. Nous supposerons n supérieur à l'unité.

Remarquons tout d'abord que $\overset{\frown}{AB}$ possède au plus une infinité dénombrable de segments rectilignes, puisqu'à chacun d'eux correspond un segment de $\alpha\beta$.

Cette propriété sera constamment utilisée explicitement ou implicitement de la manière suivante : une sécante étant donnée on peut toujours mener une sécante voisine passant ou non par un de ses points et ne contenant aucun segment rectiligne de l'arc.

D'autre part $\widehat{AB}$ admet en chacun de ses points une demi-tangente unique pour chaque côté (avec la restriction évidente en A et B) comme dans le cas où l'on exclut les segments rectilignes. J'ai montré en effet que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc simple $\widehat{MM'}$ possède en M une demi-tangente unique est que l'on puisse trouver un ensemble de droites issues de M partout dense, sur chacune desquelles, M est point isolé pour l'intersection avec l'arc (1).

5. Nous allons étudier pour commencer la disposition de $\widehat{AB}$, supposé d'ordre n, par rapport à une droite donnée Δ.

Si un point M intérieur à $\widehat{AB}$ est isolé sur Δ, on peut trouver sur l'arc deux arcs partiels ayant pour extrémité commune M : $\widehat{A'M}$ et $\widehat{MB'}$, ne possédant chacun que le point M sur Δ ; on dit que M est une *traversée* ou *un retour* suivant que ces arcs sont d'un même côté ou de part et d'autre de Δ.

Ceci posé, considérons d'abord le cas où $\widehat{AB}$ n'a aucun segment rectiligne sur Δ. La section se compose alors de n points au plus. Supposons cette limite atteinte (ce qui a lieu par hypothèse pour une sécante au moins) et désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$, les n points. Les arcs successifs $\widehat{A_iA_{i+1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont chacun d'un même côté de Δ qui ne contient que les extrémités.

Je vais montrer qu'il existe des sécantes voisines de Δ coupant $\widehat{AB}$ en n points isolés distincts des extrémités A et B; il suffira pour cela d'établir que ces points sont intérieurs à $\widehat{A_1A_n}$.

Par un point I de Δ menons deux droites Δ_1 et Δ_2 faisant avec elle les angles $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut et choisi de telle manière que Δ_1 et Δ_2 ne portent aucun des segments éventuels de $\widehat{AB}$, ce qui est possible puisque ceux-ci forment un ensemble au plus dénombrable. Si I est distinct des extrémités d'un arc $\widehat{A_iB_{i+1}}$ et si Δ_1 et Δ_2 sont assez voisines de Δ la somme des points d'intersection de $\widehat{A_iB_{i+1}}$ avec Δ_1 et Δ_2 sera au moins égale à 2. Si I est confondu avec A_i par exemple la somme sera au moins égale à 3. Prenons I en A_1, comme le nombre des arcs est fini, nous pourrons choisir ε de manière que la somme $n_1 + n_2$ des nombres de points sur Δ_1 et Δ_2 soit au

(1) A. MARCHAUD, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'existence des demi-tangentes en un point d'un arc simple* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 56, juin 1932).

moins égale à $3+2(n-2)=2n-1$. Les nombres n_1 et n_2 sont d'autre part inférieurs ou égaux à n. Nous avons donc : $2n \geq n_1+n_2 > 2n-1$.

Ceci exige que l'un des nombres : n_1 et n_2, n_1 par exemple soit égal à n. Le point A_n n'est pas sur Δ_1. En reprenant le raisonnement sur Δ_1 en faisant jouer le rôle de A_1 au dernier point de $\widehat{AB}$ sur Δ_1 on obtiendra une sécante Δ'_1, coupant $\widehat{AB}$ exactement en n points intérieurs. Je dis qu'une telle sécante est traversée par l'arc en chacun des n points. La démonstration sera analogue à celle que j'ai donnée antérieurement de cette propriété dans le cas moins général où les segments sont exclus (1). On pourrait se contenter de l'invoquer en raison de la remarque faite au début du n° 4. Il m'a paru préférable d'employer un procédé un peu plus simple d'ailleurs, dont l'idée nous servira dans l'étude des demi-cônes simples d'ordre borné.

Soient donc $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les intersections de Δ avec $\widehat{AB}$ dont les extrémités sont en dehors de Δ. Les points A_i découpent dans $\widehat{AB}$ $n+1$ arcs. Chacun d'eux est d'un même côté de Δ qui contient seulement une extrémité s'il s'agit de $\widehat{AA_1}$ et $\widehat{A_nB}$ ou deux s'il s'agit des autres. Il faut montrer que le nombre des retours est nul. Appelons côté supérieur et côté inférieur les deux demi-plans limités par Δ. Les expressions : retour supérieur, retour inférieur s'entendent d'elles-mêmes; désignons par p_1 et p_2 leurs nombres respectifs, par t celui des traversées. On a

$$p_1+p_2+t=n.$$

En raisonnant comme plus haut on voit qu'une parallèle à Δ située au-dessus, voisine et convenablement choisie donnera au moins $t+2p_1 \leq n$ intersections.

De même une sécante convenablement choisie au-dessous donnera au moins $t+2p_2 \leq n$ intersections. Comme $t+p_1+p_2=n$, on a nécessairement $t+2p_1=n$, $t+2p_2=n$, d'où $p_1=p_2$.

Reste à montrer que ce nombre commun ne peut être que nul. Soit A_k le retour le plus à gauche sur Δ; on peut toujours supposer que c'est un retour supérieur. Le retour inférieur le plus à gauche : soit $A_{k'}$ est à droite de A_k. Une sécante menée par un point compris entre A_k et $A_{k'}$ assez voisine de Δ, laissant A_k au-dessous d'elle, et ne portant aucun segment rectiligne, donnera pour le retour A_k au moins deux points, pour chacun des retours inférieurs au moins deux points et un point au moins pour chaque traversée. Soit en tout $2+2p_2+t$ points au moins. Ce qui exige

$$2+2p_2+t \leq n.$$

Nous aboutissons à une contradiction. Il faut donc que p_1 et p_2 soient nuls.

(1) A. MARCHAUD, *Sur les Continus d'ordre borné* (*Acta Math.*, t. 55, n° 9).

6. Examinons maintenant le cas où la droite Δ porte au moins un segment rectiligne de $\overset{\frown}{AB}$. L'ensemble des points de $\overset{\frown}{AB}$ situés sur Δ est fermé; désignons par A' et B' ses bornes sur l'arc, A' étant la borne du côté de A. Si A' est distinct de A, l'arc partiel $\overset{\frown}{AA'}$ n'a sur Δ que A', la même remarque vaut pour B'. Si l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ de $\overset{\frown}{AB}$ n'a pas de point extérieur à Δ il se réduit au segment $A'B'$ seul arc simple joignant A' à B' sur Δ. Dans le cas contraire il existe un point M_1 de $\overset{\frown}{A'B'}$ extérieur à Δ. Désignons par A'_1 la borne du côté de A' des arcs $\overset{\frown}{MM_1}$ de $\overset{\frown}{A'B'}$ (M entre A' et M_1) n'ayant aucun point sur Δ. Le point A'_1 est sur Δ, et peut être confondu avec A'. De la même manière on détermine un arc $\overset{\frown}{M_1B'_1}$ de $\overset{\frown}{A'B'}$, n'ayant sur Δ que B'_1 qui peut être confondu avec B'. On a ainsi un arc $\overset{\frown}{A'_1B'_1}$ n'ayant que ses extrémités sur Δ et situé tout entier d'un même côté de cette droite. Les points A'_1 et B'_1 ne peuvent être à la fois le premier en A' le second en B', car l'intersection de AB par Δ ne comporterait aucun segment. Si $A'B'$ possède *en dehors de* $\overset{\frown}{A'_1B'_1}$ des points extérieurs à Δ on déterminera un nouvel arc partiel $\overset{\frown}{A'_2B'_2}$ analogue de $\overset{\frown}{A'_1B'_1}$, etc. Je dis qu'au bout d'un nombre limité d'opérations on aura épuisé $A'B'$. En effet si q arcs sont d'un même côté de Δ, une sécante, parallèle assez voisine, située du côté en question et choisie de manière à ne porter aucun segment de $\overset{\frown}{A'B'}$ donnera au moins $2q$ intersections et ce nombre ne peut surpasser n. Soit donc r le nombre total des arcs; nous pouvons toujours supposer que les arcs $\overset{\frown}{A'_1B'_1}$, $\overset{\frown}{A'_2B'_2}$, ..., $\overset{\frown}{A'_rB'_r}$ se rangent dans cet ordre sur $\overset{\frown}{A'B'}$.

L'ensemble des points de $\overset{\frown}{A'B'}$ situés sur Δ sont les $r+1$ éléments : $A'A'_1$, $B'_1A'_2$, ..., B'_rB', segments ou points quand les extrémités sont confondues. L'un d'eux au moins est un segment (par hypothèse). Soit I un point intérieur à ce segment. Menons par I deux sécantes Δ_1 et Δ_2 voisines de Δ et choisies comme au numéro précédent. Soit encore n_1 et n_2 les nombres respectifs des points d'intersection de $\overset{\frown}{A'B'}$ par Δ_1 et Δ_2. Dans la somme n_1+n_2 chaque arc donne au moins deux points. Nous avons donc : $n_1+n_2 \geqq 2+2r$.

Comme n_1+n_2 est au plus égal à $2n$, on en déduit $r+1 \leqq n$.

Autrement dit :

Si Δ porte un segment de $\overset{\frown}{AB}$, l'intersection de la sécante avec l'arc se compose au plus de n éléments segments ou points.

Lorsque la limite est atteinte le raisonnement précédent montre que A et B sont nécessairement sur Δ. En effet, dans le cas contraire la somme des intersections avec $\overset{\frown}{AB}$ de Δ_1 et Δ_2 convenablement choisies serait au moins $2n+1$, ce qui est impossible.

Les résultats obtenus dans les deux derniers numéros peuvent être rassemblés dans la proposition suivante.

1° *Un arc simple d'ordre n est rencontré par une droite quelconque de son plan suivant des points isolés ou des segments en nombre au plus égal à n ;*

2° *Si une sécante ne renfermant aucune des extrémités, contient n éléments distincts de l'arc, ce sont des points isolés et l'arc traverse la sécante en chacun d'eux* (1)*; il existe toujours de telles sécantes;*

3° *Toute sécante ne contenant aucune extrémité et possédant plus de n points sur l'arc, la rencontre suivant n — 1 éléments au plus dont un segment.*

6 *bis.* Pour terminer ces généralités je donnerai une proposition importante pour la suite. Soit $\widehat{AB}$ un arc d'ordre n et Δ une sécante. Considérons un arc partiel $\widehat{M'M''}$ de $\widehat{AB}$ ayant ses extrémités de part et d'autre de Δ au sens strict. Il existe sur $\widehat{M'M''}$ deux points M'_0 et M''_0 situés sur Δ et pouvant être confondus, tels que $\widehat{M'M'_0}$ et $\widehat{M''_0M''}$ n'aient sur Δ que les extrémités M'_0 et M''_0. On voit immédiatement que si M'_0 et M''_0 sont distincts, une sécante joignant un point I intérieur au segment $M'_0M''_0$ à un point de $\widehat{M'M'_0}$ voisin de M′ et choisie de manière à ne porter aucun des segments éventuels de AB, coupera $M'M''$ suivant trois éléments au moins, si elle est assez voisine de Δ. Ceci posé supposons qu'il existe, sur $\widehat{AB}$, $n-1$ arcs partiels $\widehat{M'_iM''_i}$ tous extérieurs les uns aux autres et tels que pour chacun d'eux les extrémités soient de part et d'autre de Δ. Il résulte immédiatement de ce qui précède que chaque arc $\widehat{M'_iM''_i}$ rencontre Δ en un *point unique* M_i *qui est une traversée*. En effet, dans le cas contraire une sécante convenable couperait Δ suivant $(n-2)+3$ éléments distincts; ce qui est impossible.

On peut toujours choisir les notations de manière que les points M'_i, M_i, M''_i se rangent sur $\widehat{AB}$ dans l'ordre

$$A,\ M'_1,\ M_1,\ M''_1,\ M'_2,\ M_2,\ M''_2,\ \ldots,\ M'_{n-1},\ M_{n-1},\ M''_{n-1},\ B.$$

Si deux points M''_i, M'_{i+1} sont de part et d'autre de Δ l'arc $\widehat{M''_iM'_{i+1}}$ contient un point et un seul sur Δ qui est une traversée. $\widehat{AB}$ traverse alors Δ en n points distincts des extrémités et l'intersection ne peut rien comporter d'autre, sans

(1) La restriction relative aux extrémités est indispensable, comme le montre l'exemple suivant. A l'intérieur d'un segment AB prenons trois points : $A'B_1B'$. L'arc constitué par les segments AA', B_1B' et par deux demi-cercles de diamètres $A'B'$ et B_1B, situés de part et d'autre de AB est du troisième ordre et il a sur le support de AB trois éléments : deux segments et un point. Le même exemple montre le caractère indispensable de la même restriction pour le 3°.

quoi on aurait plus de n éléments distincts. Lorsque A et M'_1 ou bien M''_{n-1} et B sont de part et d'autre de Δ, la conclusion est la même. Si A et M'_1 sont d'un même côté de Δ l'arc partiel $\overset{\frown}{AM'_1}$ ne peut avoir de point sur Δ, car une sécante parallèle et voisine couperait $\overset{\frown}{AB}$ suivant au moins $2+(n-1)=n+1$ éléments distincts. Même chose pour M''_{n-1} et B. Il reste à examiner le cas où A par exemple est sur Δ. Si la section comporte un second point M sur l'arc $\overset{\frown}{AM'_1}$, coupons par une sécante joignant A à un point N intérieur au segment MM''_1. On voit immédiatement qu'en choisissant N assez voisin de M la sécante coupera suivant au moins $n+1$ éléments distincts ce qui est impossible. L'arc $\overset{\frown}{AM'_1}$ n'a donc sur Δ que le point A. Ceci faisant, avec les $n-1$ points M_i, n éléments distincts l'arc $\overset{\frown}{M''_{n+1}B}$ ne peut avoir de point sur Δ.

En définitive nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Soient $\overset{\frown}{AB}$ *un arc simple d'ordre n et* Δ *une sécante, si l'on peut trouver sur l'arc* $n-1$ *arcs partiels* $\overset{\frown}{M'_i M''_i}$ *extérieurs les uns aux autres, chacun d'eux ayant (au sens strict) ses extrémités de part et d'autre de* Δ, *il existe à l'intérieur de chaque arc* $M'_i M''_i$ *et un point* M_i *et un seul situé sur* Δ, *ce point étant une traversée; dans le cas où les* $n-1$ *points* M_i *n'épuisent pas l'intersection de l'arc par* Δ, *celle-ci comprend un seul point supplémentaire qui est une traversée ou une extrémité.*

7. Avant de passer à l'étude des surfaces d'ordre borné examinons les cas particuliers $n=2$ et 3. Soit d'abord $\overset{\frown}{AB}$ un arc d'ordre 2. Il existe necessairement sur le segment AB un point O n'appartenant pas à l'arc. Considérons le domaine balayé par le segment OM lorsque M parcourt $\overset{\frown}{AB}$, ce domaine (C) est évidemment fermé. Je dis qu'il est convexe. Soient N_1 et N_2 deux points de (C), il s'agit de montrer que le segment N_1N_2 en fait partie. (C) étant fermé on peut supposer que N_1 et N_2 ne sont pas sur le support de AB. Les points N_1 et N_1 appartiennent respectivement à des segments OM_1 et OM_2 (positions de OM), M_1 et M_2 sont distincts de A et B. Si M_1 et M_2 sont confondus la question ne se pose pas. Dans le cas contraire considérons la sécante M_1M_2. Si elle contient un segment de $\overset{\frown}{AB}$, ce segment est l'élément unique de l'intersection [n° 6, 3°]; sinon l'arc $\overset{\frown}{AB}$ traverse la droite M_1M_2 en M_1 et M_2. L'arc partiel $\overset{\frown}{M_1M_2}$ est donc, par rapport à M_1M_2, du côté opposé à celui où se trouvent A et B. Dans les deux circonstances le triangle OM_1M_2 fait partie de (C), donc le segment N_1N_2.

En résumé : tout arc simple du second ordre est un arc de la frontière d'un domaine convexe. La réciproque est évidente.

Les considérations précédentes montrent également que toute courbe simple fermée du second ordre est la frontière d'un domaine convexe.

8. Considérons maintenant les arcs d'ordre 3. Je vais donner pour ces arcs quelques propositions qui nous seront indispensables pour l'étude différentielle des surfaces du troisième ordre.

I. *Tout arc simple d'ordre* 3 *est formé au plus de quatre arcs du second ordre placés bout à bout.*

Cette propriété est l'extension aux arcs d'ordre 3 au sens général où nous les considérons ici d'un résultat de mon Mémoire cité plus haut [n° 5] *sur les Continus d'ordre borné*. Les arcs que je considérais alors ne contenaient aucun segment rectiligne. Mais la démonstration donnée aux n^{os} 17 et 18 du Mémoire en question s'applique ici sans changement, car elle s'appuie uniquement sur les faits suivants, valables on l'a vu pour les arcs du troisième ordre au sens général adopté dans le présent Mémoire : un arc d'ordre 3 contient à son intérieur un arc partiel du même ordre; toute sécante contenant trois points de l'arc dont aucun n'est extrémité est traversée par l'arc en chacun d'eux [n° 6].

Les propositions suivantes sont relatives aux arcs du troisième ordre se projetant parallèlement à une direction fixe d'une manière biunivoque sur un segment de droite. Elles seraient d'ailleurs fausses sans cette hypothèse, qui sera toujours réalisée dans les applications que nous ferons.

II. *Si une sécante donne un retour sur un arc simple du troisième ordre se projetant sur elle d'une manière biunivoque parallèlement à une direction fixe, elle contient au plus un second point de l'arc qui est une traversée ou une extrémité.*

Soient $\overset{\frown}{AB}$ l'arc, Δ la sécante, M le retour. Il existe deux arcs partiels $\overset{\frown}{A'M}$ $\left(\text{sur } \overset{\frown}{AM}\right)$ et $\overset{\frown}{MB'}$ $\left(\text{sur } \overset{\frown}{MB}\right)$ situés d'un même côté de Δ au sens strict. Ils sont de part et d'autre d'une droite ML, direction selon laquelle $\overset{\frown}{AB}$ se projette biunivoquement sur Δ. Supposons que $\overset{\frown}{B'B}$ par exemple ait un point M′ sur Δ, il sera par rapport à ML du côté de $\overset{\frown}{AB'}$. Considérons alors une sécante Δ' issue de M′ et traversant les segments MA′ et MB′ à leur intérieur. Les conclusions du n° 6 *bis* (dans le cas $n = 3$), permettent d'affirmer que si M′ est distinct de B c'est une traversée pour Δ'. On en déduit que $\overset{\frown}{B'M'}$ et $\overset{\frown}{M'B}$ sont dans deux angles opposés de sommet M′, ne contenant pas Δ et définis par Δ' et la parallèle à ML menée par M′. Ce point est donc une traversée pour Δ. $\overset{\frown}{AB}$ ne peut avoir d'autres points sur Δ car il lui faudrait traverser une quatrième fois Δ' (1).

(1) L'exemple suivant montre que la proposition est fausse dans le cas général. Soient $\overset{\frown}{MM'}$ un demi-cercle de centre M″, AM un segment situé du côté de $\overset{\frown}{MM'}$ par rapport à la droite Δ portant MM′ et sans point commun avec le demi-cercle, M″B un segment situé par rapport à Δ du côté opposé à AM. L'arc simple constitué par le segment AM, le demi-cercle $\overset{\frown}{MM'}$, les segments M′M″ et M″B est du troisième ordre et possède le retour M par rapport à Δ.

III. *Soit* $\overset{\frown}{AB}$ *un arc simple du troisième ordre se projetant d'une manière biunivoque sur une sécante* Δ *contenant* A *mais pas* B; *si* Δ *contient un segment rectiligne* AA_1 *de l'arc et en plus deux points* A_2 *et* A_3 *dans cet ordre sur l'arc (et par suite sur* Δ*) le segment* A_1A_2 *fait partie de l'arc.*

Soit N un point de $\overset{\frown}{A_1A_2}$ situé hors de Δ. S'il est du côté de B par rapport à Δ (au sens strict) on pourra trouver une sécante traversant les segments AA_1, A_1N, NA_2 et A_3B car les points A, A_1, A_2, A_3 sont dans cet ordre sur Δ; s'il est du côté opposé on pourra mener une sécante traversant les segments A_1N, NA_2, A_2A_3 et A_3B pour la même raison. Dans les deux cas la sécante donne pour intersection quatre éléments au moins. Il faut donc bien que A_1A_2 soit sur l'arc (1).

IV. *Si un arc simple* $\overset{\frown}{AB}$ *du troisième ordre se projetant sur sa corde, parallèlement à une direction fixe d'une manière biunivoque, la rencontre en deux points distincts* A_1 *et* B_2 (*dans cet ordre*) *l'un des segments* AA_1 *ou* B_1B *au moins est sur l'arc.*

Supposant que B_1B par exemple n'est pas sur l'arc on verra en raisonnant comme plus haut que AA_1 s'y trouve forcément.

V. *Un arc simple* $\overset{\frown}{AB}$ *du troisième ordre se projetant sur sa corde parallèlement à une direction fixe d'une manière biunivoque et possédant sur celle-ci deux segments* AA' *et* $B'B$ *se compose de deux segments* AA_1 *et* B_1B *reliés : ou bien par un seul arc n'ayant que ses extrémités ou bien par deux arcs* $\overset{\frown}{A_1C}$ *et* $\overset{\frown}{CB_1}$ *situés de part et d'autre de la corde, avec laquelle ils n'ont en commun que leurs extrémités.*

Le nombre des éléments distincts de l'intersection de $\overset{\frown}{AB}$ avec la droite AB est deux ou trois (n° 6). Supposons-le d'abord égal à deux. L'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ a tous ses points d'un même côté de AB au sens large. En raisonnant comme au n° 6 on prélèvera sur lui un arc $\overset{\frown}{A_1B_1}$ n'ayant sur AB que ses extrémités, et cet arc épuisera les points de $\overset{\frown}{A'B'}$ extérieurs à AB. Les points A, A', A_1, B_1, B', B sont dans cet ordre sur l'arc et sa corde. Si A' et A_1 ne sont pas confondus, $\overset{\frown}{A'A_1}$ se

(1) Comme la précédente cette proposition est fausse dans le cas général. Soit en effet $\overset{\frown}{AB}$un arc du troisième ordre défini de la manière suivante.

Sur une droite Δ prenons quatre points A_1, A, A_3, A_2 dans cet ordre, et prenons pour arc $\overset{\frown}{AB}$ la somme du segment AA_1 d'un demi-cercle de diamètre A_1A_2, du segment A_2A_3 et d'un segment A_3B situé par rapport à Δ du côté du demi-cercle sans le rencontrer. L'arc $\overset{\frown}{AB}$ satisfait aux conditions de l'énoncé sans que A_1A_2 soit sur Δ.

réduit au segment $A'A_1$ seul arc simple joignant A' et A_1 sur AB. Même chose pour $\widehat{B_1B'}$. L'arc $\widehat{AB}$ se compose de deux segments AA_1 et B_1B reliés par un arc $\widehat{A_1B_1}$ n'ayant que ses extrémités sur AB.

Considérons maintenant le cas où l'arc possède un troisième élément sur AB soit CC', C' pouvant être confondu avec C. Cet élément est intérieur au segment A'B'. Si C' est différent de C nous choisirons les notations de manière qu'il soit entre C et B'. L'arc partiel $\widehat{A'C}$ de $\widehat{AB}$ ne peut avoir de points de part et d'autre de AB (au sens strict). On épuisera donc les points extérieurs à AB au moyen d'un arc $\widehat{A_1C_1}$. De même on épuisera les points de $\widehat{C'B'}$ extérieurs à AB au moyen d'un arc $\widehat{C_1'B_1}$, et l'on voit immédiatement que $\widehat{AB}$ se compose ainsi : segment AA_1, arc $\widehat{A_1C_1}$, (segment C_1C_1' pouvant se réduire à un point), arc $\widehat{C_1'B_1}$, segment B_1B. Les deux arcs ne peuvent être d'un même côté de AB; ils doivent donc être de part et d'autre. Ceci qui exige que C et C' soient confondus, autrement une sécante convenable couperait suivant quatre éléments (1).

9. Ordre local. — Revenons aux surfaces d'ordre borné. Soit (S) la surface d'ordre n définie au n° 3. D'après ce qui précède la section de (S) par une sécante quelconque se compose de n éléments distincts au plus (points isolés, ou segments). Il en résulte immédiatement que si (C_1) est un domaine convexe contenu dans (C) le morceau (S_1) de (S) correspondant à (C_1) est d'ordre n au plus. Ceci n'était pas évident car on ne pouvait affirmer *a priori* qu'une sécante ne possédant aucun segment sur (S_1) n'en avait pas sur (S) à l'extérieur de (S_1), ce qui aurait été nécessaire pour prouver — immédiatement à partir de la définition de l'ordre — que (S_1) est d'ordre au plus égal à celui de (S).

La remarque précédente conduit aisément à la notion d'ordre local. Soit M un point intérieur de (S). Donnons-nous dans le plan $z=0$, une suite de domaines convexes (C_r), $(r=1, 2, \ldots)$ chacun d'eux contenant le suivant et la projection de M à son intérieur, le diamètre de (C_r) tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Ces domaines définissent des morceaux (S_r) dont les ordres ne vont pas en croissant. Comme ils sont bornés inférieurement par l'unité ils sont constants à partir d'une certaine valeur de r. On voit immédiatement que cette constante est indépendante de la suite (C_r); c'est par définition *l'ordre local* en M.

---

(1) L'arc $\widehat{AB}$ construit de la manière suivante va nous montrer que les propositions IV et V seraient fausses dans le cas général. Sur une droite Δ prenons 6 points A, A_1, A_3, A_2, B_1, B (dans cet ordre) et considérons les demi-cercles $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_3B_1}$ situés de part et d'autre de Δ. L'arc constitué par le segment AA_1, l'arc $\widehat{A_1A_2}$, le segment A_2A_3, l'arc $\widehat{A_3B_1}$ et le segment B_1B est du troisième ordre. Pour la proposition IV il suffit de l'arrêter en un point intérieur de A_3B_1; pour la proposition V il faut le prendre en entier.

Les considérations précédentes s'appliquent en tout point *ordinaire* M d'une surface simple de Jordan, pourvu qu'un voisinage Σ_M, suffisamment petit soit d'ordre borné.

Enfin il est bien évident que si les propriétés du faisceau dérivé dépendent de l'ordre, elles ne dépendront que de l'ordre local. C'est bien ce que nous verrons, mais auparavant il sera utile d'établir quelques propriétés générales des surfaces d'ordre borné.

10. Soit donc (S) d'ordre n défini au n° 3. Considérons sur (S) deux points M_1 et M_2. Ils ne peuvent être sur la même verticale et définissent par conséquent un plan vertical unique. Celui-ci coupe (S) suivant *un* arc simple puisque (C) est convexe, je désignerai par $\overset{\frown}{M_1M_2}$ l'arc partiel de cette section ayant pour extrémités M_1 et M_2.

Remarquons encore que (S) définit dans le cylindre plein vertical de base (C) deux régions que nous appellerons : région *supérieure* (au-dessus), région *inférieure* (au-dessous). Soit N un point du cylindre et M l'intersection avec (S) de la verticale de N. Ce dernier est dans la région supérieure ou inférieure suivant que la mesure de $\overrightarrow{MN}$ (sur Oz) est positive ou négative. Soient alors N′ et N″ les extrémités d'un segment non vertical situées dans des régions différentes, M′ et M″ les points où les verticales respectives de N′ et N″ rencontrent (S). L'arc $\overset{\frown}{M'M''}$ de la section de (S) par le plan vertical de N′N″ a ses extrémités de part et d'autre de la droite N′N″. Ceci posé considérons une sécante Δ pénétrant à *l'intérieur* du cylindre projetant verticalement (S) et supposons qu'il existe sur Δ, $n-1$ segments extérieurs les uns aux autres $N_i'N_i''$ chacun d'eux ayant ses extrémités dans des régions différentes. On peut toujours supposer que tous les points N_i', N_i'' se projettent verticalement à l'intérieur de (S) Menons par chacun de ces points un plan vertical parallèle à un plan fixe non parallèle à Δ; on pourra trouver dans chacun de ces plans un petit disque circulaire centré sur le point et situé par rapport à (S) dans la même région que ce point. Soit alors $\overline{\Delta}$ une sécante rencontrant les $2(n-1)$ disques à l'intérieur, ce qui aura lieu si $\overline{\Delta}$ est assez voisine de Δ. Désignons par $\overline{N}_i'$ et $\overline{N}_i''$ les points de $\overline{\Delta}$ situés sur les disques de centres respectifs N_i' et N_i'' et par $\overline{M}_i'$ et $\overline{M}_i''$ les intersections des verticales de N_i' et N_i'' avec (S). La proposition du n° 6 *bis* permet d'affirmer que chacun des segments $N_i'\overline{N}_i''$ contient un point et un seul de (S), de même pour chaque segment $N_i'N_i''$. Soit M_i le point situé entre N_i' et N_i''. On voit immédiatement que Δ ne peut être une tangente en M_i. En effet s'il en était autrement il existerait des cordes de (S) voisines de Δ et joignant deux points distincts voisins de M_i, ce qui serait contradictoire avec ce qui précède. Comme M_i est intérieur à (S) c'est un point ordinaire.

Rappelons encore que si Δ contient un point M en dehors des $n-1$ points M_i,

ce point est traversée ou extrémité pour la section de (S) par le plan vertical de Δ (n° 6 *bis*). Dans le premier cas on pourra trouver n segments tel que $N'_i N''_i$ l'un d'eux correspondant à M qui lui aussi est ordinaire. Comme enfin il est équivalent de dire :

On peut trouver, sur Δ, $n-1$ segments extérieurs les uns aux autres tels que chacun d'eux ait ses extrémités dans deux régions différentes (supérieure et inférieure) ou bien : il existe sur la section de (S) par le plan vertical de Δ, $n-1$ arcs extérieurs les uns aux autres, chacun d'eux ayant ses extrémités de part et d'autre de Δ, nous pouvons énoncer la proposition suivante dont nous ferons un usage constant, notamment pour l'étude des propriétés différentielles des surfaces du troisième ordre.

Soit M *un point intérieur de* (S), *s'il existe une sécante* Δ *issue de* M *telle qu'on puisse trouver sur la section de la surface par le plan vertical de* Δ, $n-1$ *arcs extérieurs les uns aux autres et traversant* Δ, *le point* M, *appartenant ou non à l'un de ces arcs, est ordinaire et* Δ *est extérieure au faisceau des tangentes en* M.

11. Les considérations précédentes vont nous conduire encore à deux résultats importants. Le premier est relatif aux sections verticales d'ordre égal à celui de la surface. (S) étant supposée d'ordre n, il existe un plan Q au moins, coupant (S) suivant un arc d'ordre n, et par suite dans Q une sécante Δ traversée n fois par la section (n° 6). On pourra par suite trouver, sur Δ, $n+1$ points N_i ($i=1, 2, \ldots, n+1$) placés dans l'ordre des indices et tels qu'en passant de l'un à l'autre on change de région par rapport à (S). On considérera encore pour chaque N_i un disque circulaire centré en N_i, situé dans le plan vertical perpendiculaire à Q et assez petit pour que tous les points appartenant au cylindre projetant verticalement (S) soient dans la même région. Il pourrait arriver en effet que le plan Q touche ce cylindre le long d'une bande limitée par deux génératrices parallèles, ce qui a lieu si la trace de Q sur le plan $z=0$ contient un segment de la frontière du domaine convexe (C). Dans ce cas on aura $n+1$ demi-disques. On peut toujours réduire les disques de manière à leur donner le même rayon. Il est alors immédiat que tout plan suffisamment voisin de Q coupera (S) suivant un arc d'ordre n, car il sera possible de trouver dans un tel plan une sécante rencontrant les $n+1$ disques ou les $n+1$ demi-disques, sécante donnant au moins n intersections, donc exactement n.

Ceci permet d'affirmer que si (S) est d'ordre n ;

1° *Il existe des plans verticaux contenant des points intérieurs de la surface et la coupant suivant des arcs d'ordre n exactement;*

2° *Si un plan* Q *donne une section d'ordre n, tout plan suffisamment voisin coupera également suivant un arc d'ordre n.*

Une conséquence de cette dernière proposition est que pour évaluer l'ordre

d'une surface (S) d'ordre borné on peut ne pas considérer un ensemble dénombrable de plans.

Le second résultat annoncé concerne l'ensemble des points ordinaires de (S). D'après la définition même du point ordinaire, cet ensemble, sur (S), ne comprend que des points intérieurs. Je dis qu'il est partout dense. Soit, en effet, M_0 un point intérieur de (S) où celle-ci est localement d'ordre $n_0 \leq n$. Le point M_0 est intérieur à un morceau (S_0) de (S) se projetant verticalement sur $z = 0$ suivant un contour convexe. D'après ce qui précède une sécante traversera (S_0) en des points tous ordinaires. Ce qui justifie l'affirmation. Ainsi :

L'ensemble des points ordinaires de (S) *se projette verticalement sur le plan* $z = 0$ *suivant un ensemble ouvert partout dense.*

III. — Demi-cônes simples d'ordre conique borné. Faisceau dérivé en un point ordinaire d'une surface d'ordre localement borné.

12. Soit M un point ordinaire d'une surface simple de Jordan localement d'ordre n en M. Considérons un voisinage Σ_M de la surface, assez petit pour être d'ordre n. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ est un demi-cône simple ayant un rayon et un seul dans tout demi-plan d'arête $M\zeta$ (n° 2). Il paraît probable que la section de $\mathcal{D}(M)$ par tout plan contenant M doive se réduire à un nombre borné d'éléments distincts : rayons isolés ou secteurs plans. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi. Considérons d'abord deux demi-plans fixes Q_1 et Q_2, non opposés, d'arête $M\zeta$. Il n'y a aucun inconvénient à appeler verticale la direction de $M\zeta$, pendant tout le temps que nous raisonnerons sur Σ_M. Désignons par Π un plan vertical rencontrant Q_1 et Q_2 et par Π_λ l'homothétique de Π par rapport à M dans le rapport λ compris entre 0 et 1. La partie du faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ appartenant au dièdre $(M\zeta, Q_1, Q_2)$ découpe sur Π un arc simple $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ (M_1 dans Q_1, M_2 dans Q_2) ; je dis que cet arc est d'ordre n au plus.

Pour le montrer considérons l'arc partiel de la section de (S) par Π_λ situé dans le dièdre $(M\zeta, Q_1 Q_2)$ et sa perspective sur Π vu de M, soit $\overset{\frown}{M_{1,\lambda} M_{2,\lambda}}$ ($M_{1,\lambda}$ étant dans Q_1). Sur chaque verticale de Π, dans le dièdre, $\overset{\frown}{M_{1,\lambda} M_{2,\lambda}}$ tend vers $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ (1), puisque les rayons de $\mathcal{D}(M)$ sont les demi-tangentes en M aux sections par les demi-plans d'arête $M\zeta$ (n° 2).

Il s'agit d'établir que la section de $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ par une droite quelconque Δ (de son plan) comporte n éléments au plus. La question se pose seulement si Δ n'est pas verticale et contient des points de l'arc. L'intersection de Δ et de $\overset{\frown}{M_1 M_2}$

(1) La limite est atteinte uniformément, mais cela n'apporte aucune simplification pour la démonstration.

est un ensemble fermé, soient M'_1 et M'_2 ses bornes, M'_1 du côté de M_1 (sur Δ et sur $\overset{\frown}{M_1M_2}$, car ici l'arc et sa projection verticale sur Δ se correspondent d'une manière bi-univoque).

En raisonnant comme au n° 6 on déterminera sur $\overset{\frown}{M'_1M'_2}$ une suite d'arcs partiels, chacun d'eux n'ayant que ses extrémités sur Δ. Supposons qu'il en existe un nombre p d'un même côté. Une sécante Δ parallèle à Δ suffisamment voisine et située de ce côté donnera $2p$ traversées, c'est-à-dire $2p$ couples de points N'_i, N situés sur $\overset{\frown}{M'_1M'_2}$ de part et d'autre de Δ. Désignons par $N'_{i,\lambda}$, $N'_{i,\lambda}$ les points de $\overset{\frown}{M_{1,\lambda}M_{2,\lambda}}$ qui sont respectivement sur les verticales de N'_i et N''_i. D'après la remarque précédente ils tendent respectivement vers N'_i et N''_i lorsque λ tend vers zéro. Comme ils sont en nombre fini on pourra choisir λ assez petit pour que $\overset{\frown}{M_{1,\lambda}M_{2,\lambda}}$ traverse Δ au moins $2p$ fois, ce qui exige $2p \leq n$ L'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ est donc d'ordre borné, soit K son ordre. Il existe une sécante traversée K fois par lui (n° 6). Le raisonnement précédent montre que si λ est assez petit, ladite sécante sera traversée au moins K fois par $\overset{\frown}{M_{1,\lambda}M_{2,\lambda}}$. On a donc $K \leq n$.

En résumé nous avons établi le résultat suivant : *la partie de* $\mathcal{D}(M)$ *située dans un vrai dièdre d'arête* $M\zeta$ *est rencontrée par un plan quelconque passant par* M *suivant n éléments distincts au plus : rayons isolés ou secteurs plans.*

Il en résulte que $\mathcal{D}(M)$ est rencontré par tout plan passant par M ne portant pas un de ses secteurs plans (s'il en a) suivant $3n$ éléments distincts au plus. Cette limite peut être abaissée, mais pour cela une brève étude des demi-cônes simples d'ordre conique borné sera nécessaire.

13. Demi-cônes simples d'ordre conique borné. — Soit $\mathcal{D}$ un demi-cône simple de sommet O, c'est-à-dire l'ensemble des demi-droites joignant O aux points d'une courbe simple fermée (d) située sur une sphère centrée en O.

On dira que $\mathcal{D}$ est *d'ordre conique borné* si tout plan contenant O et ne portant aucun de ses secteurs plans, s'il en possède, le coupe suivant un nombre borné de rayons. La limite supérieure de ce nombre est *l'ordre conique* de $\mathcal{D}$. On ne pourrait dire : *ordre* tout court car un plan, par exemple, est d'ordre conique deux.

Je vais établir quelques propriétés des demi-cônes d'ordre conique borné dans le cas général, c'est-à-dire sans supposer (comme c'est le cas pour un faisceau dérivé) qu'il existe une droite issue de O telle que tout demi-plan ayant cette droite pour arête contienne une seule demi-droite du demi-cône. Il n'en résulterait aucune simplification pour les démonstrations.

Remarquons pour commencer que l'ensemble des secteurs plans pouvant se trouver sur $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable. En effet chacun de ces secteurs correspond à un arc de cercle situé sur d.

Nous allons étudier l'intersection de $\mathcal{D}$, supposé d'ordre conique N, par un

plan donné P passant par O, ou ce qui revient au même l'intersection de d. Si la section de $\mathcal{D}$ par P ne contient aucun secteur plan, elle se compose de N rayons au plus. Nous étudierons plus loin le cas où la limite N est atteinte.

Examinons le cas où $\mathcal{D}$ ne se réduisant pas à P contient dans ce plan un angle correspondant à un arc $\widehat{a'aa''}$ de la courbe fermée d (a est un point de l'arc, il est nécessaire d'en indiquer un car d étant fermée, a' et a'' définissent deux arcs). En raisonnant comme pour étudier la structure de l'intersection d'une droite et d'un arc simple d'ordre borné (n° 5), on pourra prélever sur d une suite d'arcs partiels $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ ($i = 1, 2, \ldots$), chacun n'ayant dans P que ses extrémités et deux quelconques ne pouvant avoir de points communs que dans ce plan.

Considérons un nombre donné r de ces arcs $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$).

L'ensemble des plans portant les secteurs plans éventuels de $\mathcal{D}$ étant au plus dénombrable, on peut choisir dans P une droite Δ joignant O à un point intérieur de $\widehat{a'aa''}$, ne contenant aucune extrémité des r arcs $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ et telle que tout plan contenant Δ coupe $\mathcal{D}$ suivant des rayons isolés en nombre au plus égal à N.

Menons alors par Δ deux plans P_1 et P_2 symétriques par rapport à P et tels que les r points a_i extérieurs à P soient extérieurs aux deux dièdres limités par P_1 et P_2 contenant P. Chaque arc $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ rencontre l'ensemble des deux plans P_1, P_2 en deux points au moins puisque a'_i et a''_i sont intérieurs à l'ensemble des deux dièdres, tandis que a_i est extérieur. D'autre part P_1 et P_2 contiennent un point intérieur de $\widehat{a'aa''}$. Désignons par N_1 et N_2 les nombres respectifs de rayons de $\mathcal{D}$ situés dans P_1 et P_2, nous aurons

$$N_1 + N_2 > 2 + 2r,$$

car les arcs $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ ne peuvent avoir de points communs que dans P. Comme N_1 et N_2 sont chacun au plus égaux à N, on en déduit

$$r + 1 \leq N.$$

Cette inégalité montre tout d'abord que l'on épuisera tous les points de d extérieurs à P au moyen d'un nombre fini r d'arcs, au plus égal à $N - 1$. Nous pouvons toujours supposer que ces r arcs se rangent sur d dans l'ordre $a'aa''a'_1 a_1 a''_1 a'_2 a_2 a''_2 \ldots a'_r a_r a''_r a'$. On voit immédialement que la courbe sphérique d possède dans P un arc de cercle $a''_r a' aa'' a'_1$ et les éléments $a''_1 a'_2$, $a''_2 a'_3$, $\ldots$, $a''_{r-1} a'_r$, qui peuvent être des arcs ou des points. En résumé, tout demi-cône simple d'ordre conique N rencontre un plan quelconque suivant N rayons isolés, ou bien $N - 1$ éléments au plus dont l'un au moins est un secteur plan.

14. Examinons maintenant le cas où un plan P coupe $\mathcal{D}$ suivant N éléments distincts, qui sont nécessairement des rayons isolés. Soient alors $a_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ les points où P est rencontré par d, celle-ci est la somme de N arcs

$$\widehat{a_i a_{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad \text{avec} \quad a_{N+1} = a_1.$$

Prélevons sur chaque arc $\widehat{a_i a_{i+1}}$ les points intérieurs à un arc partiel non nul $\widehat{b_i b'_{i+1}}$, il restera 2N arcs $\widehat{b'_i a_i}$, $\widehat{a_i b_i}$. Un point a_i ou le rayon correspondant de $\mathcal{D}$ sera dit une *traversée* ou un *retour* suivant que $\widehat{b'_i a_i}$ et $\widehat{a_i b_i}$ sont ou non de part et d'autre de P. Si nous désignons par dessus et dessous les deux côtés de P, les expressions *retour supérieur*, *retour inférieur* ont un sens évident.

Considérons comme plus haut dans P une droite Δ passant par O, ne contenant aucun a_i et choisie de manière que tout plan contenant Δ coupe $\mathcal{D}$ suivant des rayons isolés. La droite Δ partage P en deux régions que nous désignerons par (1) et (2). Désignons alors par T le nombre de traversées, par R_1 et R'_1 les nombres de retours supérieurs et inférieurs de (1), par R_2 et R'_2 les nombres de retours supérieurs et inférieurs de (2). On a $R_1 + R'_1 + R_2 + R'_2 + T = N$. Enfin on peut évidemment pour chaque a_i choisir b_i et b'_i assez près de a_i pour les angles ε_i et ε'_i que font les plans (Δ, b_i), (Δ, b'_i) avec P soient petits. Soit alors ε un nombre inférieur à tous les ε_i, ε'_i. Ceci posé, soient P_1 et P_2 deux plans contenant Δ, symétriques par rapport à P et faisant avec celui-ci un angle moindre que ε. On peut toujours supposer que P_1 est au-dessus de P dans la région (1). Dans ces conditions, en désignant par N_1 et N_2 les nombres respectifs d'intersections de P_1 et P_2 avec d, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$2(R_1 + R'_2) + T \leq N_1,$$
$$2(R_2 + R'_1) + T \leq N_2.$$

Comme N_1 et N_2 sont au plus égaux à N et que la somme $R_1 + R_2 + R'_1 + R'_2 + T$ vaut N, on en déduit :

$$2(R_1 + R'_2) + T = N,$$
$$2(R_2 + R'_1) + T = N.$$

Remarquons en passant que P_1 et P_2 traversent $\mathcal{D}$ chacun suivant N rayons isolés, ce qui exige que N *soit pair*.

Les deux dernières relations donnent par soustraction

$$R_1 + R'_2 = R_2 + R'_1.$$

Contrairement à ce qui se passe pour les ares plans, le nombre des retours n'est pas nécessairement nul, on le verra par un exemple donné à la fin du présent numéro. Mais on peut montrer que s'il y a des retours ils sont deux à deux opposés et de même nature (c'est-à-dire tous les deux inférieurs ou supérieurs).

Supposons que a_1, par exemple, soit un retour supérieur. Considérons deux demi-droites $O\delta'$ et $O\delta''$ voisines de Oa_1 telles que leurs supports Δ' et Δ'' ne passent par aucun a_i et que l'angle $\delta' O \delta''$ ne contienne aucun autre retour que a_1. Appelons pour Δ' région (1) celle qui ne contient pas a_1, pour Δ'' celle qui le contient. Lorsque l'on passe de Δ' à Δ'' en parcourant le petit angle, les sommes $R_1 + R'_2$ et $R_2 + R'_1$ doivent rester égales. Or du fait de a_1, R_2 diminue d'une unité et R_1 augmente d'une unité. Cette variation ne peut être compensée que si le symétrique de a_1 est un retour supérieur.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

I. *Tout demi-cône simple d'ordre conique borné est d'ordre conique pair.*

II. 1° *La section d'un demi-cône simple d'ordre conique* $2K$ *par un plan quelconque contenant son sommet se compose de rayons isolés et de secteurs plans en nombre au plus égal à* $2K$;

2° *Si ce nombre égale* $2K$ *les éléments sont des rayons isolés; ceux d'entre eux, s'ils existent, le long desquels le demi-cône simple ne traverse pas le plan sont opposés deux à deux et dans leur voisinage le demi-cône simple reste d'un même côté du plan*;

3° *Dans tout plan contenant* $2K$ *rayons on peut trouver une droite passant par le sommet du cône, ne contenant aucun rayon du demi-cône, qui soit l'arête de deux dièdres opposés ayant pour bissecteur le plan, de manière que tout plan intérieur à ces deux dièdres traverse le demi-cône suivant* $2K$ *rayons distincts.*

Voici pour terminer l'exemple annoncé.

Soient Σ une sphère de centre O, P le plan d'un grand cercle C et ω l'un des pôles de P. Prenons pour courbe d l'inverse d'un carré inscrit dans C, dans l'inversion de pôle ω qui transforme P en Σ. Le demi-cône simple de sommet O défini par d est du quatrième ordre conique. En effet un grand cercle de Σ donne par l'inversion précédente un cercle ou une droite passant par deux points diamétralement opposés de C, et un tel cercle coupe évidemment le carré en quatre points au plus. D'autre part les diagonales du carré sont deux couples de rayons opposés le long desquels le demi-cône reste du côté opposé à ω, puisqu'il est tout entier de ce côté au sens large.

15. Considérons maintenant un demi-cône simple d'ordre conique $2K$ symétrique par rapport à son sommet. Je dis que K est nécessairement impair. En effet, on peut trouver un plan P passant par le sommet donnant $2K$ rayons distincts le long desquels le plan est traversé. Ces $2K$ rayons découpent, dans le demi-cône, $2K$ secteurs qui sont alternativement d'un côté et de l'autre du plan. D'autre part deux secteurs symétriques sont de part et d'autre du plan. Ceci exige que K soit impair. Dans ce cas le demi-cône est un cône simple

d'ordre impair K, c'est-à-dire rencontré par toute droite ne contenant aucun segment suivant K points au plus.

On déduit immédiatement de cette propriété qu'un cône simple d'ordre pair se compose de deux nappes distinctes : demi-cônes simples opposés.

16. Demi-cônes simples du second ordre conique. — Je compléterai cette étude en montrant qu'un demi-cône simple d'ordre conique 2 est un système de deux demi-plans distincts de même arête, opposés ou non, ou bien la frontière d'un vrai demi-cône plein convexe.

Soit $\mathcal{D}$ un tel demi-cône de sommet O et considérons deux cas suivant que $\mathcal{D}$ possède ou non au moins un couple de rayons opposés.

A. Plaçons-nous dans la première hypothèse et soient OD et OD′ deux rayons opposés. Considérons un troisième rayon OD_1 ; il détermine avec les deux premiers un plan P, dont la section par $\mathcal{D}$ se réduit à *un* secteur plan (n° 14, II, 3°) qui comprend nécessairement les trois demi-droites. Supposons que l'angle DOD_1 par exemple, ne soit pas sur $\mathcal{D}$; le secteur plan comprend nécessairement le complémentaire de cet angle. Le support d'une demi-droite intérieure à l'angle D_1OD' est sur $\mathcal{D}$ et l'on voit immédiatement la possibilité de mener par cette droite un plan coupant $\mathcal{D}$ suivant quatre rayons; ce qui est contraire à l'hypothèse. Le demi-plan d'arête D′OD contenant D_1 est donc sur $\mathcal{D}$. Il en résulte immédiatement que celui-ci se réduit à deux demi-plans de même arête, opposés ou non, c'est-à-dire à un *dièdre* (surface) ou un *plan*.

B. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ ne possède aucun couple de rayons opposés. Distinguons deux cas :

1° $\mathcal{D}$ contient un secteur plan.

Celui-ci est nécessairement un angle DOD′ moindre que π, soit P son plan. Tous les rayons de $\mathcal{D}$ autres que ceux de DOD′ sont d'un même côté de P au sens strict, au-dessus par exemple. Menons alors dans P, par O, une droite Δ laissant DOD′ d'un même côté au sens strict et désignons par P_1 le demi-plan de P d'arête Δ contenant DOD′, par P_2 l'autre. Considérons alors un demi-plan P'_2 d'arête Δ voisin de P_2 et au-dessus. Si le voisinage est assez étroit, $\mathcal{D}$ sera tout entier dans le dièdre $(\Delta, P_1P'_2)$, sans quoi il posséderait nécessairement un rayon dans P_2 ce qui n'est pas. On voit alors qu'un plan Q parallèle à Δ et rencontrant P_1 et P'_2 est coupé par $\mathcal{D}$ suivant une courbe simple fermée dont tous les points sont à distance bornée puisque Δ n'est pas sur $\mathcal{D}$. Cette courbe est du second ordre, elle limite donc un domaine convexe (n° 7). $\mathcal{D}$ est donc la frontière d'un vrai demi-cône convexe.

2° $\mathcal{D}$ ne contient aucun secteur plan.

Considérons un rayon fixe OD et un rayon mobile OD′ tendant vers OD en restant du même côté. Le plan DOD′ a une limite P. (Il suffit pour le voir de

couper par un plan perpendiculaire à OD ne passant pas par O; on obtient un arc de second ordre.) Tous les rayons de $\mathcal{D}$, sauf OD, sont d'un même côté de P au sens strict. La démonstration se poursuit comme plus haut en remplaçant le secteur par le rayon unique OD.

Tout demi-cône simple d'ordre conique deux est donc un plan, un dièdre, ou la frontière d'un vrai demi-cône convexe.

17. Revenons à l'étude du faisceau dérivé en un point ordinaire M d'une surface d'ordre localement borné et conservons les notations du n° 12. Σ_M est d'ordre n, $\mathcal{D}(M)$ est d'ordre borné. Soit $2K$ son ordre (¹). Nous allons chercher une relation entre K et n. D'après ce qu'on a vu plus haut (n° 12), on peut trouver un plan P passant par M contenant exactement $2K$ rayons. Donnons-nous dans P une droite ne contenant aucun de ces $2K$ rayons et considérons un dièdre d'arête $M\zeta$ contenant à son intérieur tous les rayons de $\mathcal{D}(M)$ situés d'un côté donné de la droite. D'après les conclusions du n° 12, le nombre de ces rayons ne peut dépasser n. On a donc $2K \leqq 2n$. Supposons cette limite atteinte. Toute droite de P (passant par M) ne contenant aucun rayon de $\mathcal{D}(M)$ en laisse exactement n de chaque côté. Il en résulte que les $2n$ rayons sont opposés deux à deux. On a vu d'autre part (n° 14, II, 3°) que P peut être choisi de manière à être traversé $2n$ fois. En raisonnant comme au n° 15 on voit que n est nécessairement impair. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Si un point ordinaire d'une surface simple de Jordan est à voisinage d'ordre n, le faisceau dérivé en ce point est un demi-cône simple d'ordre conique pair au plus égal à $2n-2$ ou $2n$ suivant que n est pair ou impair.

Lorsque l'ordre conique est égal à $2n$ tous les plans passant par le point et donnant exactement $2n$ rayons du faisceau dérivé contiennent n couples de demi-tangentes opposées.

D'après les résultats du n° 15 on peut affirmer que *si le faisceau dérivé est symétrique, son ordre conique ne peut être multiple de 4.*

18. Lorsque $n=2$, on retrouve en partie des résultats connus. Supposons que la surface (S) définie au n° 3 soit du second ordre. D'après ce qu'on a vu au n° 7, les arcs sections verticales de (S) sont du second ordre au sens que j'avais adopté dans mon Mémoire cité sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan. Il en résulte *qu'elle est ou bien un morceau de la frontière d'un volume convexe, ou bien un morceau de quadrique réglée* (²).

(¹) Conique.
(²) M., n° 23.

Ainsi pour le second ordre, la non-convexité implique nécessairement l'algébricité. Nous montrerons que dans le cas du troisième ordre elle implique la continuité du plan tangent, sauf peut-être en de rares points exceptionnels, propriété que nous avions énoncée sans démonstration dans le Mémoire en question. Pour l'établir, une étude approfondie du cas $n = 3$ sera nécessaire. Elle nous conduira d'ailleurs à des résultats intéressants en eux-mêmes.

IV. — Surfaces du troisième ordre.

19. Soit (S_3) une surface du troisième ordre définie en axes quelconques par une équation

$$(S_3) \qquad z = f(x, y)$$

où f est définie et continue dans un domaine fermé, borné et convexe (c). Nous supposerons comme précédemment l'axe des x vertical.

Considérons un point ordinaire de (S_3) c'est-à-dire un point intérieur M où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace. D'après la théorie générale le faisceau dérivé $\mathfrak{D}(M)$ est d'ordre conique 6, 4 ou 2. Nous allons examiner sucessivement les trois cas. Auparavant rappelons la dernière proposition du n° 10 qui devient pour $n = 3$:

Si une sécante Δ qui pénètre à l'intérieur du cylindre projetant verticalement (S_3) traverse deux fois (S_3), chacune des traversées correspond à un point ordinaire unique où Δ est extérieure au faisceau des tangentes. Nous allons en déduire une proposition importante dont nous ferons un constant usage.

Soient M *un point intérieur de* (S_3), MD *et* MD′ *les demi-tangentes à l'arc section de* (S) *par un plan vertical contenant* M*;*

1° *Si* MD *et* MD′ *sont opposées et si l'arc n'est pas entièrement sur leur support commun, le point* M *est ordinaire et les deux demi-tangentes sont sur la frontière de* $\mathfrak{C}(M)$*;*

2° *Si* MD *et* MD′ *ne sont pas opposées et si l'arc contient des points à l'intérieur de l'angle* D′MD *ou de son symétrique, le point* M *est ordinaire et l'une au moins des demi-tangentes est sur* la frontière de $\mathfrak{C}(M)$.

Dans les deux cas il existe dans le plan de l'arc des droites issues de M extérieures à $\mathfrak{C}(M)$.

L'énoncé précédent suppose que MD et MD′ ne sont pas confondues, ce qui ne peut arriver que si elles sont verticales.

Je vais faire la démonstration dans le cas où MD et MD′ sont distinctes. Soit $\overset{\frown}{UV}$ l'arc section, $\overset{\frown}{MV}$ étant l'arc partiel ayant MD pour demi-tangente en M.

Supposons que $\overline{MV}$ par exemple ait un point N intérieur à D'MD ou son symétrique. Envisageons d'abord la première hypothèse.

Une droite Δ issue de M et pénétrant à l'intérieur de l'angle DMN traverse $\overset{\frown}{UV}$ en deux points : l'un en M l'autre entre M et N; elle est donc extérieure à $\mathfrak{C}(M)$. Comme Δ peut être choisie aussi près qu'on veut des supports de MD, celle-ci est bien sur la frontière de $\mathfrak{C}(M)$.

Supposons maintenant N intérieur à l'opposé de D'MD. Il suffira de choisir Δ pénétrant à l'intérieur de l'angle D'_1MN où MD'_1 désigne l'opposé MD' pour obtenir la même conclusion, avec cette différence que c'est MD' qui est certainement sur la frontière de $\mathfrak{C}(M)$.

Dans le cas où les demi-tangentes sont opposées et non verticales la démonstration est la même, mais évidemment les deux demi-tangentes sont sur la frontière. Si elles sont verticales, leur support n'est pas sur (S_3). L'arc $\overset{\frown}{UMV}$ possède une inflexion. M est donc ordinaire. Il suffit alors d'appliquer le raisonnement précédent à Σ_M.

20. Nous pouvons maintenant procéder à l'étude complète de $\mathcal{D}(M)$ en un point ordinaire en examinant successivement les trois cas possibles. Soit Σ_M un voisinage de (S_3) rapporté comme d'habitude à trois axes $M\zeta\eta\xi$. Supposons d'abord $\mathcal{D}(M)$ *d'ordre conique* 6. Il existe alors un plan P_0 contenant M et traversé par $\mathcal{D}(M)$ suivant six rayons opposés deux à deux (n° 17). Soient $MD_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$ ces rayons dans l'ordre où les rencontre une demi-droite d'origine M tournant dans P_0 dans le même sens. Considérons un rayon MD, distinct des précédents, que, pour fixer les idées, nous supposerons intérieur au dièdre $(M\zeta, D_2, D_3)$. Le plan $(M\zeta, D)$ coupe P_0 suivant une demi-droite Md. Désignons par Md' la demi-droite opposée à cette dernière et par MD' la demi-tangente située dans le demi-plan $(M\zeta, d')$. Comme $\mathcal{D}(M)$ traverse P_0 le long des six rayons, MD' est par rapport à P_0 du côté opposé à MD. Je dis que les angles dMD et d'MD' ne peuvent être inégaux; il en résultera que MD et MD' sont nécessairement opposées. Si les angles sont inégaux nous pouvons toujours supposer que dMD est le plus petit. Menons alors par M dans P_0 une droite Δ pénétrant à l'intérieur de D_1MD_2. Comme la trace sur P_0 des plans portant les secteurs plans éventuels de $\mathcal{D}(M)$ est au plus dénombrable, Δ peut être choisie en dehors de l'ensemble. Dans ces conditions tout plan contenant Δ coupe $\mathcal{D}(M)$ suivant six rayons au plus. Ceci posé soit Ml une demi-droite intérieure à l'angle dMD; on voit immédiatement que les rayons MD, MD_5, MD_6, MD_1, sont d'un même côté du plan (Δ, l) les rayons MD', MD_2, MD_3, MD_4 étant de l'autre, dans les deux cas au sens strict. On en déduit que $\mathcal{D}(M)$ traverse le plan (Δ, l) suivant six rayons intérieurs respectivement aux dièdres $(M\zeta, D_2D)$, $(M\zeta, DD_3)$, $(M\zeta, D_5D')$, $(M\zeta, D'D_6)$, $(M\zeta, D_1D_2)$, $(M\zeta, D_4, D_5)$. Ces six rayons sont deux à deux opposés (n° 17), le premier et le troisième d'une part, le

second et le quatrième le sont donc nécessairement. Faisons tendre Mℓ vers MD, chacun des six rayons tend vers une limite située sur $\mathcal{O}(M)$. Les troisième et quatrième limites sont forcément distinctes, car MD′ est par rapport à (Δ, D) du côté opposé à MD_3 et MD_6. On trouve donc sept rayons, ce qui est impossible.

Ainsi $\mathcal{O}(M)$ est symétrique. Je vais montrer qu'il porte (S_3). Remarquons d'abord que le cône directeur des tangentes est ici un vrai cône, sans quoi $\mathcal{O}(M)$ serait un dièdre ou un plan (n° 2, 7°). Considérons alors deux demi-tangentes opposées MD_0 et MD'_0 non verticales et supposons que la section L_0 de $\mathcal{O}(M)$ par le plan vertical de MD_0 ne soit pas entièrement sur (S_3). Prenons sur $\mathcal{O}(M)$ deux rayons MD et MD′ voisins respectivement de MD_0 et MD'_0. Le plan vertical de MD sera voisin de celui de MD_0 et sa section L par (S_3) ne sera pas entièrement sur le support de MD. Les deux couples de rayons opposés MD_0, MD'_0; MD, MD′ sont donc sur le cône directeur des tangentes (n° 19). Mais si MD est assez voisin de MD_0 il sera sur la même nappe. Il résulte alors de la propriété énoncée au n° 2, 7° que les angles D_0MD' et DMD'_0 sont sur $\mathcal{O}(M)$. En faisant tendre MD vers MD_0 on voit que $\mathcal{O}(M)$ contient un plan ce qui est impossible. Le raisonnement s'applique à Σ_M comme à (S_3), mais dans ce cas aucune demi-tangente n'est parallèle à $M\zeta$; Σ_M est donc sur $\mathcal{O}(M)$, qui par suite ne peut avoir de rayon vertical.

En définitive nous avons montré que si $\mathcal{O}(M)$ *est du sixième ordre conique*, (S_3) *est un morceau de cône* (*lieu de droites*) *du troisième ordre*.

En effet (S_3) est rencontré par une droite quelconque ne portant aucun segment suivant trois points au plus.

En prenant pour (S_3) le morceau de cône

$$z(x^2+y^2)=xy(x+y)$$

limité au cylindre

$$x^2+y^2=1,$$

on obtient un exemple de ce cas, car (S_3) est à pentes bornées. Il suffit pour le voir de passer en coordonnées semi-polaires.

Avant de passer à l'examen du cas où $\mathcal{O}(M)$ est du quatrième ordre conique faisons une dernière remarque.

Le raisonnement précédent montre que si $\mathcal{O}(M)$ supposé n'être pas un plan contient deux secteurs DMD_1 et $D'MD'_1$ symétriques par rapport à M, ceux-ci sont entièrement sur (S_3).

Nous faisons ici la convention suivante, qui vaudra pour la suite : *une droite sera dite tout entière sur* (S_3) si le segment que découpe sur elle le cylindre vertical projetant son bord est sur (S_3).

21. Supposons maintenant $\mathcal{O}(M)$ *d'ordre conique* 4. Notre étude va être fondée sur la considération des couples de demi-tangentes opposées. Remarquons tout d'abord que si $\mathcal{O}(M)$ possède trois couples de rayons opposés, ils

sont dans un même plan. En effet soient MD_i, MD'_i ($i=1, 2, 3$), trois couples non coplanaires. Un axe $M\zeta$ extérieur à $\mathfrak{C}(M)$ est nécessairement intérieur à l'un des huit trièdres formés par les six rayons, car tout plan contenant M coupe $\mathfrak{C}(M)$ suivant deux rayons au plus. On peut toujours choisir les notations telles que $M\zeta$ soit intérieur à $(M, D_1D_2D_3)$. En faisant tourner un demi-plan d'arête $M\zeta$ autour de celle-ci, on voit que $\mathcal{D}(M)$ traverse au moins six fois tout plan issu de M et laissant le trièdre $(M, D_1D_2D_3)$ d'un même côté au sens strict; ce qui est impossible. La proposition est donc établie. On en déduit immédiatement que si en un point ordinaire de (S_3) *existent trois couples de demi-tangentes opposées non situées dans un même plan, la surface se réduit à un morceau de cône du troisième ordre ayant pour sommet le point.*

En effet le faisceau dérivé au point considéré ne peut être que d'ordre conique six.

22. $\mathcal{D}(M)$ étant supposé d'ordre conique 4 étudions pour commencer le cas où il possède au moins trois couples opposés. Ces couples opposés sont dans un plan P qu'ils partagent en six angles opposés deux à deux. L'un au moins de ces angles est sur $\mathcal{D}(M)$, sans quoi ce dernier posséderait dans P six éléments, ce qui est impossible.

Pour étudier complètement $\mathcal{D}(M)$, deux remarques préliminaires seront utiles. Soit $\zeta' M\zeta$ une droite extérieure à $\mathfrak{C}(M)$, Considérons deux demi-tangentes MD et ML telles qu'elles déterminent un dièdre non plat d'arête $\zeta'\zeta$. Je désignerai par (D, L) le secteur de $\mathcal{D}(M)$ situé dans ce dièdre.

I. Soient alors quatre secteurs consécutifs (D_i, D_{i+1}), $i=0, 1, 2, 3$, situés dans le dièdre $(\zeta'\zeta, D_0D_4)$; si (D_0, D_1), D_2 et D_3 sont dans P et si D_4 ne s'y trouve pas le secteur (D_1, D_2) est forcément dans P.

Pour le voir il suffit de considérer la section de (D_0, D_4) par un plan π parallèle à $\zeta'\zeta$ rencontrant les demi-droites D_0 et D_4 et d'appliquer la proposition II du n° 8.

II. Soient un secteur (A_0, B_0) possédant dans P deux secteurs plans (A_0, A_1) et (B_1, B_0), mais non tous ses rayons. La proposition III du n° 8 permet d'affirmer que (A_0, B_0) se compose de deux secteurs plans (A_0, A), (B, B_0) situés dans P, reliés ou bien par un secteur (A, B) n'ayant dans le plan que ses rayons extrêmes, ou bien par deux secteurs (A, C) et (C, B) situés de part et d'autre de P, où ils n'ont que leurs rayons extrêmes.

Ceci posé considérons les six rayons de $\mathcal{D}(M)$ opposés deux à deux dans P. Ils découpent dans ce plan six angles opposés deux à deux que nous numéroterons dans l'ordre où les rencontre une demi-droite issue de M tournant dans P dans le même sens. Je vais montrer qu'un couple au moins d'angles opposés est sur $\mathcal{D}(M)$. On a vu qu'un angle au moins, que nous numéroterons (1) est sur $\mathcal{D}(M)$. Il suffit éxidemment de considérer le cas où (4) n'est pas sur $\mathcal{D}(M)$.

S'il en est ainsi il existe dans le secteur se projetant suivant (4), parallèlement à $\zeta'\zeta$, un rayon MD_4 situé hors de P. Considérons alors à l'intérieur de (1) un rayon MD_0 assez voisin de (2) pour que le secteur (D_0, D_4) soit dans un dièdre moindre que π. La remarque I précédente montre que (2) est nécessairement sur $\mathcal{D}(M)$. Il en est de même de (6). Mais de la même manière on voit que si (3), par exemple, n'est pas sur $\mathcal{D}(M)$, (5) adjacent à (6) y est forcément. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ possède donc bien dans P deux angles opposés, que nous désignerons par $A_1MB'_1$ et $B_1MA'_1$, MA'_1 étant opposé à MA_1. Considérons alors les deux secteurs (A_1, B_1) et (A'_1, B'_1). L'un d'eux, le premier, par exemple, n'est pas entièrement dans P. Prenons dans ce plan deux rayons MA_0 et MB_0 respectivement voisins de MA_1 et MB_1 et intérieurs à $A_1MB'_1$ et $B_1MA'_1$. D'après la remarque II nous sommes conduits à distinguer deux cas.

a_1. (A_0, B_0) se compose de deux angles A_0MA et BMB_0 de P, reliés par un secteur (A, B) n'ayant dans ce plan que ses rayons extrêmes. Les rayons MA et MB appartiennent à A_1MB_1. Soit Δ une droite intérieure aux angles $A_1MB'_1$, $B_1MA'_1$. En coupant $\mathcal{D}(M)$ par des plans convenables passant par Δ on voit que (A'_1, B'_1) ne peut avoir de rayons situés par rapport à P du côté opposé à (A, B). Donc : ou bien (A'_1, B'_1) est tout entier dans P ou du même type que (A_1, B_1). Dans le premier cas : a_1. $\mathcal{D}(M)$ se réduit à un angle AMB supérieur à π complété par un secteur (A, B) n'ayant dans le plan de l'angle que ses rayons extrêmes. Étudions la seconde hypothèse : a_2. Supposons MA distinct de MA_1 et considérons MA′ opposée à MA. Donnons-nous alors un rayon MD_4 de $\mathcal{D}(M)$ intérieur au secteur se projetant suivant A'_1MA' et choisissons un rayon MD_0 voisin de MA, intérieur à A_1MA. Le secteur (D_0, D_4) aura dans P un angle D_0MA, les rayons MB, MB_0, MA'_1. Il est contenu dans un dièdre moindre que π et le secteur (A, B) n'est pas dans P, il faut donc que MD_4 y soit [Remarque I]. Il en résulte que l'angle A'_1MA' est sur $\mathcal{D}(M)$. Considérons de même MB′ opposée à MB, l'angle B'_1MB' est sur $\mathcal{D}(M)$ si MB′ est distinct de MB_1. Enfin le même raisonnement montre que le secteur (A′, B′) ne peut avoir de rayon dans P, En résumé : $\mathcal{D}(M)$ se compose de deux angles opposés AMB′ et BMA′ reliés par deux secteurs (A, B) et (A′, B′), situés du même côté du plan des angles, plan dans lequel ils n'ont que leurs rayons extrêmes.

b. (A_0, B_0) se compose de deux angles A_0MA, BMB_0 reliés par deux secteurs (A, C) et (C, B) situés de part et d'autre de P. On voit alors immédiatement que (A'_1, B'_1) est dans P.

Si l'on se reporte au n° 20, l'on voit que dans les trois cas les secteurs plans opposés de $\mathcal{D}(M)$ sont sur (S_3). Je vais montrer que dans le cas b, le couple isolé MC, MC′ est aussi sur (S_3). Il va falloir procéder autrement. On a vu au n° 2 (9°) que si $\mathcal{D}(M)$ possède quatre rayons sur $\theta(M)$ ou $\theta'(M)$, c'est-à-dire ici sur la même nappe du cône directeur des tangentes, $\mathcal{D}(M)$ reste d'un même

côté, au sens large, d'un certain plan. Or on voit immédiatement dans le cas qui nous occupe que P ou tout autre plan traverse $\mathcal{D}(M)$; le faisceau dérivé ne peut donc posséder plus de sept rayons sur la frontière $\mathfrak{C}(M)$. Coupons alors (S_3) par le plan vertical de C'MC, qui est bien déterminé car P ne peut être vertical, puisque deux de ses angles sont sur (S_3). Il s'agit de montrer que la section ne peut avoir de point extérieur à la droite D'MD.

Supposons qu'il y en ait un : N. Prenons sur (M) un rayon MD voisin de MC, le plan vertical de MC contiendra en dehors de MC une seule dem-tangente : MD', située dans P, voisine de MC'. Il est immédiat que si MD est assez voisine de MC, la section de (S) par le plan vertical de MD aura des points à l'intérieur de l'angle D'MD ou de son opposé. En se reportant au n° 19 (2°), on voit que MD ou MD' sont sur la frontière de $\mathfrak{C}(M)$, ce qui est impossible car $\mathfrak{C}(M)$ contient au plus six de tels rayons. Les demi-tangentes MC et MC' sont donc sur (S_3).

En définitive nous avons l'énoncé suivant :

Si en un point ordinaire de (S_3) *le faisceau dérivé est du quatrième ordre conique et possède plus de deux couples de rayons opposés il appartient à l'un des types suivants :*

I. *Deux angles (pleins) opposés complétés par deux secteurs situés d'un même côté du plan des angles;*

II. *Un angle supérieur à* π *complété par un secteur situé d'un même côté du plan de l'angle;*

III. *Un angle supérieur à* π, *complété par deux secteurs situés de part et d'autre du plan de l'angle;*

Dans les trois cas les secteurs n'ont dans le plan des angles *que leurs rayons extrêmes et de plus tous les couples de rayons opposés sont sur* (S_3).

23. Étudions maintenant le cas où $\mathcal{D}(M)$ toujours supposé d'ordre conique 4, a au plus deux couples de rayons opposés. Considérons encore Σ_M rapporté aux axes $M\xi\eta\zeta$, $M\zeta$ extérieur à $\mathfrak{C}(M)$. Il existe un plan P coupant $\mathcal{D}(M)$ suivant quatre rayons distincts. D'autre part comme $\mathcal{D}(M)$ possède au plus deux rayons opposés, la proposition II (3°) du n° 14 montre qu'il est possible de choisir P de manière qu'il ne contienne aucun couple de rayons opposés et soit traversé le long des quatre rayons. Soient $MD_i (i = 1, 2, 3, 4)$ les demi-tangentes situées dans P dans l'ordre où les rencontre une demi-droite issue de M tournant dans P dans le même sens. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ traverse P le long de chaque MD_i et de plus, trois au plus de ces rayons sont d'un même côté de toute droite de P n'en portant aucun (n° 12). Ici encore le cône directeur des tangentes est un vrai cône. Je vais montrer que le faisceau dérivé a au plus six rayons sur ce cône. S'il en avait sept au moins, quatre seraient certainement sur

la même nappe et par suite $\mathcal{D}(M)$ serait d'un même côté au sens large d'un certain plan R passant par M (n° 2, 9°). Ce plan ne pouvant être P le coupe suivant une droite Δ qui laisse alors les quatre demi-droites MD_i d'un même côté au sens large. Mais deux quelconques d'entre-elles n'étant pas opposées on pourrait toujours trouver, si Δ portait l'une d'elles, une droite voisine les laissant d'un même côte au sens strict. Donc $\mathcal{D}(M)$ possède au plus six rayons sur le cône directeur des tangentes.

Coupons maintenant Σ_M par un plan Q contenant $M\zeta$ et soient MD et $M\overline{D}$ les demi-tangentes en M à la section MD′ et $M\overline{D}'$ les demi-droites opposées. D'après la proposition du n° 19 la section de Σ_M par Q est tout entière dans la somme des deux angles opposés $DM\overline{D}'$, $\overline{D}MD'$ sauf peut-être pour 6 positions au plus de Q, donc quel que soit Q puisque Σ_M est un ensemble fermé. Je vais montrer que pour deux positions de Q et deux seulement MD et $M\overline{D}$ sont opposées. Pour cela considérons la somme des deux angles adjacents $D_1MD_2 + D_2MD_3$; elle est différente de π, de même que $D_3MD_4 + D_4MD_1$. Le total valant 2π, une des sommes, par exemple, la première est inférieure à π. Désignons par ML_1, ML_2 et ML_3 les demi-droites opposées à MD_1, MD_2 et MD_3, le quatrième rayon MD_4 est nécessairement intérieur à l'un des angles L_1ML_2, L_2ML_3. En permutant au besoin les indices 1 et 3 on peut supposer que MD_4 est intérieur à L_1ML_2. On voit immédiatement que si Q pénètre à l'intérieur de D_2MD_3 les deux demi-tangentes sont d'un certain côté de P, tandis qu'elles sont du côté opposé lorsqu'il pénètre à l'intérieur de L_1MD_4. Comme la somme $DM\zeta + \zeta M\overline{D}$ varie d'une manière continue elle passe deux fois par la valeur π lorsque le plan Q fait un tour complet. Il en résulte que $\mathcal{D}(M)$ possède au moins deux couples de rayons opposés et par suite deux exactement puisqu'il n'en possède pas trois. D'autre part les supports de ces deux couples de demi-tangentes opposées sont sur Σ_M. Le plan des deux couples ne peut donc être vertical. Soit Δ_1 le support de l'un d'eux; la section de (S_3) par le plan vertical de Δ_1 ne peut avoir de point extérieur à Δ_1, sans quoi $\mathcal{D}(M)$ aurait une infinité de rayons sur la frontière de $\mathfrak{T}(M)$. Il suffit pour le voir de raisonner comme on l'a fait au numéro précédent pour montrer que le support de MC est sur (S_3).

En définitive nous avons le résultat suivant.

Si en un point ordinaire M *de* (S_3) *le faisceau dérivé* $\mathcal{D}(M)$ *supposé du quatrième ordre conique, ne contient pas plus de deux couples de rayons opposés, il en possède exactement deux et les supports de ceux-ci sont sur* (S_3).

On peut ajouter qu'un voisinage Σ_M est compris entre $\mathcal{D}(M)$ et son symétrique.

On trouvera dans la Note I à la fin du présent Mémoire un exemple de ce cas.

23 *bis*. Il sera utile pour la suite d'étudier plus complètement $\mathcal{D}(M)$ dans le cas qui nous occupe. Soient MD_1, MD'_1 et MD_2, MD'_2 les deux couples de demi-tangentes opposées et P leur plan. Supposons d'abord que P ne contienne pas d'autre rayon de $\mathcal{D}(M)$ que les quatre précédents. Chacun des quatre secteurs (D_1, D_2), (D_2, D'_1), (D'_1, D'_2), (D'_2, D_1) n'a dans P que ses rayons extrêmes. Si deux secteurs adjacents sont d'un même côté leur rayon commun est un retour et le rayon opposé est un retour de même nature [n° 14, II]. Dans ces conditions les quatre secteurs sont d'un même côté de P. Ceci est impossible il suffit pour le voir de couper $\mathcal{D}(M)$ par un plan parallèle à $M\zeta$ [$M\zeta$ désignant toujours une demi-droite extérieure à $\mathfrak{C}(M)$] et rencontrant MD_1 et MD_2, on obtient un arc du troisième ordre donnant deux retours sur une sécante.

Examinons le cas où $\mathcal{D}(M)$ possède dans P un cinquième rayon MD, dans l'angle D_1MD_2 par exemple. La demi-droite opposée n'est pas sur $\mathcal{D}(M)$. Il n'est pas possible qu'aucun des angles D_1MD, DMD_2 ne soit pas sur $\mathcal{D}(M)$, car ce dernier ne pouvant avoir que trois éléments au plus dans P, il faudrait que les angles opposés $D_1MD'_2$ et $D_2MD'_1$ y soient, ce qui est impossible puisque $\mathcal{D}(M)$ est supposé n'avoir que deux couples de rayons opposés. Il faut donc que D_1MD par exemple soit sur $\mathcal{D}(M)$. Donnons-nous une demi-tangente MD_0 intérieure à D_1MD et sur le secteur (D'_1, D'_2) un rayon MD_3 voisin de MD'_1; MD_3 ne peut être dans P car il y aurait trois couples de demi-tangentes opposées dans ce plan. Le secteur (D_0, D_3) comprend dans P un angle plan D_0MD, deux rayons MD_2, MD'_1 et le rayon extrême MD_3 est hors du plan. Il faut par suite que l'angle DMD_2 soit sur $\mathcal{D}(M)$ [n° 22, II].

On voit donc que si P contient cinq demi-tangentes (au moins) un seul ou deux adjacents des angles formés par les deux couples de demi-tangentes opposés sont sur $\mathcal{D}(M)$. Dans tous les cas il existe dans P un système de deux angles opposés dont les côtés sont sur $\mathcal{D}(M)$ et tels que celui-ci est d'un même côté de P dans les deux angles, ou bien sur P dans un des angles et d'un certain côté dans l'autre.

24. Les couples de demi-tangentes opposées ont joué un rôle important dans l'étude du faisceau dérivé supposé d'ordre conique 6 ou 4. Je donnerai encore deux propositions relatives à ces couples.

I. *Si en un point intérieur de* (S_3) *les demi-tangentes à une section verticale sont opposées et pas entièrement contenues sur* (S_3) *le point est ordinaire et le faisceau dérivé y est un dièdre ou un plan.*

En effet, le point est ordinaire (n° 19, 1°); le faisceau dérivé ne peut être d'ordre conique 6 ou 4, car dans les deux cas tout couple de demi-tangentes opposées est sur la surface, (n^{os} 20, 22, III; n° 23), il est donc d'ordre conique 2 et comme il possède deux rayons opposés, c'est un dièdre ou un plan (n° 16, A).

II. *Si en un point intérieur de* (S_3) *les demi-tangentes à une section verticale sont verticales et opposées, le faisceau dérivé en ce point est un plan vertical.*

Le support des demi-tangentes ne peut être sur (S_3), le point est donc ordinaire et le faisceau dérivé un dièdre ou un plan. Je dis qu'il est nécessairement un plan. Supposons qu'en un point M le faisceau dérivé soit un dièdre (Δ, P_1P_2) d'arête verticale. En se reportant à la définition du faisceau des tangentes, on voit que celui-ci comprend tous les plans passant par Δ qui ne pénètrent pas à l'intérieur du dièdre. Mais la section verticale par un tel plan possède en M une inflexion, par suite certaines sécantes issues de M la traversent trois fois, et ces sécantes sont extérieures à $\mathfrak{C}(M)$ (n° 19). Il y a contradiction, ce qui exige que P_1 et P_2 soient opposées. $\mathfrak{D}(M)$ est donc un plan vertical.

25. Pour compléter l'étude des propriétés différentielles de (S_3) dans le cas général, je vais examiner avec quelques détails le cas où le faisceau dérivé est un plan.

Soit M un point intérieur de (S_3) où le faisceau dérivé est un plan P, que nous supposerons d'abord n'être pas vertical. Menons par M un plan vertical Q. Si (S_3) est bien du troisième ordre sa section par Q ne pourra être toujours sur P. La proposition 2° du n° 19 montre que M est un point ordinaire; elle permet d'affirmer également que toute droite D'MD de P intérieure à $\mathfrak{C}(M)$ est toute entière sur (S_3).

Si $\mathfrak{C}(M)$ est un plan il est confondu avec P.

Nous allons considérer successivement deux cas.

a. $\mathfrak{C}(M)$ *est un bi-dièdre.*

Le plan P qui est un plan de tangentes contient nécessairement l'arête Δ du bidriédre, de plus il en est une des faces sans quoi (S_3) serait plane. Δ partage P en deux demi-plans P_1 et P_2; désignons par (1) et (2) les morceaux de (S_3) qui se projettent verticalement sur P_1 et P_2. Comme la surface n'est pas entièrement sur P, (1), par exemple, possède un point N_1 situé hors de P, et dont la projection N'_1 sur P_1 n'est pas sur Δ. Coupons (S_3) par le plan vertical $MN_1N'_1$. Toute droite de ce plan issue de M et rencontrant le segment $N_1N'_1$ à son intérieur, traverse la section deux fois, donc est extérieure à $\mathfrak{C}(M)$ (n° 19). Ce dernier étant un bi-dièdre d'arête Δ on en déduit que tout demi-plan intérieur au dièdre (Δ, P_1N_1) est extérieur à $\mathfrak{C}(M)$. De là résulte que (1) est d'un même côté de P, au sens large, sans quoi $\mathfrak{C}(M)$ se réduirait à P; le raisonnement vaut pour (2). On voit de la même manière que (1) et (2) ne peuvent être d'un même côté de P; ce qui exige que Δ soit sur (S_3).

Ainsi :

I. *Lorsque* $\mathfrak{D}(M)$ *se réduisant à un plan non vertical* $\mathfrak{C}(M)$ *est un bidièdre,*

l'arête de celui-ci est sur (S_3) *et la partage en deux parties l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan, au sens large. De plus le plan* $\mathcal{D}(M)$ *est une face de* $\mathcal{C}(M)$.

b. Le cône directeur des tangentes en M *est un vrai cône.* Soit $\mathcal{C}$ le cône, P ne peut pénétrer à l'intérieur. S'il ne le touchait pas ou le touchait suivant une seule génératrice il serait tout entier sur (S_3) ce qui n'est pas. Il faut donc que P touche suivant deux angles opposés, qui sont inférieurs à π. Les deux angles complémentaires de P étant extérieurs à $\mathcal{C}$ sont sur (S_3). En raisonnant comme à l'instant on voit aisément que les morceaux de (S_3) qui se projettent suivant les angles de P situés sur $\mathcal{C}$ sont au sens large de part et d'autre du plan. En conclusion :

II. *Lorsque* $\mathcal{D}(M)$ *se réduisant à un plan non vertical, le cône directeur des tangentes est un vrai cône,* P *contient deux angles opposés entièrement situés sur* (S_3), *les morceaux de celle-ci se projetant verticalement sur les angles complémentaires étant* (au sens large) *de part et d'autre de* P.

Des deux dernières propositions on déduit immédiatement la suivante.

III. *Si en un point* M *le faisceau dérivé se réduit à un plan non vertical, et si de plus on peut trouver une section verticale* $\overset{\frown}{UMV}$ *telle que ou bien l'un des arcs* $\overset{\frown}{UM}$ *ou* $\overset{\frown}{MV}$ *traverse* P *en dehors de* M, *ou bien les arcs* $\overset{\frown}{UM}$ *et* $\overset{\frown}{MV}$ *ont des points d'un même côté de* P, *le faisceau des tangentes en* M *se réduit à* P.

Il nous reste à examiner le cas où $\mathcal{D}(M)$ se réduit à un plan vertical P. Considérons un voisinage Σ_M. La proposition II précédente montre que $\mathcal{C}(M)$ est un bidièdre ou un plan.

S'il est un bidièdre Σ_M contient un segment M'MM'', dont le support est sur (S_3); autrement il y aurait dans P des droites extérieures à $\mathcal{C}(M)$.

On peut donc affirmer que :

IV. *Si le faisceau dérivé en* M *est un plan vertical* P, *celui-ci est le faisceau des tangentes à moins que* P *contienne une droite de* (S_3) *auquel cas* $\mathcal{C}(M)$ *peut être un bidièdre ayant cette droite pour arête.*

On rapprochera ce dernier résultat de la proposition II du n° 24.

V. — Surfaces du troisième ordre sans plans d'appui locaux.

26. Dans ce dernier chapitre nous étudierons le cas particulier où (S_3) ne possède nulle part de plan d'appui local.

Précisons d'abord les définitions.

Soit M un point intérieur de (S_3), nous dirons qu'un plan P passant par M est un *plan d'appui* en M si (S_3) est d'un même côté de P, le plan d'appui est *strict*

si M est le seul point de (S_3) situé dans P. De même on définira un *plan d'appui local*, strict ou non en remplaçant (S_3) par un petit morceau ayant M à son intérieur (¹).

On peut montrer que si (S_3) est effectivement du troisième ordre, elle ne peut posséder soit partout un plan d'appui, soit partout un plan d'appui local strict. Par contre (S_3) peut avoir partout un plan d'appui local pas partout strict, comme le montre l'exemple obtenu en remplaçant dans un disque circulaire du plan $z = 0$, un disque circulaire intérieur par une calote sphérique moindre qu'une demi-sphère.

Nous allons étudier les propriétés différentielles de (S_3) *dans l'hypothèse où elle ne possède de plan d'appui local en aucun point intérieur.*

Faisons d'abord quelques remarques utiles.

Soit (γ) une courbe simple fermée tracée sur (S_3) découpant sur celle-ci un morceau (Γ). Supposons que (γ) soit au sens large d'un certain côté d'un plan P non vertical, le dessous par exemple. Considérons une verticale qui rencontre P en un point p. La projection de (γ) sur la verticale parallèlement à P est un segment $\alpha\beta$ (pouvant se réduire à un point) situé au-dessous de p au sens large. De même la projection de (Γ) est un segment ab comprenant le premier. Si son extrémité supérieure est au-dessus de p, (Γ) possède nécessairement en un point intérieur un plan d'appui parallèle à P. Il en est de même si l'extrémité supérieure de ab est en p et $\alpha\beta$ au dessous.

Voyons ce qui se passe lorsque ab et $\alpha\beta$ ont leurs extrémités supérieures en p. Si (Γ) possède un point intérieur dans P celui-ci est plan d'appui. Le raisonnement vaut si ab se réduit à p.

En résumé nous pouvons énoncer le lemme suivant dont nous ferons un usage constant.

I. *Soit* (γ) *un contour fermé sans point double découpant un morceau* (Γ) *de* (S_3), *si* (γ) *reste d'un certain côté d'un plan* P, *au sens large, et si de plus un point intérieur de* (Γ) *est de l'autre côté, au sens large,* (Γ) *possède quelque part à son intérieur un plan d'appui (parallèle à* P).

Voici encore une remarque utile.

II. (S_3) *ne peut contenir aucun morceau d'un demi-cône simple.*

Il suffira de montrer que tout secteur d'un demi-cône simple possède au moins un plan d'appui, le même tout le long d'une génératrice.

Soit donc un secteur $(\omega L_1, \omega L_2)$ obtenu par la variation d'une génératrice ωL. Nous pouvons prélever sur ce secteur un secteur partiel $(\omega L_1, \omega L_3)$ tel que l'angle $L_1 \omega L$ reste inférieur à un petit angle donné ε lorsque ωL par-

(¹) Ces définitions sont évidemment indépendantes du fait que (S_3) est d'ordre 3.

court le secteur $(\omega L_1, \omega L_3)$. Prenons alors dans le plan $L_1\omega L_3$ une demi-droite ωD faisant avec ωL_1 un angle 3ε. Lorsque ωL varie de ωL_1 à ωL_3 l'angle des plans $L_1\omega L_3$ et $D\omega L$ varie d'une manière continue et reste borné. Sa borne supérieure correspond à un plan d'appui.

27. Points non ordinaires. — Je vais, pour commencer, montrer que *tous les points intérieurs de* (S_3) *sauf peut-être quatre au plus sont des points ordinaires.* Pour simplifier, je désignerai par la lettre A, affectée ou non d'accent ou d'indice, les points intérieurs de (S_3) qui ne sont pas des points ordinaires, et de même par la lettre B les points situés sur le bord.

Étudions d'abord les sections verticales de (S) contenant un point A. Soit $\overset{\frown}{B_1AB_2}$ l'une d'elle et désignons par AD_1 et AD_2 les demi-tangentes en A $(AD_1$ étant celle du côté de $\overset{\frown}{AB_1})$. Ces deux demi-tangentes ne peuvent être verticales et opposées car A serait point ordinaire. Si elles sont opposées sans être verticales l'arc $\overset{\frown}{B_1AB_2}$ est un segment rectiligne [n° 19].

Supposons AD_1 et AD_2 non opposées. Elles sont nécessairement (dans le plan de l'arc) de part et d'autre de la verticale de A au sens large. Soient AD'_1 et AD'_2 les demi-droites respectivement opposées. Invoquant encore les conclusions du n° 19 on peut affirmer que $\overset{\frown}{B_1A}$ et $\overset{\frown}{AB_2}$ sont respectivement dans les angles $D_1AD'_2$ et $D_2AD'_1$. Lorsque AD_1 et AD_2 sont confondues, (nécessairement verticales) ces derniers angles sont deux demi-plans. Dans les deux cas, si M est un point de $\overset{\frown}{B_1AB_2}$ (distinct de A et des extrémités) intérieur à l'un des angles $D_1AD'_2$, $D_2AD'_1$, ce point est ordinaire; c'est une traversée tandis que A est un retour pour la droite AM, qui ne possède pas d'autre point sur l'arc [n° 8, II].

Supposons maintenant que $\overset{\frown}{AB_2}$, par exemple, possède un point intérieur N sur AD_2 ou AD'_1. Considérons d'abord le premier cas. Il résulte de ce qui vient d'être dit que l'arc partiel $\overset{\frown}{AN}$ de $\overset{\frown}{AB_2}$ est sur AD_2 Dans le deuxième cas on voit aisément que $\overset{\frown}{NB_2}$ est sur AD'_1 et $\overset{\frown}{B_1A}$ sur AD_1.

Pour simplifier le langage nous appellerons, *supplément* d'un segment non vertical M_1M_2, intérieur au cylindre projetant verticalement (S_3), l'ensemble des points de la droite M_1M_2 situés dans le cylindre et extérieurs au segment M_1M_2. Ce supplément se compose de deux segments.

Avec cette convention nous pouvons dire :

I. Si l'arc $\overset{\frown}{B_1AB_2}$ possède un point intérieur N (distinct de A) sur un côté des angles $D_1AD'_2$, $D_2AD'_1$, ou bien le segment AN est sur (S_3) ou bien son supplément.

II. Voici encore une remarque qui nous sera très utile. Soient A un point

intérieur non ordinaire. U et V deux points intérieurs de (S_3) choisis de telle manière que le plan vertical contenant $\overset{\frown}{UV}$ ne passe pas par A. L'arc $\overset{\frown}{UV}$ est du troisième ordre au plus. Le segment AM et *a fortiori* la droite AM ne peuvent rester sur (S_3) quand M parcourt $\overset{\frown}{UV}$ sans quoi la surface contiendrait un morceau de cône du troisième ordre au plus, ce qui impliquerait un plan d'appui local [n° 26, II]. Il existe donc un point M′ tel que le segment AM′ ne soit pas sur la surface. M étant un point assez voisin il en sera de même pour le segment AM puisque (S_3) est un ensemble fermé. On peut donc trouver un arc partiel $\overset{\frown}{U'V'}$ de $\overset{\frown}{UV}$ tel que le segment AM ne soit pas sur (S_3) quand M parcourt $\overset{\frown}{U'V'}$. Mais le raisonnement vaut pour le supplément de AM. Il existe par conséquent un arc partiel $\overset{\frown}{U_1V_1}$ de $\overset{\frown}{U'V'}$, donc de $\overset{\frown}{UV}$ possédant la propriété suivante : quel que soit M sur $\overset{\frown}{U_1V_1}$, ni le segment AM ni son supplément ne sont sur (S_3). Considérons alors la section de la surface par le plan vertical de AM (M étant donné sur $\overset{\frown}{U_1V_1}$), soit $\overset{\frown}{B_1AB_2}$. Il résulte immédiatement de ce qui a été dit au début du présent numéro que la droite AM ne porte aucune des demi-tangentes en A et que celles-ci sont du même côté au sens strict. On en déduit que A et M sont respectivement retour et traversée pour la sécante AM, laquelle ne contient pas d'autre point de l'arc.

28. Soient maintenant A_1 et A_2 deux points A. Considérons la section $\overset{\frown}{B_{1,2}A_1B_{2,1}}$, de (S_3) par le plan vertical de A_1A_2. Si les demi-tangentes en A_1 sont confondues la droite A_1A_2 est sur la surface. Dans le cas contraire, A_2 ne pouvant être extérieur à l'ensemble des deux angles formés l'un par les deux demi-tangentes en A_1 à l'arc $\overset{\frown}{B_{1,2}A_1B_{2,1}}$, l'autre par les demi-droites opposées, il faut nécessairement que A_1A_2 ou son supplément soient sur (S_3). Dans ce dernier cas l'arc $\overset{\frown}{A_1A_2}$ est d'un même côté de A_1A_2, avec lequel il n'a en commun que ses extrémités. En effet, supposons que $\overset{\frown}{A_1A_2}$ ait un point M intérieur au segment; la demi-tangente en A_1 étant distincte de A_1A_2 une sécante convenable issue de A_2 donnerait pour $\overset{\frown}{A_1M}$ deux traversées, ce qui est impossible puisque A_2 n'est pas un point ordinaire.

En résumé *si* A_1 *et* A_2 *sont deux points* A *ou bien la droite* A_1A_2 *est sur* (S_3) *ou bien c'est le segment* A_1A_2 *ou son supplément, dans ce dernier cas l'arc* $\overset{\frown}{A_1A_2}$ *est d'un même côté de* A_1A_2 *avec lequel il n'a en commun que ses extrémités.*

29. Supposons maintenant qu'un plan vertical Q contienne trois points A, soient : A_1, A_2, A_3, dans l'ordre où ils se trouvent sur la section de (S_3) par le

plan. Si ces trois points sont alignés le segment A_1A_3 est sur (S_3), les demi-tangentes en A_2 à la section de (S_3) par Q sont opposées. Donc la droite A_1A_3 est sur la surface.

Dans le cas contraire le supplément de A_1A_3 est sur (S_3) et la section de cette surface par Q est une ligne brisée de quatre côtés dont les extrêmes sont alignés. On en déduit immédiatement qu'un plan vertical Q ne peut contenir quatre points A non alignés.

30. Nous venons de voir que si trois points A_1, A_2, A_3, situés dans Q sont alignés, la droite qui les porte est sur (S_3). Voyons les choses de plus près.

Donnons-nous dans un plan parallèle à Q, mais distinct de lui, deux points intérieurs de (S_3) : U et V, D'après la remarque II du n° 27 on peut trouver sur $\overset{\frown}{UV}$ un arc partiel $\overset{\frown}{U_1V_1}$ possédant la propriété suivante :

M étant un point quelconque de $\overset{\frown}{U_1V_1}$ la section de (S_3) par le plan vertical de A_1M comporte par rapport à la sécante A_1M un retour en A et une traversée en M seuls points de (S_3) sur la sécante. Considérant ensuite A_2, puis A_3, on obtiendra un arc $\overset{\frown}{U_3V_3}$ de $\overset{\frown}{UV}$ tel que la propriété précédente soit vérifiée pour les sections par les plans verticaux de A_2M et A_3M.

Soit alors M un point de $\overset{\frown}{U_3V_3}$ et P le plan A_1A_3M. Nous obtenons dans les plans verticaux de A_iM $(i=1, 2, 3)$ des arcs $\overset{\frown}{B_{i,1}A_iMB_{i,2}}$. Pour fixer les idées supposons A_2 entre A_1 et A_3.

Si les arcs $\overset{\frown}{A_1M}$ et $\overset{\frown}{A_3M}$ sont du côté opposé à $\overset{\frown}{A_2M}$, le morceau de (S_3) limité par le contour MA_1A_3M possède des points intérieurs du côté opposé (par rapport à P) à celui où se trouve le contour. Ceci impliquant pour (S_3) un plan d'appui local [n° 26, I] l'hypothèse est à écarter.

Reste à examiner le cas où $\overset{\frown}{A_1M}$ ou $\overset{\frown}{A_3M}$, le premier par exemple, est du même côté que $\overset{\frown}{A_2M}$. Coupons par un plan vertical passant par A_3 et rencontrant les arcs $\overset{\frown}{B_{1,1}A_1}$ et $\overset{\frown}{B_{1,2}A_2}$ en des points B_1'' et B_2''. Ces points sont au sens strict d'un même côté de P. L'arc $\overset{\frown}{B_1''B_2''}$ de la section est donc de ce côté au sens strict sans quoi A_3 serait point ordinaire. Le contour $MB_1''B_2''M$ est alors d'un côté de P alors qu'un point intérieur de A_1A_2, c'est-à-dire intérieur au morceau de (S_3) limité par le contour est dans P. Ceci est impossible pour la même raison que tout à l'heure. En définitive nous avons établi que (S_3) *ne peut avoir trois points* A *alignés*.

31. Considérons maintenant trois points A : A_1, A_2, A_3 qui ne sont situés dans un même plan vertical. Les trois segments A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 ne peuvent

être sur (S_3), il y aurait un plan d'appui local [n° 26, I]. Je vais montrer qu'on ne peut avoir non plus un seul segment sur (S_3). Examinons ce cas et pour fixer les idées supposons le segment A_2A_3 sur la surface, A_1A_2 et A_1A_3 n'y étant pas les suppléments de A_1A_2 et A_1A_3 s'y trouvent alors. Étudions la disposition de la surface par rapport au plan P défini par les trois points A_i. On a vu plus haut que l'arc $\overset{\frown}{A_1A_2}$ est d'un même côté de sa corde. Pour fixer les idées supposons-le au-dessus. D'après la remarque II faite au n° 27 il existe au voisinage de A_2 sur le segment A_2A_3 un point M tel que la section verticale de (S_3) par le plan vertical de A_1M n'ait en commun avec cette droite que deux points : $A\xi$ qui est un retour et M une traversée. L'arc $\overset{\frown}{BA_1}$ de cette section (B étant du côté opposé à M) est donc au-dessus de P pourvu que M soit assez voisin de A_2. De la même manière on peut trouver sur le prolongement de A_3A_1 du côté de A_1 un point M′, voisin de A_1 tel que la section de (S) par le plan vertical de A_2M' n'ait sur la droite A_2M' que les points A_2 (retour) et M′ traversée. En choisissant M′ assez voisin de A_1 on aboutit à une contradiction, car le prolongement de l'arc $\overset{\frown}{A_2M'}$ du côté de A_2 rencontre $\overset{\frown}{BA_1}$.

Si nous rapprochons le dernier résultat obtenu du fait que (S_3) ne peut posséder trois points A alignés nous pouvons affirmer que *le triangle défini par trois points intérieurs non ordinaires possède zéro ou deux de ses côtés sur* (S_3), *que le plan du triangle soit vertical ou non.* Dans le premier cas il y en a exactement deux.

32. La limitation à quatre du nombre maximum des points A va se faire sans difficulté. Supposons l'existence de cinq points A, soient $A_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$. Je vais montrer pour commencer qu'on peut toujours choisir trois de ces points de manière qu'aucun des côtés du triangle qu'ils forment ne soit sur (S_3). La question se pose seulement si l'un des segments (au moins) joignant deux des points, A_3 et A_4 pour fixer les idées est sur (S_3). Considérons alors les triangles $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, $A_5A_3A_4$, chacun d'eux possède un second côté (mais pas un troisième) sur (S_3), deux au moins, qu'on peut toujours supposer être issus de A_1 et A_2, aboutissent au même des deux sommets : A_3 ou A_4. En permutant au besoin A_3 et A_4, on peut supposer que c'est A_4. Le triangle $A_1A_2A_3$ n'a aucun côté sur (S_3). De plus son plan n'est pas vertical.

Pour aller plus loin il nous faut commencer par étudier la disposition de (S_3) par rapport au plan P du triangle $A_1A_2A_3$. Précisons d'abord quelques notations. Le plan vertical de $A_iA_j(j=i)$ coupe (S_3) suivant un arc que nous désignerons par $\overset{\frown}{B_{i,j}A_iA_jB_{j,i}}$. Les arcs partiels $\overset{\frown}{B_{i,j}A_i}$ et $\overset{\frown}{A_jB_{j,i}}$ sont rectilignes et dans P, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ est d'un certain côté de ce plan (dans lequel il n'a que ses extrémités). Les arcs rectilignes ou non $\overset{\frown}{A_iB_{i,j}}$ et $\overset{\frown}{A_iA_j}$ découpent dans (S_3) sept

morceaux que l'on peut désigner sans ambiguïté par $(A_1A_2A_3)$, $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ et deux autres obtenus par permutations circulaires à partir du second, $(B_{1,3}A_1A_2B_{2,3})$ et deux autres obtenus par permutations circulaires.

Considérons l'arc $\overset{\frown}{A_1A_2}$ et supposons-le au-dessus de P par exemple. Soit N un point de $B_{1,3}A_1$. Si N est assez voisin de A_1, l'arc $\overset{\frown}{A_2M}$ de (S_3), où M désigne un point quelconque de A_1N, aura des points au dessus de P. Mais d'après la remarque II du n° 27, il y a aussi près qu'on veut de tout M un point M′ tel que la section de (S_3) par le plan vertical de A_2M' ait en A_2 et M′ : retour et traversée par rapport à la sécante A_2M'. Il existe donc dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ un voisinage de A_1 situé au dessous de P au sens large. Mais si ce voisinage avait un point intérieur dans P ce plan serait d'appui local au point considéré. Ainsi au voisinage de A_1 dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ et pour la même raison au voisinage de A_2 dans $(B_{2,3}A_2A_{2,1})$, la surface (S_3) est par rapport à P du côté opposé à celui de $\overset{\frown}{A_1A_2}$. De là on déduit que les trois arcs sont d'un même côté, que pour fixer les idées nous supposerons être le dessus. Le lemme I du n° 26 permet d'affirmer que $(A_1A_2A_3)$ est au-dessus de P au sens strict, sauf bien entendu en ce qui concerne les trois points A_i Considérons maintenant $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ et supposons qu'il possède un point M_1 au-dessous de P au sens large, situé en dehors des segments $A_2B_{2,1}$ et $A_3B_{3,1}$, M_1 ne peut être sur $\overset{\frown}{A_2A_3}$. Coupons (S_3) par le plan vertical de A_1M_1. La section obtenue contient sur $\overset{\frown}{A_2A_3}$ un point N_1 situé au-dessus de P au sens strict. Prenons alors une sécante Δ joignant A_1 à un point intérieur du segment M_1N_1; l'arc $\overset{\frown}{A_1M_1}$ la traverse. Par suite A_1 est pour Δ un retour. L'arc de la section verticale situé dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ est donc au-dessus de Δ. Nous aboutissons à une contradiction, car Δ peut être choisie aussi près qu'on veut de P tandis que $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ est au voisinage de A_1 au-dessous de P au sens strict. Ainsi tous les points de $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$, sauf ceux des segments $A_2B_{2,1}$ et $A_3B_{3,1}$, sont au-dessus de P au sens strict. Le résultat est le même pour $(B_{3,2}A_3A_1B_{1,2})$ et $(B_{1,3}A_1A_2B_{2,3})$. Enfin en raisonnant comme pour le voisinage de de A_1 on voit que $(B_{1,3}A_1B_{1,2})$ tout entier a ses points, sauf ceux des segments $A_1B_{1,2}$, $A_1B_{1,3}$ au-dessous de P au sens strict. En résumé *la section de* (S_3) *par* P *se compose uniquement des segments* $A_iB_{i,j}$, *le long desquels la surface traverse* P.

33. Considérons un quatrième point A. Il ne pourrait être dans P sans être à l'intérieur d'un segment $A_iB_{i,j}$ ce qui est impossible car trois points A ne peuvent être alignés [n° 30]. D'autre part il résulte immédiatement du n° 31 que les trois segments AA_1, AA_2, AA_3 sont sur (S_3) à moins qu'aucun n'y soit. Voyons ce qui se passe suivant les différentes positions de A.

I. Le point A est au-dessous de P, dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ par exemple. Le

segment AA_2 ne peut être sur (S_3), il faudrait qu'il rencontre $A_1B_{1,3}$. Donc aucun des segments $AA_i (i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3).

II. Le point A est au-dessus de P, mais pas intérieur à $(A_1A_2A_3)$, dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ par exemple. Si A est sur $\widehat{A_2A_3}$ les segments AA_2 et AA_3 sont sur (S_3) [n° 29], il en est donc de même de AA_1. Supposons A en dehors de $\widehat{A_2A_3}$, si le segment AA_2 n'était pas sur (S_3) son supplément y serait. Ceci est impossible car les deux segments constituant ce supplément ne peuvent être au-dessus de P. Donc les segments $AA_i (i=1, 2, 3)$ sont sur (S_3).

III. Le point A est intérieur à $(A_1A_2A_3)$, là les deux cas sont possibles.

34. Revenant à l'hypothèse faite au début du numéro précédent, nous allons placer A_4 dans toutes les positions possibles et montrer chaque fois que A_5 ne saurait exister.

Utilisant les notations définies au n° 32 je désignerai la section verticale de (S_3) par le plan contenant deux points A_i et A_j (où i et j sont des entiers distincts au plus égaux à 5) par $B_{i,j}A_iA_jB_{j,i}$. Nous savons que si l'arc $\widehat{A_iA_j}$ est différent de sa corde $\widehat{B_{i,j}A_i}$ et $\widehat{A_jB_{j,i}}$ sont sur le support de A_iA_j.

Examinons donc toutes les positions poseibles pour A_4.

I_1. A_4 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$ et les segments A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 ne sont pas sur (S_3).

1° A_5 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$. Il est dans un des trois morceaux découpés dans ce domaine par $\widehat{A_4A_1}$, $\widehat{A_4A_2}$, $\widehat{A_4A_3}$, par exemple dans $(A_4A_1A_2)$. Il ne peut être sur le segment $B_{4,3}A_4$ sans quoi A_3, A_4, A_5 seraient alignés. En permutant au besoin A_1 et A_2 on peut supposer qu'il est du côté de A_1 par rapport à $B_{4,3}A_4$. Si A_4A_5 (1) n'est pas sur (S_3), $A_5B_{5,1}$ s'y trouve et rencontre $B_{4,3}A_4$. On en déduit que A_5 est dans le plan $A_1A_3A_4$. Ce qui est impossible car aucun des côtés du triangle $A_1A_3A_4$ n'est sur (S_3) (le triangle $A_1A_3A_4$ joue ici le rôle de $A_1A_2A_3$ au numéro précédent). Si A_1A_5 est sur (S_3), il en est de même de A_5A_2 qui croise $B_{4,3}A_4$. Mais alors A_5 est dans le plan $A_2A_3A_4$, ce qui conduit encore à une impossibilité.

2° A_5 est dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ ou dans un des deux autres domaines analogues. On peut toujours supposer qu'il est dans le premier. Dans ce cas ni A_5A_2 ni A_5A_3 ne sont sur (S_3). En permutant alors A_1 et A_3 on est ramené au cas précédent car A_5 ne peut être ni sur $B_{1,2}A_1$ ni sur $B_{1,3}A_1$.

3° A_5 est dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ ou l'un des deux autres domaines analogues, le premier par exemple. Il ne peut être ni sur $B_{1,2}A_2$, ni sur $B_{3,1}A_3$ pas plus

(1) Pour éviter de répéter le mot « segment », nous conviendrons que si deux majuscules, affectées ou non d'indices ou d'accents, désignent chacune un point, leur ensemble représente le segment qui les joint.

que sur $A_4B_{4,1}$. Mais on sait [n° 33] que A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, sont sur (S_3). Si A_5 est du côté de A_2 par rapport à $A_4B_{4,1}$, A_5A_1 croise $B_{4,3}A_4$, et les points A_2, A_3, A_1, A_5, sont dans un même plan. Nous avons une contradiction car le triangle $A_2A_3A_4$ n'a aucun côté sur (S_3). La conclusion est évidemment la même si A_5 est du côté de A_3 par rapport à $A_4B_{4,1}$.

Si donc A_4 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$ et si aucun des segments $A_4A_i(i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3), A_5 ne peut exister.

I_2. A_4 intérieur à $(A_1A_2A_3)$ et les trois segments $A_4A_i(i=1, 2, 2)$ sont sur (S_3).

1° A_5 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$. Si aucun des $A_5A_i(i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3) on est ramené au cas I_{13}, 1°. Si tous ces segments sont sur (S_3) on trouve un triangle dont les trois côtés sont sur la surface. Le point A_5 ne peut donc être intérieur à $(A_1A_2A_3)$.

2° A_5 dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$.

Il ne peut être sur $A_1B_{1,2}$ ou $A_1B_{1,3}$, de plus aucun des segments A_5A_i, $(i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3) [n° 33, II]. Le segment $A_1B_{1,5}$ est donc sur la surface, il ne peut contenir A_4; ceci conduirait en effet à trois points alignés. $A_1B_{1,5}$ rencontre donc A_4A_2 ou A_4A_3. On peut toujours supposer que c'est le premier. Dans ces conditions A_5, A_1, A_4, A_3 sont coplanaires; mais comme le triangle $A_1A_3A_5$ n'a aucun côté sur (S_3) on est encore conduit à une impossibilité. Il ne peut donc y avoir de cinquième point dans le domaine $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ ni dans les deux autres qui s'en déduisent par permutation circulaire.

3° A_5 dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$.

Les segments $A_5A_i(i=1, 2, 3)$ sont sur (S_3). A_5A_1 rencontre nécessairement A_2A_4 ou A_3A_4 en dehors de A_4 (sans quoi trois A seraient alignés). On obtient alors un triangle dont les côtés sont sur la surface, ce qui est impossible.

En résumé nous pouvons affirmer que si A_4 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$, A_5 ne peut exister.

II. A_4 est dans un domaine tel que $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$. Comme A_4A_2 et A_4A_3 ne sont pas sur la surface, il suffit de permuter A_1 et A_4 pour se ramener au cas I; A_5 ne peut donc exister.

III. A_4 est dans un domaine $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$. D'après ce qui précède il suffira de placer A_5 dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ ou dans un domaine analogue par exemple $(B_{3,2}A_3A_1B_{1,2})$. Dans les deux cas les 6 segments A_4A_i, A_5A_i, $(i=1, 2, 3)$ sont sur (S_3) et l'on voit aisément que deux au moins se croisent, ce qui conduit à un triangle dont les côtés sont sur la surface, c'est-à-dire encore à une impossibilité.

La démonstration est achevée. Je dis que s'il y a quatre points A ils ne sont

pas dans un même plan. On a vu plus haut que si un des quatre triangles formés avec trois des points n'a aucun côté sur (S_3) son plan ne peut contenir un quatrième point A. Il suffira donc de considérer le cas où chacun des quatre triangles possède deux de ses côtés sur (S_3). Considérons $A_1A_2A_3$; deux de ses côtés A_1A_2, A_1A_3 par exemple sont sur (S_3), A_2A_3 n'y étant pas. Mais alors A_4A_2 et A_4A_3 s'y trouvent. Si les quatre points sont dans un plan, celui-ci contient un contour fermé $A_1A_2A_4A_3A_1$, ce qui conduit à un plan d'appui local [n° 26, I].

En définitive nous avons la proposition suivante :

Si (S_3) *ne possède nulle part à son intérieur de plan d'appui local, tous ses points intérieurs sont ordinaires sauf peut être 4 au plus; le segment joignant deux points non ordinaires ou son supplément, ou les deux sont sur* (S_3)*; s'il y a quatre points non ordinaires, ils ne sont pas dans un même plan.*

35. Étudions maintenant le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ en un point intérieur ordinaire M. Il ne peut être ici du sixième ordre conique car un morceau de cône possède des plans d'appui locaux [n° 20 et 26, II].

Si $\mathcal{D}(M)$ est du quatrième ordre conique, il ne peut avoir plus de deux couples de demi-tangentes opposées, car dans ce cas (S_3) possède deux angles plans de sommet M. Il faut examiner de plus près le cas où $\mathcal{D}(M)$ possède exactement deux couples de demi-tangentes opposées, situés dans un plan P. On a vu au n° 23 *bis* qu'il existe dans tous les cas deux angles opposés D_1MD_2 et $D'_1MD'_2$, dont les côtés forment les couples de demi-tangentes opposées et tels que le secteur (D_1, D_2) de $\mathcal{D}(M)$ soit d'un côté de P au sens strict, le secteur (D'_1, D'_2) étant du même côté au sens strict ou entièrement dans le plan. Considérons un voisinage Σ_M rapporté comme d'habitude à des axes $M\xi\eta\zeta$. Pour fixer les idées choisissons $M\zeta$ du côté où se trouve le secteur (D_1, D_2) et appelons dessus de P le côté de $M\zeta$. Le morceau de Σ_M qui se projette parallèlement à $M\zeta$ dans l'angle D_1MD_2 a au voisinage de M des points du côté de $M\zeta$. Coupons par un plan Q parallèle à $M\zeta$, passant par un de ces points et rencontrant MD_1 et MD_2 à l'intérieur de Σ_M. Nous obtiendrons sur Σ_M un arc que nous pouvons appeler $\overset{\frown}{D_1D_2}$. Soit M_1 le point de cote maximum de cet arc, la parallèle à P menée par M_1 dans le plan Q définit avec M un plan R, tel que le contour MD_1D_2M soit au-dessous de lui. Si nous établissons que le morceau limité par ce contour possède un point intérieur situé dans R ou au-dessus nous pourrons affirmer l'existence pour (S_3) d'un plan d'appui local [n° 26, I]. Ce qui nous conduira en définitive à la conclusion que $\mathcal{D}(M)$ ne peut pas être du quatrième ordre conique. Soit $\overset{\frown}{MM_1}$ l'arc joignant M à M_1 sur la section de Σ_M par le plan ζMM_1. Désignons par MD la demi-tangente en M à $\overset{\frown}{MM_1}$ et par ML la demi-droite opposée à la seconde demi-tangente en M à la section de Σ_M par le plan ζMM_1. On sait que MD est au-dessus de P au sens strict, alors que ML est certainement

au-dessous au sens large. D'autre part l'arc $\overset{\frown}{MM_1}$ appartient à l'angle LMD [n° 23]. Si M_1 est intérieur à cet angle il y aura sur $\overset{\frown}{MM_1}$ des points situés au-dessus de R au sens strict. Si M_1 est sur un des côtés de l'angle ce ne peut être que sur MD. On voit alors aisément que $\overset{\frown}{MM_1}$ se réduit au segment MM_1. En effet, si $\overset{\frown}{MM_1}$ possédait un point N_1 au-dessous de MM_1 une sécante joignant M à un point intérieur du segment N_1M donnerait un retour en M et deux traversées, ce qui est impossible. La démonstration est achevée.

36. Jusqu'à présent nous avons établi qu'en tout point ordinaire M de (S_3) — supposée n'avoir pas de plans d'appui locaux — le faisceau dérivé est nécessairement du second ordre conique. Trois cas restent à examiner suivant qu'on a un vrai demi-cône, un dièdre ou un plan. Considérons d'abord le premier. Soit Σ_M un voisinage de M où $\mathcal{C}(M)$ est un vrai demi-cône. $\mathcal{C}(M)$ étant convexe il existe un plan R le laissant d'un même côté au sens strict. Ce plan ne peut passer par $M\zeta$ lequel contient deux rayons de $\mathcal{C}(M)$. Il est immédiat qu'on pourra choisir Σ_M assez petit pour qu'il soit par rapport à R du même côté que $\mathcal{C}(M)$, autrement R contiendrait des points de (S_3) aussi voisins de M que l'on veut et par suite une demi-tangente en M ce qui est impossible.

En définitive $\mathcal{C}(M)$ ne peut être en tout point ordinaire qu'un *dièdre* ou un *plan*.

37. Étudions pour commencer le cas du *dièdre*.

Soit M un point intérieur de (S_3) où le faisceau dérivé est un dièdre. (*Nous ne supposons pas que* M *est un point ordinaire*). D'après les résultats du n° 24, II, l'arête Δ du dièdre ne peut être verticale. D'autre part on voit immédiatement que les faces P_1 et P_2 ne peuvent être d'un même côté du plan vertical de Δ au sens strict. La verticale de M pénètre dans le dièdre (Δ, P_1P_2), à son intérieur s'il n'a pas une face verticale. Pour fixer les idées nous supposerons que la verticale descendante de M pénètre dans le dièdre. Donnons-nous un plan R contenant Δ et laissant le dièdre au-dessous au sens strict. Soit alors $\overset{\frown}{BMB'}$ la section de (S_3) par un plan vertical ne contenant pas Δ. Désignons par r, p_1, p_2 les traces respectives de ce plan sur R, P_1, P_2. Les demi-droites Mp_1 et Mp_2 sont les demi-tangentes en M à l'arc $\overset{\frown}{BMB'}$; elles sont au-dessous de r. Autrement dit M est un retour pour $\overset{\frown}{BMB'}$ par rapport à r. Il résulte alors de la proposition II du n° 8 que l'arc possède un point au plus sur r, nécessairement traversée ou extrémité. Par suite si $\overset{\frown}{BM}$, par exemple, possède un point au-dessus de R, $\overset{\frown}{MB'}$ est au-dessous au sens strict (sauf bien entendu en ce qui concerne M). Cette remarque va jouer un rôle essentiel. Démontrons pour commencer que Δ est toute entière sur (S_3). Pour cela considérons la section de la surface par le

plan vertical de Δ. Il s'agit de montrer qu'elle n'a pas de point en dehors de cette droite. Supposons d'abord qu'elle possède un point N_0 au dessus de Δ. On peut toujours supposer que ce point n'est pas sur le bord de (S_3). Il est alors possible de trouver sur la section de la surface par le plan vertical mené par N_0 perpendiculairement à celui qui projette Δ, un arc $\overset{\frown}{N'N_0N''}$ (ayant N_0 à son intérieur et situé au-dessus d'un plan donné R laissant (Δ, P_1P_2) au-dessous au sens strict. N étant un point quelconque $\overset{\frown}{N'N_0N''}$ distinct de N_0, considérons la section de (S_3) par le plan vertical de NM. Nous obtenons un arc $\overset{\frown}{BNMB'}$. D'après ce qui précède l'arc $\overset{\frown}{MB'}$ est au-dessous de R au sens strict. On en déduit que l'arc $\overset{\frown}{MB'_0}$, correspondant à N_0 est au-dessous au sens large. Mais si un point intérieur de cet arc était sur Δ, R serait plan d'appui local en ce point. En conclusion on peut affirmer que si la section de (S_3) par le plan vertical de Δ n'est pas sur cette arête elle possède dans tous les cas un point intérieur, soit I_0, au-dessous d'elle. Considérons alors deux demi plans R_1 et R_2 d'arête Δ et tels que leurs plans supports laissent (Δ, P_1P_2) au-dessous d'eux au sens strict, choisis de manière que (Δ, R_1R_2) contienne (Δ, P_1P_2) à son intérieur; le point I_0 sera dans ces conditions intérieur à (Δ, R_1R_2). Coupons alors (S_3) par le plan vertical mené par I_0 perpendiculairement au plan vertical de Δ. On pourra trouver sur la section un arc partiel $\overset{\frown}{I'I_0I''}$ contenant I_0 à son intérieur et tout entier intérieur au dièdre (Δ, R_1R_2). Considérons les verticales de I′ et I″ chacune d'elles rencontre une des faces de (Δ, R_1R_2). On peut toujours choisir les notations de manière que la première rencontre R_1, soit I'_1 le point d'intersection; la seconde rencontrera R_2 en un point I''_2. D'autre part si I′ et I″ sont assez voisins de I_0 l'arc $\overset{\frown}{I'I''}$ sera au-dessous du segment $I'_1I''_2$, puisque I_0 est au-dessous de Δ. Considérons alors le morceau de (S_3) limité par les arcs $\overset{\frown}{I'I''}$, $\overset{\frown}{I'M}$ et $\overset{\frown}{I''M}$; son contour aura tous ses points, sauf M, au dessous du plan $I'_1I''_2M$. Mais la demi-droite $M\Delta_0$ d'origine M, portée par Δ et dirigée du côté de I_0 étant une demi-tangente en M à (S_3) il existe sur la surface des points M′ aussi voisins qu'on veut de M tels que la demi-droite MM′ tende vers $M\Delta_0$. Il en résulte que le morceau $(MI'I'')$ possède des points au-dessus du plan $MI'_1I''_2$ ce qui implique l'existence d'un plan d'appui local [n° 26, I]. Nous avons donc bien établi que *si en un point intérieur* M *le faisceau dérivé est un dièdre, l'arête de celui-ci est toute entière sur* (S_3).

38. Poursuivant notre étude, nous allons préciser la disposition de (S_3) par rapport aux supports de P_1 et P_2. Prenons sur Δ un point M′ intérieur à (S_3) et distincts de M et donnons-nous, comme précédemment un plan R passant par Δ et laissant P_1 et P_2 au-dessous de lui au sens strict. Considérons la section L′ de

(S_3) par un plan vertical π' contenant M', mais pas Δ. Je dis que L' traverse R en M'. En effet, L' étant d'ordre 3 au plus on peut trouver sur elle deux arcs partiels $\widehat{N'_1M'}$, $\widehat{M'N'_2}$ situés de part et d'autre du plan vertical de Δ, chacun d'eux étant sur R ou d'un même côté de R au sens strict (il suffit de considérer l'intersection de L' avec la trace de π' sur R) Soit N un point variable de $\widehat{N'_1M'N'_2}$, la section de (S_3) par le plan vertical de MN est un arc $\widehat{B'NMB}$ et nous savons que si N est au-dessus de R, l'arc $\widehat{MB}$ est au-dessous, et que si N est au-dessous de R l'arc $\widehat{NM}$ est au-dessous et enfin que si N est dans R les deux arcs $\widehat{NM}$ et $\widehat{MB}$ sont au-dessous.

Ceci dit supposons que $\widehat{N'_1M'}$ par exemple soit dans R; lorsque N décrit $\widehat{N'_1M'}$ l'arc $\widehat{NMB}$ reste au-dessous de R. Nous distinguerons alors deux cas, suivant que $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessus ou au-dessous de R au sens large. Si $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessus au sens large l'arc $\widehat{MB}$ correspondant à N sur $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessous de R. On en déduit que lorsque N décrit $\widehat{N'_1N'_2}$ le morceau de (S_3) balayé par $\widehat{MB}$ est au-dessous de R sauf lorsqu'il est sur Δ. R est donc un plan d'appui local.

Si $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessous au sens large on considérera le morceau balayé par $\widehat{NM}$ et l'on aboutira à la même conclusion. Nous sommes donc assurés que chacun des arcs $\widehat{N'_1M'}$ et $\widehat{M'N'_2}$ est d'un même côté de R au sens strict. S'ils sont tous les deux au-dessus le morceau balayé par $\widehat{MB}$ possède R comme plan d'appui local, s'ils sont tous les deux au-dessus ce sera le morceau balayé par $\widehat{NM}$. En résumé : L' traverse R en M'.

Pour simplifier le langage désignons par *gauche* et *droite* les deux parties de (S_3) séparées par Δ et supposons que L' soit au-dessus de R au voisinage gauche de M'. Prenons sur Δ du côté opposé à M' par rapport à M un point M'' et coupons (S_3) par un plan vertical π'' ne contenant pas Δ. L'arc section, soit L'' est au-dessous de R au voisinage droit de M''. Il suffit pour le voir de considérer sur L' un point voisin de M' à gauche et la section par le plan vertical contenant ce point et M. Comme L'' traverse R en M il est au-dessus au voisinage gauche de M''. On voit alors que la section de (S_3) par un plan vertical quelconque traversant Δ en un point intérieur à (S_3) est au voisinage de ce point au-dessus de R à gauche et au-dessous à droite.

Considérons encore M' sur Δ et intérieur à (S_3) et deux points analogues M'' et M''', le second étant au delà de M, le troisième entre M' et M. Soient π, π'', π''' trois plans verticaux parallèles traversant Δ en M, M'', M''' et L, L'', L''' les sections de (S_3) par ces plans. Au voisinage gauche de M'' et de M''', L'' et L''' sont au-dessus de R, tandis que L est au-dessous. Si donc nous coupons (S_6) par un plan

vertical π' contenant M' et un point de L'' situé à gauche de M'' au voisinage de M'', on voit immédiatement que, si ce voisinage est assez étroit, la trace de L' sur R traverse (S_3) une fois entre L''' et L et une seconde fois entre L et L''. On déduit alors du n° 10 que M' est *ordinaire* et que la trace en question est extérieure à $\mathfrak{C}(M')$. Mais on a vu plus haut [n° 36] qu'en tout point ordinaire le faisceau dérivé est un dièdre ou un plan. Si donc $\mathcal{D}(M')$ est un dièdre son arête est Δ, si c'est un plan il contient cette droite. D'après ce qu'il vient d'être dit aucun des demi-plans d'arête Δ constituant $\mathcal{D}(M')$ n'est sur R.

Considérons maintenant un second plan tel que R, soit $\overline{R}$. S'il est au-dessous de R à gauche de Δ, un arc quelconque L' section par un plan vertical π' traversant Δ en un point quelconque M' intérieur à (S_3), distinct de M, sera au-dessus de R au voisinage gauche de M'. Je dis qu'il en est de même si $\overline{R}$ est au-dessus de R à gauche de Δ. S'il en était autrement la demi-tangente à gauche en M' à L' serait au-dessous de R et au-dessus de $\overline{R}$. Elle définirait un plan tel que $\overline{R}$ contenant un demi-plan de $\mathcal{D}(M')$ ce qui est impossible.

En résumé nous sommes arrivés à la conclusion suivante :

quels que soient R laissant (Δ, P_1P_2) au-dessous de lui au sens strict, et M' sur Δ, intérieur à (S_3) et distinct de M, toute section verticale de (S_3) contenant M' (mais pas M) est au voisinage de M' au-dessus de R d'un certain côté de Δ, indépendant de R, de M' et du plan de la section et au-dessous de R de l'autre côté.

De plus M' est *ordinaire* et $\mathcal{D}(M')$ est un dièdre d'arête Δ ou un plan la contenant.

Comme on le verra plus loin ce résultat est bien incomplet, mais c'est une étape que je n'ai pu éviter.

Pour fixer les idées nous supposerons que les arcs L' sont *au-dessus* de R au voisinage *gauche* de Δ.

39. Nous n'avons pas écarté le cas où l'une des faces de (Δ, P_1P_2) est verticale. Continuons notre étude en examinant d'abord ce cas. Comme le diédre peut être à droite ou à gauche du plan vertical de Δ, ce cas se subdivisera en deux.

a. P_1 est vertical et P_2 à droite du plan vertical de Δ.

Donnons-nous sur Δ deux points M' et M'' intérieurs à (S_3), situés de part et d'autre de M et un plan R contenant Δ et laissant (Δ, P_1P_2) au-dessous de lui au sens strict. Soit L' et L'' deux sections verticales contenant : la première M' la seconde M'', mais pas M. On peut prélever sur L' et L'' des arcs $\widehat{N'M'}$ $\widehat{N''M''}$ dont les extrémités N' et N'' sont dans un plan vertical parallèle à celui de Δ et situé à gauche de ce dernier, de telle manière que $\widehat{N'M'}$ et $\widehat{N''M''}$ soient au dessus de R.

Considérons alors l'arc $\overset{\frown}{N'N''}$. Il est possible de mener par Δ un plan tel que R, soit R laissant $\overset{\frown}{N'N''}$ est au-dessus de lui. Or il y a nécessairement au voisinage de M des points au-dessous de ce plan. Ceci conduit à une contradiction car on a un plan d'appui local [n° 26]. Le cas envisagé est impossible.

b. P_2 est vertical et P_1 à gauche du plan vertical de Δ.

Considérons encore une section verticale L' passant par un point M' de Δ. Elle est au voisinage gauche de M' au-desus de tout plan R et au-dessous au voisinage droit. Comme R peut être choisi aussi près qu'on veut de la verticale, on en déduit que $\omega(M')$ est le plan vertical support de P_2, plan traversé par la surface.

40. Je vais montrer que cette propriété se conserve lorsque le dièdre (Δ, P_1P_2) n'a pas de face verticale. Une remarque préliminaire sera nécessaire.

Désignons toujours par P_1 le demi-plan situé à gauche du plan vertical de Δ au sens strict, P_2 sera à droite également au sens strict.

Soient N_1' et N_2 deux points de (S_3) situés le premier à gauche le second à droite de Δ, tous les deux supposés au-dessous du support de P_2 au sens strict et tels que l'arc $\overset{\frown}{N_1'N_2}$ rencontre Δ en un point M' intérieur à (S_3) et distinct de M. Nous allons étudier d'abord la disposition d'un tel arc par rapport au plan support de P_2. Considérons un plan R (passant par Δ et laissant le dièdre (Δ, P_1P_2) au-dessous de lui au sens strict) et désignons par r sa trace sur le plan vertical de $\overset{\frown}{N_1'N_2}$. Faisons tendre R vers le support de P_2. Lorsqu'il sera assez près de sa limite la droite r laissera N_1' et N_2 d'un même côté au sens strict. D'autre part on a vu [n° 38] que $\overset{\frown}{N_1'N_2}$ traverse en M', l'arc à gauche étant au-dessus de r. Cela implique donc une seconde traversée entre N_1' et M'. Si r contenait un troisième point de $\overset{\frown}{N_1'N_2}$ ce serait encore une traversée [n° 6], car r ne renferme aucune extrémité de l'arc. Mais alors on aboutirait à une contradiction puisque N_1' et N_2 sont d'un même côté de r. L'arc $\overset{\frown}{M'N_2}$ est donc au-dessous de r quel qu'il soit. Il est par suite au-dessous de P_2 au sens large. On en déduit que la demi-tangente en M' à $\overset{\frown}{M'N_2}$ est dans P_2 ou au-dessous. Considérons le premier cas. Je dis que $\overset{\frown}{N_1'M'}$ est alors au-dessous du support de P_2 au sens large. En effet, supposons que cet arc possède un point N au-dessus; on pourra tracer par M' une sécante laissant N au-dessus N_2 au dessous d'elle Mais alors les arcs $\overset{\frown}{N_1'N}$ et $\overset{\frown}{M'N_2}$ traverserons la sécante chacun à leur intérieur, ce qui exige que M' soit une troisième traversée [n° 6]. Nous aboutissons à une contradiction car les extrémités de l'arc sont d'un même côté de la sécante.

Supposons maintenant que la demi-tangente $\overset{\frown}{M'D_2}$ en M' à l'arc $\overset{\frown}{M'N_2}$ soit au-dessous de P, et donnons-nous dans le plan vertical de l'arc une demi-droite M'L

passant au-dessus de N_2 et de $M'D_2$ et au-dessous de P_2 tout ceci au sens strict. Je dis que $\widehat{M'N_2}$ est au-dessous de $M'L$ au sens strict, sauf bien entendu en ce qui concerne M'. Si l'arc possédait un point sur $M'L$ ou au-dessus il traverserait deux fois une sécante légèrement au-dessous de $M'L$ et ceci à l'intérieur de de l'arc $\widehat{M'N_2}$; il faudrait alors que $\widehat{N_1'N_2}$ traverse aussi en M', ce qui conduit à une contradiction car la sécante laisse N_1' et N_2 d'un même côté.

41. La démonstration s'achèvera facilement. Supposons d'abord que (S_3) possède à droite de Δ un point N_2 au-dessous de P_2 au sens strict; N_2 peut être sur le bord mais pas sur Δ. Considérons la section de (S_3) par le plan vertical MN_2, elle est à gauche de M et dans son voisinage au-dessous du support de P_2 puisque la demi-tangente à gauche en M est dans P_1. Soit alors N_1 un point assez voisin de M pour être au-dessous du support de P_2 au sens strict. Coupons (S_3) par le plan vertical mené par N_1 parallèlement au plan vertical de Δ. Nous pourrons prélever sur cette section un arc $\widehat{N_1'N_1N_1''}$ situé tout entier au-dessous du support de P_2 au sens strict. Si N''' est un point quelconque de cet arc distinct de N_1 les considérations précédentes s'appliquent à l'arc $\widehat{N'''N_2}$. Il n'est pas possible que deux positions distinctes de N''' la demi-tangente à droite à l'arc en son point sur Δ soit dans P_2, car le morceau de (S_3) limité par les deux arcs correspondants et l'arc de $\widehat{N_1'N_1''}$ qu'ils déterminent aurait son bord au-dessous du support de P au sens large et des points intérieurs (sur Δ) dans ce plan, ce qui impliquerait un plan d'appui local [n° 26, I].]

Nous pouvons donc supposer en déplaçant légèrement $N_1'N_1''$ que les demi-tangentes à droite aux arcs $\widehat{N_1'N_2}$ et $\widehat{N_1''N_2}$ aux points M' et M'' où elles rencontrent Δ sont au-dessous de P_2. Dans ces conditions les arcs $\widehat{M'N_2}$ et $\widehat{M''N_2}$ sont au-dessous au sens strict d'un demi-plan d'arête Δ et situé lui-même au-dessous de P_2 au sens strict. Mais la demi-tangente en M à l'arc $\widehat{MN_2}$ étant dans P_2 le morceau de (S_3) limité par le segment $M'M''$ et les arcs $\widehat{M'N_2}$ et $\widehat{M''N_2}$ possède des points au-dessus du demi-plan considéré au sens strict. Nous obtenons encore un plan d'appui local.

En résumé tous les points de (S_3) situés à *droite* de Δ sont au-dessus de P au sens large. On en déduit immédiatement que tous les points intérieurs sont au dessus au sens strict, car si un point intérieur était dans P_2, son support serait plan d'appui local au point considéré. Reste à voir ce qui se passe pour les points du bord. Supposons qu'un point N du bord soit dans P_2 et coupons (S_3) par le plan vertical de NM. L'arc $\widehat{MN}$ a tous ses points sauf M et N au dessus de P. En coupant la section par une sécante de son plan, passant par M et assez voisine

de P_2 on obtiendra un retour en M et deux traversées (au moins) ce qui est impossible [n° 10].

Nous sommes désormais assurés que (S_3) est à droite de Δ au-dessus de P_2 au sens strict. Considérons alors un point quelconque de (S_3) situé à gauche de Δ, soit N_1 et coupons par le plan vertical de MN_1. Nous obtenons un arc $\widehat{N_1MB_2}$, dont l'arc partiel $\widehat{MB_2}$ est au-dessus de P_2. Si par un point N_2 voisin de M sur cet arc nous menons la droite MN_2 elle donnera en M un retour et en N_2 une traversée ce qui exige que N_1 soit au-dessous de la sécante donc au-dessous du support de P_2 au sens strict.

En définitive (S_3) est à gauche de Δ au-dessous du support de P_2 et à droite elle est au-dessus, dans les deux cas au sens strict. Il en résulte immédiatement qu'en tout point de Δ intérieur à (S_3) et distinct de M le faisceau dérivé est un plan stationnaire : le support de P_2. Il suffit de se rappeler que le demi-plan gauche de $\mathcal{D}(M')$ en un point M' distinct de M est au-dessus de tout plan R et que le demi-plan droit est au-dessous [n° 38].

42. Dans ce qui va suivre P_2 pourra être vertical ou non. Je vais montrer que le bord gauche de (S_3) possède des points au-dessous de P_1. Il en résultera en particulier que le point M est ordinaire, ce qui n'a pas été supposé.

Soient B_0 et B'_0 les extrémités du bord gauche situées sur Δ et B un point de ce dernier, distinct de B_0 et B'_0. Le demi-plan (Δ, B) est au-dessous au sens strict du demi-plan P'_2 opposé à P_2. Je dis que si B tend vers B_0, par exemple, (Δ, B) tend vers P'_2. En effet, donnons-nous un plan R voisin de P_2 (je rappelle qu'un plan R contient Δ et laisse le trièdre (Δ, P_1P_2) au-dessous de lui au sens strict) et menons par un point M_1 intérieur au segment MB_0 un plan vertical distinct de celui de Δ. A gauche de M_1 la section aura un petit arc $\widehat{N_1M_1}$ au-dessus de R. Si on coupe alors par le plan vertical de N M où N est point quelconque de $\widehat{N_1M_1}$, distinct de M, on obtiendra un arc dont l'extrémité gauche sera au-dessus de R [n° 27]. Par suite il existe sur le bord un arc $\widehat{B_1B_0}$ au-dessus de R. Comme R est aussi près qu'on veut de P'_2, le demi-plan (Δ, B) tend bien vers P'_2 quand B tend vers B_0. Il en est de même lorsque B tend vers B'_0, On en déduit que (Δ, B) varie continûment quand B décrit l'arc $B_0B'_0$ du bord gauche. Il balaye un dièdre dont la face supérieure est P'_2 et la face inférieure un demi-plan, atteint pour un point au moins B_m. Le contour du morceau gauche de (S_3) est au-dessus de (Δ, B_m) au sens large. Il en résulte que tous les points intérieurs du morceau sont au-dessus du plan au sens strict, sans quoi on aurait un plan d'appui local [n° 26]. B_m ne peut donc être au-dessus de P_1. Je dis qu'il ne peut non plus être sur lui. En effet, supposons B_m dans P_1 et coupons par le plan vertical de B_mM. Un point N intérieur à l'arc $\widehat{B_mM}$ est au dessus de B_mM, la droite NM donnera donc pour la section totale par le plan vertical de B_mM un

retour en M et une traversée en N[n° 8-11], ce qui est contradictoire avec le fait que B_m est au-dessous de NM. Le point B_m est donc bien *au-dessous* de P_1 au *sens strict*. On voit immédiatement qu'une sécante du plan vertical de B_mM, issue de M, située à gauche de ce point au-dessous de P_1 et passant au-dessus de B_m donnera deux traversées : l'une entre B_m et M, l'autre en M. On en déduit que M est un *point ordinaire* [n° 10].

En définitive et rassemblant les résultats obtenus depuis le n° 37 nous obtenons la proposition suivante.

Si en un point intérieur M *de* (S_3) (*d'ordre* 3 *et supposé n'avoir nulle part de plan d'appui local*) *le faisceau dérivé est un dièdre d'arête* Δ :

1° *le point* M *est ordinaire;*

2° Δ *est tout entière sur* (S_3);

3° *en tout point de* Δ, *autre que* M *et intérieur à* (S_3) *le faisceau dérivé est un plan stationnaire : le support de l'une des faces dièdre, lequel plan ne contient d'autres points de* (S_3) *que ceux de* Δ, *le long de laquelle elle le traverse;*

4° *L'autre face du dièdre est traversée par* (S_3) *qui possède des points intérieurs au dièdre aussi voisins qu'on veut de* M.

On peut encore ajouter que (S_3) ne peut contenir une droite ayant un point commun avec Δ, même sur le bord. Il serait intéressant également d'étudier les sections de la surface par les plans contenant Δ. Voici ce qu'on peut dire : La section de (S_3) par un plan R contient à gauche un arc du second ordre tangent à Δ en M; la section par le support de P_1 contient un arc du second ordre passant par M (1).

Je ne donnerai pas les démonstrations pour ne pas allonger ce Mémoire, car je n'ai pu jusqu'à présent utiliser ces résultats pour améliorer le dénombrement des points où le faisceau dérivé est un dièdre. Je signale toutefois qu'ils m'ont guidé dans la difficile construction d'un exemple de (S_3) n'admettant nulle part à son intérieur de plan d'appui local et telle qu'en un point ordinaire le faisceau dérivé y soit un dièdre. On trouvera cet exemple dans la note II.

43. Le théorème du numéro précédent conduit à penser que les points de (S_3) où le faisceau dérivé est un dièdre sont très rares. Lorsque le domaine (C), dans lequel est considérée la fonction $f(x, y)$ qui définit (S_3), est le plan des x, y tout entier, nous allons voir aisément que le faisceau dérivé peut être un dièdre en un point au plus. Mais dans le cas où (C) est borné, j'ai pu établir seulement que tout morceau de (S_3) entièrement intérieur à elle possède seulement un nombre fini de tels points. Tous mes efforts ont été vains pour améliorer ce résultat. C'est la raison pour laquelle

(1) Un plan R est un plan touchant $\mathcal{O}(M)$ le long de sa seule arête.

j'ai longtemps différé la publication du présent Mémoire, car je suis persuadé qu'il est très imparfait. Quoiqu'il en soit, considérons d'abord le cas où (S_3) se projette biunivoquement sur tout le plan des x, y. Soit M un point où $\mathcal{D}(M)$ est un dièdre (Δ, P_1P_2), les notations et les conventions étant les mêmes que plus haut. S'il existe un second point M_1 où le faisceau dérivé est un dièdre, il lui correspond une droite Δ_1, de la surface. D'après ce qui a été dit au numéro précédent Δ_1 ne peut croiser Δ; il faut donc que les plans verticaux de Δ et Δ_1 soient parallèles. Ceci conduit à considérer deux cas suivant que les droites sont ou non parallèles.

1° Δ_1 est parallèle à Δ.

Supposons d'abord Δ_1 à gauche de Δ. Elle sera au-dessous du support de P_2 on pourra donc trouver un plan R (plan contenant Δ et laissant $\mathcal{D}(M)$ au-dessous de lui au sens strict) passant au-dessus de Δ_1. En coupant par des plans verticaux passant par M on voit que le morceau de (S_3) compris entre Δ_1 et Δ est au-dessous de R[n° 37] ce qui est impossible [n° 38].

Supposons maintenant Δ_1 à droite. On peut trouver un plan R passant au-dessous de Δ_1. Mais alors toute la partie gauche de (S_3), par rapport à Δ, est au-dessous de R, ce qui est impossible [n° 38].

2° Δ_1 n'est pas parallèle à Δ.

Dans ce cas Δ_1 traverse en un point I un plan R donné quelconque. En coupant par des plans verticaux passant par M on voit immédiatement en utilisant encore les remarques du n° 37 que R est un plan d'appui local; ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration est achevée. Elle montre que (S_3) ne peut posséder aucune droite en dehors de Δ.

44. Revenons au cas où (S_3) est *bornée*. Nous savons que à chaque point M_i où $\mathcal{D}(M_i)$ est un diédre correspond une droite Δ_i de la surface et un plan P_i, contenant cette droite, faisceau dérivé en tout point de Δ_i distinct de M_i, ce plan P_i étant traversé par (S_3). Nous savons également que deux Δ_i ne peuvent avoir de point commun sur (S_3). Considérons un plan vertical rencontrant Δ_i en dehors de M_i, la section comportera une inflexion sur Δ_i. Comme un arc d'ordre trois se compose de 4 arcs convexes au plus [n° 8, I] il possède au maximum trois points d'inflexions. On en déduit qu'un plan vertical ne peut croiser 4 Δ_i à l'intérieur de (S_3). Ces remarques permettent d'établir aisément que si le contour de (C) selon lequel se projette (S_3) est un polygone de N côtés, le nombre des points M_i est au plus égal à $N + 1$. On en déduit que l'ensemble des points M_i n'a pas de point d'accumulation intérieur à (S_3), ou ce qui revient au même que tout morceau de (S_3) entièrement intérieur à elle contient un nombre nul ou fini de points M_i. Ceci peut se montrer encore de la manière

suivante. Supposons que les M_i aient un point d'accumulation ω intérieur à (S_3), il existera une suite infinie de Δ_i ayant au moins une droite d'accumulation Δ passant par ω. Ce qui est évidemment impossible, car des plans verticaux couperaient (S_3) suivant des arcs ayant plus de trois inflexions.

Lorsque les M_i ont un point d'accumulation ω sur le bord de (S_3), Δ ne peut avoir de point intérieur à la surface, car on pourrait encore trouver un plan vertical traversé par plus de trois Δ_i.

Le même raisonnement montre que Δ n'a d'autre point que ω sur (S_3). On en déduit qu'un point tel que ω ne peut se projeter verticalement à l'intérieur d'un segment de (C).

45. Abandonnant l'étude du cas où $\mathcal{O}(M)$ est un dièdre nous allons aborder celle du cas où il est un plan. Nous avons vu au numéro 25 que si $\mathcal{O}(M)$ est un plan vertical ou non le point M est ordinaire, et d'autre part que si le cône directeur des tangentes est un vrai cône, (S_3) contient deux secteurs plans. Dans l'hypothèse où nous sommes actuellement : inexistence de plans d'appui locaux, ceci ne peut avoir lieu. Nous sommes donc assurés que $\mathfrak{C}(M)$ est un plan ou un bidièdre. Je vais montrer que ce dernier cas ne peut se présenter. Supposons que $\mathfrak{C}(M)$ soit un bidièdre d'arête Δ et considérons un voisinage Σ_M de M assez petit pour qu'il ne contienne aucun point où le faisceau dérivé serait un dièdre. La proposition I du numéro 25 nous apprend que l'une des faces de $\mathfrak{C}(M)$ est le plan $\mathcal{O}(M)$ et que l'arête Δ est sur Σ_M, qu'elle partage en deux parties situées de part et d'autre de $\mathcal{O}(M)$ au sens large. Il est immédiat que pour les points intérieurs de chacune de ces parties la situation doit être entendue ici au sens strict, en raison de l'inexistenee de plans d'appui locaux.

Σ_M sera rapporté comme d'habitude à des axes $M\xi\eta\zeta$ que pour simplifier l'exposé nous lierons à $\mathfrak{C}(M)$ de la manière suivante :

1° le plan $\zeta = 0$ est $\mathcal{O}(M)$;

2° l'axe $M\eta$ est porté par Δ;

3° l'axe $M\zeta$ étant fixé nous choisirons $M\xi$ de manière que le morceau de Σ_M dont les points intérieurs ont une abscisse positive soient au-dessus de $\zeta = 0$, c'est-à-dire du côté de $M\zeta$.

Pour déterminer la position de $\mathfrak{C}(M)$ par rapport aux axes, considérons la section de Σ_M par le plan $\eta = 0$. Elle possède en M une inflexion ascendante. De là résulte qu'une sécante de $\eta = 0$, issue de M et de pente positive assez petite traverse trois fois la section, ce qui montre qu'elle est extérieure à $\mathfrak{C}(M)$.

Par suite la seconde face du faisceau des tangentes en M est un plan d'équation.

$$\zeta = -K\xi.$$

où K est un nombre *positif*.

Ceci posé, prenons sur Δ deux points B et B_1, intérieurs à Σ_M d'ordonnées respectives b et $-b(b>0)$, et coupons Σ_M par les plans $\eta=\pm b$. Nous obtenons de chaque côté de $\xi=0$ deux paires d'arcs que nous limiterons aux plans $\eta_1=\pm a(a>0)$, soit $\widehat{A'B}$, $\widehat{A'_1B_1}$ d'abscisses négatives et $\widehat{BA}$ et $\widehat{B_1A_1}$ d'abscisses positives.

Comme un arc du troisième ordre se compose de 4 arcs convexes au plus, nous pourrons choisir a assez petit pour que les 4 arcs précédents soient convexes. Désignons enfin par $\widehat{A'A'_1}$ et $\widehat{AA_1}$ les arcs joignant A' à A'_1 dans le plan $\xi=-a$, et A à A_1 dans le plan $\xi=a$.

Je vais montrer que le morceau $\mathfrak{M}$ de Σ_M limité par le contour $A'BAA_1B_1A'_1A'$ possède nécessairement un plan d'appui local. Ainsi sera bien prouvé que $\mathfrak{C}(M)$ ne peut être un bi-dièdre.

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Remarquons d'abord que $\widehat{AA_1}$ et $\widehat{A'A'_1}$ sont (au sens strict) le premier au-dessus, le second au-dessous de $\zeta=0$ et désignons par h le module maximum de la cote d'un quelconque de leurs points; h positif.

46. Pour aller plus loin nous allons déduire des propriétés générales du faisceau des tangentes trois conséquences qui nous seront utiles. Désignons par Γ_r le morceau de $\mathfrak{M}$ qui se projette sur $\zeta=0$, parallèlement à $M\zeta$, suivant le losange de centre M dont les côtés, de longueur $2r$, sont parallèles aux axes $M\xi$ et $M\eta$. Nous supposons r inférieur à a et à b. Le faisceau des tangentes $\mathfrak{C}(M)$ étant l'ensemble des droites passant par M, situées dans l'espace balayé par le plan $\zeta=\lambda\xi$ lorsque λ parcourt l'intervalle fermé $(-K, 0)$, on déduit de la définition générale du faisceau des tangentes que pour tout nombre positif ε donné (que nous prendrons inférieur à K) on pourra choisir r assez petit de manière que dans Γ_r :

1° toute corde située dans un plan $\xi=$ const. ait (en axes η, ζ) un coefficient angulaire moindre que ε en module;

2° toute corde située dans un plan $\eta=$ const. ait (en axes ξ, ζ) un coefficient angulaire compris entre $-K-\varepsilon$ et $+\varepsilon$;

3° une corde au moins : $M'M''$ située dans un plan $\eta_1=$ const. ait (en axes ξ, ζ) un coefficient angulaire inférieur à $-K+\varepsilon$.

Les deux premières propriétés sont une conséquence immédiate de la définition de faisceau des tangentes. La troisième résulte du fait que pour obtenir les tangentes situées dans un plan contenant $M\zeta$ l'on peut se borner aux cordes parallèles à ce plan [n° 1, 2°].

Considérons $M'M''$ et pour fixer les idées supposons l'abscisse de M' inférieure à celle de M''. La cote de M' sera supérieure à celle de M'', on en déduit que les

abscisses de M′ et M″ ont nécessairement le même signe. Quitte à remplacer le trièdre de référence $M\xi\eta\zeta$ par son symétrique on pourra toujours supposer que ce signe est $+$. C'est ce que nous ferons. Nous pourrons ainsi nous borner à considérer le morceau $\overline{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ limité par le contour AA_1B_1BA et de même le morceau $\overline{\Gamma}_r$ de Γ_r situé à droite (au sens large) de $\xi = 0$. La cote d'un point de Γ_r d'abscisse positive ξ est positive et d'après la remarque 2° du présent numéro elle est moindre que $\varepsilon\xi \leq \varepsilon r < \varepsilon a$.

Coupons $\overline{\mathfrak{M}}$ par le plan $\eta = \eta'_0$ contenant M′M″ nous obtenons un arc $\overset{\frown}{B'_0M'M''A'_0}$ dont les extrémités B'_0 et A'_0 sont respectivement sur BB_1 et $\overset{\frown}{AA_1}$. La cote de B'_0 est nulle; celle de M′ est supérieure à celle de M″, toutes deux sont positives et moindres que εa, celle de A'_0 est au moins égale à h. Nous supposerons ε tel que εa soit inférieur à h. Donnons-nous alors dans $\eta = \eta'_0$ une sécante passant par un point intérieur du segment M′M″ de coefficient angulaire supérieur à celui de M′M″ mais inférieur à $-K+\varepsilon$. Les points B'_0 et M″ seront au-dessous, les points M′ et A'_0 au dessus de cette sécante, qui traversera dont l'arc en trois points N, N′, N″, les deux premiers appartenant certainement à $\overline{\Gamma}_r$. Considérons à l'intérieur du segment N′N″ un point situé en dehors de la trace des segments de l'arc MN′ s'il en existe. Dans le plan $\eta = \eta'_0$ on peut mener par ce point une droite qui touche $\overset{\frown}{NN'}$ en un point unique : M'_0 et qui restant au dessus de $\overset{\frown}{NN'}$ traversera l'arc $\overset{\frown}{N'N''}$. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M'_0)$ est un plan et comme l'arc $\overset{\frown}{NM'_0N'}$ n'a dans ce plan que M'_0 le faisceau des tangentes $\mathfrak{T}(M'_0)$ est confondu avec $\mathcal{D}(M'_0)$ [n° 25 III]. Autrement dit le faisceau dérivé (qui en tout point intérieur de Σ_u est un plan) est continu en M'_0, dont je désignerai les coordonnées par $\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0$.

D'autre part la trace de $\mathcal{D}(M'_0)$ sur $\eta = \eta'_0$ a un coefficient angulaire inférieur à $-K+\varepsilon$. Enfin les extrémités B'_0 et A'_0 sont : la première au-dessous, la seconde au-dessus de $\mathcal{D}(M'_0)$ et il existe sur $\overset{\frown}{B'_0A'_0}$ un point N'_1 d'abscisse $\xi'_1 > \xi'_0$ situé au-dessous de $\mathcal{D}(M'_0)$.

Mettons l'équation de $\mathcal{D}(M'_0)$ sous la forme :

$$\zeta = \zeta'_0 + \alpha'(\xi - \xi'_0) + \beta'(\eta - \eta'_0).$$

D'après ce qui vient d'être vu α' est inférieur à $-K+\varepsilon$, et d'autre part comme conséquence de la remarque 1° du présent numéro β' est en module moindre que ε.

Pour aller plus loin il nous faudrait être certain que $\overline{\mathfrak{M}}$ possède au voisinage de M'_0 de chaque côté de $\eta = \eta'_0$ des points situés au dessus de $\mathcal{D}(M'_0)$. Or il peut arriver qu'il n'en soit pas ainsi (1). Pour éviter cette difficulté nous allons

(1) La section d'une surface du 3e degré par son plan tangent en un point peut avoir un rebroussement au point considéré.

déterminer dans $\overline{\Gamma}_r$ un point $M_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ répondant à la condition qui nous est nécessaire et choisi assez près de M'_0 pour que les coefficients α et β de l'équation de $\mathcal{D}(M_0)$, soit :

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0),$$

satisfassent aux mêmes conditions que α' et β'.

En raison de la continuité de $\mathcal{D}(M)$ en M'_0 il suffira que $M_0M'_0$ soit moindre qu'une certaine quantité ω pour que les conditions soient remplies. Dans tous les cas il y a à une distance de M'_0 moindre que ω un point M''_0 de Γ_r situé au dessus de $\mathcal{D}(M'_0)$ sans quoi celui-ci serait plan d'appui local. Si ω est assez petit M''_0 ne peut être dans le plan $\eta_1 = \eta'_{10}$. Considérons l'arc $\widehat{M'_0M''_0}$ de la section de $\overline{\Gamma}_r$ par le plan projetant $M'_0M''_0$ parallèlement à $M\zeta$. Par un point du support de $M'_0M''_0$ extérieur à ce segment et à la trace des supports des segments qui pourraient se trouver sur $\widehat{M'_0M''_0}$ on peut mener une droite T_0 qui touche $\widehat{M'_0M''_0}$ en un point unique M_0, tous les points de l'arc étant au-dessus. Mais si M_0 est assez voisin de M'_0 la section $\widehat{B_0M_0A_0}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$ par $\eta_1 = \eta_{10}$ aura ses extrémités B_0 et A_0 respectivement au-dessous et au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ et un point N'_0 d'abscisse $\xi'_1 > \xi_0$ au-dessous.

Considérons maintenant l'intersection du contour de $\overline{\mathfrak{M}}$ avec $\mathcal{D}(M_0)$. D'abord $\widehat{AA_1}$.

Si nous faisons $\xi = a$ dans l'équation de $\mathcal{D}(M_0)$ nous obtenons :

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha(a - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0),$$

ζ_0 est moindre que εa, le second terme est négatif, le troisième est en module moindre que εb. Si donc ε a été choisi tel que $\varepsilon(a+b)$ soit inférieur à h, l'arc $\widehat{AA_1}$ est au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens strict.

Considérons maintenant $B_0B + \widehat{BA}$ dont les extrémités B_0 et A sont alors : la première au-dessous, la seconde au dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ l'une et l'autre au sens strict.

Remarquons d'abord que B_0B possède au plus un point sur $\mathcal{D}(M_0)$ (autrement α serait positif). Désignons par L la trace de $\mathcal{D}(M_0)$ sur $\eta_1 = b$, son coefficient angulaire est négatif. Envisageons pour commencer le cas où B_0B possède un point I dans $\mathcal{D}(M_0)$, B est alors au-dessus ou sur L, comme l'arc $\widehat{BA}$ a tous ses points sauf B au dessus de la droite de coefficient angulaire zéro passant par B, seul ce point de l'arc peut être dans $\mathcal{D}(M_0)$ et ceci lorsque I est en B. Dans les deux cas le contour $B_0B + \widehat{BA}$ n'a dans $\mathcal{D}(M_0)$ que le point I et traverse le plan en ce point.

Reste à examiner le cas où B_0B est tout entier au-dessous de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens

strict. Dans ces conditions les extrémités de l'arc convexe $\widehat{BA}$ sont de part et d'autre de L qui traverse l'arc en un point unique I.

En résumé : dans tous les cas le contour $B_0B + \widehat{BA}$ traverse $\mathcal{O}(M_0)$ en un point unique I. De même $B_0B_1 + \widehat{B_1A_1}$ traverse ce plan en un point unique I_1.

Rappelons enfin que le plan mené par T_0 parallèlement à $M\zeta$ n'est pas parallèle à $\eta = 0$ et coupe $\overline{\mathfrak{M}}$ suivant un arc qui au voisinage de M_0 et de part et d'autre de M_0 est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$ et aussi que l'arc $\widehat{B_0A_0}$ est disposé de la manière suivante :

B_0 et A_0 sont : le premier au-dessous, le second au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$, un point N_0 de $\widehat{M_0A_0}$ est au-dessous de $\mathcal{O}(M_0)$, au sens strict dans les trois cas.

La démonstration est presque achevée. Faisons une dernière remarque qui nous sera utile. Soit $\widehat{UM_0V}$ un arc section de $\overline{\mathfrak{M}}$ par un plan parallèle à $M\zeta$; il ne peut traverser $\mathcal{O}(M_0)$ deux fois en dehors de M_0. En effet il traverserait nécessairement en M_0 [n° 6] et alors la trace du plan de $\widehat{UM_0V}$ sur $\mathcal{O}(M_0)$ serait une tangente d'inflexion donnant deux traversées en dehors de M_0, ce qui est impossible (des sécantes convenablement choisies traverseraient un arc d'ordre 3 en 5 points.

Une première application de cette remarque est que $\widehat{B_0M_0}$ est au-dessous de $\mathcal{O}(M_0)$ au sens large.

Nous allons établir aussi que l'arc $\widehat{IM_0}$ de la section de $\overline{\mathfrak{M}}$ par le plan mené par IM_0 parallèlement à $M\zeta$ est, par rapport à $\mathcal{O}(M_0)$ d'un même côté au sens large. Supposons par exemple que $\widehat{M_0I}$ ait un point G au-dessus et un point G′ au-dessous de $\mathcal{O}(M_0)$. Si G′ est entre G et I nous prendrons un point I′ voisin de I sur le contour $B_0B + \widehat{IA}$ du côté où il est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$; en choisissant I′ assez voisin de I, l'arc $\widehat{I'M_0}$ dans le plan projetant $\widehat{I'M_0}$ parallèlement à $M\zeta$ donnera deux traversées. Si G′ est entre G et M_0 nous choisirons I′ de l'autre côté de I sur le contour et la conclusion sera la même. Deux cas sont donc possibles pour $\widehat{M_0I}$: ou bien il est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$ au sens large et dans ce cas le contour $\widehat{M_0I} + \widehat{IA} + \widehat{AA_0}$ est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$ au sens large, ou bien il est au-dessous.

Plaçons-nous dans le dernier cas (où $\widehat{M_0I}$ est au-dessous). Soit alors J le point où le plan parallèle à $M\zeta$ mené par T_0 rencontre la partie du contour de $\overline{\mathfrak{M}}$ d'ordonnée supérieure à η_0 ; J ne peut être en I puisque $\widehat{M_0I}$ n'a aucun point au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$. Il ne peut être non plus avant I quand on parcourt $B_0B + \widehat{BA} + \widehat{AA_0}$ dans le sens B_0A, car le morceau de $\overline{\mathfrak{M}}$ limité par la partie B_0I

du contour précédent, $\overset{\frown}{IM_0}$ et $\overset{\frown}{M_0B}$ aurait des points intérieurs au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ et un bord au-dessous au sens large, ce qui impliquerait un plan d'appui local [n° 26, I]. Il faut donc que J soit au delà de I dans le sens défini à l'instant. Mais alors l'arc $\overset{\frown}{JM_0}$ (de plan parallèle à $M\zeta$) est tout entier au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens large, car s'il possédait un point au-dessous, il traverserait deux fois.

Cette fois nous sommes enfin au terme. Nous avons établi qu'il existe un morceau de $\overline{\partial\mathfrak{M}}$ dont les points ont une ordonnée supérieure ou égale à η_{10} tel que la partie de son bord autre que $\overset{\frown}{M_0A_0}$ soit au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens large. De la même manière on trouverait un second morceau de $\overline{\partial\mathfrak{M}}$ qui, soudé au premier le long de $\overset{\frown}{M_0A_0}$ constituera un morceau de Σ_M dont le bord est au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens large, alors qu'il possède au-dessous un point intérieur N'_0, ce qui implique encore l'existence d'un plan d'appui local.

En groupant les résultats les plus importants obtenus depuis le n° 26, nous pouvons énoncer le théorème général suivant :

Soit (S_3) *un morceau de surface du troisième ordre* (*c'est-à-dire tel que toute sécante ne possédant sur lui aucun segment le rencontre en trois points au plus*) *se projetant parallèlement à une direction fixe suivant un domaine plan et convexe* (C) *d'une manière biunivoque et bicontinue et ne possédant nulle part à son intérieur de plan d'appui local;*

1° *Tous les points intérieurs de* (S_3) *sauf peut-être quatre points A au plus* (*non coplanaires s'ils sont quatre*) *sont des points ordinaires; s'il y a des points intérieurs* M_i *où le faisceau dérivé est un dièdre, leur ensemble* $\{M_i\}$ *n'a aucun point d'accumulation intérieur à* (S_3); *en dehors des points* A *et* M_i, *s'ils existent, le faisceau des tangentes en tout point intérieur est un plan, qui par conséquent varie d'une manière continue;*

2° *Dans le cas où* $\{M_i\}$ *n'est pas vide, à chaque point* M_i *correspond une droite* Δ_i, *arête de* $\mathcal{D}(M_i)$, *entièrement située sur la surface; le plan* P_i *d'une des faces* $\mathcal{D}(M_i)$ *est tangent à* (S_3) *tout le long de* Δ_i *sauf en* M_i, *et traverse la surface qui n'a dans* P_i *d'autres points que ceux de* Δ_i; *de plus chaque* Δ_i *ne peut rencontrer sur* (S_3) *aucune droite de la surface.*

Cette proposition légitime le résultat annoncé dans mon Mémoire sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications; à savoir que pour le troisième ordre la non convexité implique presque toujours l'existence d'un plan tangent continu. L'expression *presque toujours* étant équivalente à celle-ci : sauf peut-être aux points d'un ensemble fini dans toute portion de la surface sans point commun avec son bord.

Lorsque (C) peut être étendu à tout son plan, on a vu plus haut qu'il y a au plus un point M_i. Autrement dit, (S_3) possède un plan tangent continu, sauf peut-être en cinq points.

Comme je l'ai dit plus haut la limitation des points M_i dans le cas général peut sans doute être améliorée. Mais ceci demanderait de nouvelles et probablement difficiles recherches.

Remarquons enfin que si (S_3) *est supposée ne contenir aucun segment, elle possède au plus un point non ordinaire et partout ailleurs un plan tangent continu.*

Les résultats du présent Mémoire s'appliquent évidemment aux surfaces closes et plus particulièrement à celle du troisième ordre; ils peuvent alors être précisés et complétés grâce aux propriétés globales de la surface. Par exemple : sur une surface du troisième ordre le faisceau dérivé ne peut être du quatrième ordre conique qu'en un seul point et à condition que la surface se compose d'un ovoïde et d'une surface simple de Jordan contenant trois droites coplanaires.

Ces applications feront l'objet d'un autre travail.

NOTE I.

1. Dans cette Note, je donnerai des exemples de (S_3) pour chacune desquelles *le faisceau dérivé en un certain point ordinaire sera du quatrième ordre conique*, tous les types étudiés aux n^{os} 22 et 23 pouvant être obtenus. L'élément constitutif de ces surfaces sera un secteur du second ordre limité à deux demi-droites d'origine commune.

Soient Ox et Oy deux demi-droites non opposées faisant entre elles un angle 0 et Oz un axe perpendiculaire à leur plan. Pour chaque valeur entière de n donnons-nous un point (de coordonnées *positives*) (a_n, b_n, c_n) répondant aux conditions suivantes :

1° l'ensemble (a_n, b_n, c_n) est partout dense dans l'angle xOy;

2° c_n est le plus petit des trois nombres positifs $\varepsilon_n, \varepsilon_n a_n, \varepsilon_n b_n$, où ε_n est choisi de manière que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit convergente.

Considérons le trièdre T_n de sommet (a_n, b_n, c_n) dont les arêtes sont les deux premières respectivement parallèles à Ox et Oy, la troisième passant par O. Les pentes des faces de T_n sont :

$$0, \quad \frac{c_n}{b_n \sin 0}, \quad \frac{c_n}{a_n \sin 0}.$$

D'après la manière dont a été choisi c_n ces trois nombres sont bornés par $\frac{\varepsilon_n}{\sin 0}$.

Désignons par $\varphi_n(x, y)$ la fonction représentée dans l'angle xOy par le trièdre T_n.

Cette fonction est bornée et continue. Si λ est un nombre positif arbitraire et quels que soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartenant à xOy on a évidemment :

$$(1) \qquad (1+\lambda)\varphi_n\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right) \geqq \varphi_n(x_1, y_1) + \lambda\varphi_n(x_2, y_2);$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si les parallèles à Oz menées par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) rencontrent T_n sur la même face. Ceci posé, considérons l'équation

$$(2) \qquad z = \sum_1^{\infty} \varphi_n(x, y) = \Phi(x, y).$$

Le second membre étant une série absolument convergente de fonctions continues est une fonction continue. L'équation (2) représente par suite dans xOy une surface Σ. Toutes les φ_n étant nulles sur Ox et Oy il en est de même de z. D'autre part z est bornée. Il en résulte, qu'au point de vue projectif, les points à l'infini de Σ sont sur la droite de l'infini du plan $z = 0$.

Il est immédiat que Σ est à pentes bornées. Je vais montrer qu'elle est du second ordre. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) deux points donnés de l'angle xOy et λ un nombre positif arbitraire. En donnant à n, dans la relation (1), les valeurs 1, 2, 3, ..., et en ajoutant membre on obtient l'inégalité

$$(1+\lambda)\Phi\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right) \geqq \Phi(x_1, y_1) + \lambda\Phi(x_2, y_2).$$

D'après la remarque faite plus haut, le signe : $=$ n'est valable que si

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad y_1 = y_2 = 0.$$

La dernière relation montre que tout arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ de Σ (situé dans un plan parallèle à Oz) dont les extrémités ne sont pas toutes deux sur Ox ou Oy est strictement au-dessus de sa corde. De là résulte que Σ est du second ordre et ne contient aucun segment rectiligne en dehors de Ox et Oy.

2. Nous allons maintenant construire les exemples annoncés. Le lecteur verra aisément, en coupant par des plans parallèles à Oz que les surfaces obtenues sont du troisième ordre et à pentes bornées.

I. Les notations étant conservées. Construisons un secteur Σ', défini par les demi-droites Ox' et Oy' opposées à Ox et Oy et situé du côté des z positifs.

En complétant par les angles plans $x'Oy$ et xOy' on obtient une surface (S_3) où (C) s'étend à tout le plan. Comme elle est à pentes bornées, O est un point ordinaire. Nous sommes dans le cas I du n° 22.

II. Complétant Σ par les angles $x'Oy'$, $x'Oy$ et xOy', nous obtiendrons une surface correspondant au cas II du numéro cité.

III. Pour obtenir un exemple du cas III, il suffira de souder à Σ le long de Oy

un secteur Σ_1 construit comme Σ mais du côté des z négatifs, limité par une demi-droite Ox_1, intérieure à $x'Oy$, et de compléter par les angles x_1Ox', $x'Oy'$ et $y'Ox$.

3. Dans les exemples précédents le faisceau dérivé $\mathcal{D}(o)$ contient plus de deux couples de rayons opposés. Par le même procédé on construit aisément des exemples pour lesquels il y en a seulement deux.

Considérons Σ et Σ' comme au numéro précédent (cas I) et Σ_1 et Σ'_1 situés du côté des z négatifs et limités, le premier par Oy et Ox', le second par Oy' et Ox. La surface (S_3) constituée par Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1 est du troisième ordre. Le faisceau dérivé en O est du quatrième ordre conique et contient seulement deux couples de rayons opposés, lesquels sont sur (S_3). Il en serait de même si un des quatre secteurs Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1, ou deux contigus étaient plans.

Dans le cas où aucun des secteurs n'est plan, (S_3) est une surface close du troisième ordre, non analytique, ne possédant aucun segment rectiligne en dehors des droites $x'Ox$, $y'Oy$ et de la droite à l'infini de leur plan.

NOTE II.

EXEMPLE DE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE, N'AYANT NULLE PART A L'INTÉRIEUR UN PLAN D'APPUI LOCAL ET TELLE QU'EN UN POINT ORDINAIRE LE FAISCEAU DÉRIVÉ SOIT UN DIÈDRE.

1. Nous prendrons pour (C) le carré

$$-1 \leq x \leq +1$$
$$-1 \leq y \leq +1$$

et représenterons la surface Σ par la fonction

$$z = f(x, y),$$

définie de la manière suivante :

$$\text{pour } x \leq 0, \quad f = \frac{x^3 - x^2}{k^2 y^2 - x} \quad [\text{avec } f(0, 0) = 0],$$
$$\text{pour } x \geq 0, \quad f = x^2(1 - k^2 y^2),$$

où k désigne un nombre compris entre 0 et 1, qui sera fixé ultérieurement.

Σ est formée de deux morceaux, le premier appartenant à la surface du troisième degré $z(k^2y^2 - x) - x^3 + x^2 = 0$, le second appartenant à la surface du quatrième degré $z = x^2(1 - k^2y^2)$ qui se soudent le long de l'axe des y, le premier est au-dessous, le second au dessus du plan $z = 0$, qui est faisceau dérivé stationnaire le long de l'axe des y sauf à l'origine. On voit

immédiatement que le faisceau dérivé à l'origine se compose des demi-plans : $z = 0$, $x \geqq 0$ et $z = x$, $x \leqq 0$, c'est un *dièdre*.

Il s'agit de montrer que k peut être choisi de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° $f(x, y)$ est à nombres dérivés bornés;
2° Σ ne possède nulle part à l'intérieur de plan d'appui local;
3° Σ est d'ordre trois.

2. Vérifions pour commencer la première condition. Supposons d'abord $x \leqq 0$. On a pour dérivées partielles

$$p = \frac{3x^2 - 2x}{k^2y^2 - x} + \frac{x^3 - x^2}{(k^2y^2 - x)^2}, \qquad q = -\frac{2k^2y(x^3 - x^2)}{(k^2y^2 - x)^2}$$

Quand x est compris entre -1 et 0, la quantité $k^2y^2 - x$ est positive et supérieure à $|x|$. On peut donc écrire

$$|p| < \frac{3x^2 + 2|x|}{|x|} + \frac{|x^3| + x^2}{x^2} = 4|x| + 3 < 7,$$

et

$$|q| < \frac{2k^2[|x^3| + x^2]}{x^2} = 2k^2[|x| + 1] < 4k^2.$$

Lorsque $x = 0$, $f(x, y) = 0$, q est nul.

La question se pose seulement pour p qui est ici la limite, pour $x = 0$ de

$$\frac{x^3 - x^2}{k^2y^2 - x} : x = \frac{x^2 - x}{k^2y^2 - x},$$

dont le module est moindre que $|x| + 1$.

Pour $x \geqq 0$, $f(x, y)$ étant un polynome, p et q sont bornées.

La fonction $f(x, y)$ est donc partout dans (C) à nombres dérivés bornés; d'où il résulte bien que l'origine est point ordinaire.

3. Considérons maintenant la seconde condition. Elle est évidemment vérifiée sur l'axe des y. En dehors de cette droite il suffira de montrer que $s^2 - rt$ est partout *positif*, ce qui établira bien que le plan tangent traverse la surface. Dans le cas où x est négatif il est plus simple de considérer la surface sous forme entière

$$z(k^2y^2 - x) - x^3 + x^2 = 0,$$

et de déterminer directement l'intersection du plan tangent en (x, y, z) avec la surface. En transportant l'origine au point (x, y, z) on obtient pour équa-

tions des tangentes à l'intersection de la surface par son plan tangent

$$(2x - 3x^2 - z)X + 2k^2yzY + (k^2y^2 - x)Z = 0,$$
$$(1 - 3x)X^2 - XZ - k^2zY^2 + 2k^2yYZ = 0.$$

Ce qui donne en projection sur le plan $z = 0$

$$[x - z + k^2y^2(1 - 3x)]X^2 + 2k^2y[2z - 2x + 3x^2]XY - k^2z[3k^2y^2 + x]Y^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces droites soient réelles et distinctes est que

$$k^4y^2[2z - 2x + 3x^2]^2 + k^2z(3k^2y^2 + x)[x - z + k^2y^2(1 - 3x)]$$

soit *positif*. Or tous calculs faits après avoir remplacé z par sa valeur en fonction de x et y on trouve

$$k^2y^6x^2 - k^4y^2x^3(1 + x) + k^2y^2x^6 + x^6(1 - x),$$

dont tous les termes sont *positifs* dans l'intervalle ouvert $(-1, 0)$.

Lorsque x est positif les calculs sont beaucoup plus simples. On a immédiatement

$$r = 2(1 - k^2y^2),$$
$$s = -4k^2xy,$$
$$t = -2k^2x^2,$$

et

$$s^2 - rt = 4k^2x^2(3k^2y^2 + 1),$$

qui est bien positif pour $x > 0$.

4. Reste la troisième condition, à savoir que Σ est d'ordre 3 pour k assez petit. La surface étant constituée par deux morceaux de surfaces algébriques du troisième et du quatrième degré est nécessairement d'ordre borné, soit n_k son ordre pour une valeur donnée de k. Il s'agit de montrer que $n_k = 3$ pour k assez petit.

Nous rappelant les conclusions du numéro 11 du mémoire nous savons qu'il existe un plan vertical Q (c'est-à-dire parallèle à Ox) coupant Σ suivant un arc Γ_Q d'ordre n_k et d'autre part que tout plan vertical voisin donne aussi un arc d'ordre n_k. Nous pouvons donc supposer qu'un plan Q donnant une section d'ordre n_k n'est parallèle ni au plan $x = 0$, ni à $y = 0$, et qu'il évite un nombre fini de points donnés.

L'équation de Q pourra se mettre sous la forme

$$(Q) \qquad x = a(y - b), \qquad a \neq 0,$$

avec les conditions

$$x_i \neq a(y_i - b)$$

où les points donnés (x_i, y_i) sont en nombre fini. D'autre part en raison de la symétrie par rapport au plan $x = 0$ nous pourrons supposer $a > 0$.

L'arc Γ_Q sera ainsi défini par les conditions

$$x = a(y - b), \qquad |x| \leq 1,$$
$$z = f(x, y), \qquad |y| \leq 1.$$

Si nous supprimons la condition $|x| \leq 1$ nous obtiendrons un arc Γ'_Q contenant Γ_Q dont l'ordre n'_k sera au moins égal à n_k. Je vais montrer que k peut être choisi assez petit pour que n'_k soit au plus égal à 3. Il en résultera que Σ est bien d'ordre 3, car il ne peut être d'ordre moindre.

Parmi les points (x_i, y_i) nous prendrons $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Ceci nous permet de considérer seulement les cas

$$b > 1, \qquad b < -1, \qquad |b| < 1.$$

Dans le premier cas Γ'_Q est sur une surface du troisième degré, on a donc $n'_k \leq 3$.

Dans le second cas Γ'_Q est sur une surface du quatrième degré

$$z = x^2(1 - k^2 y^2)$$

La projection de Γ'_Q, sur le plan $x = 0$, a pour équation, dans ce plan

$$z = a^2(y - b)^2(1 - k^2 y^2);$$

elle a même ordre que

$$Z = (y - b)^2(1 - k^2 y^2),$$

l'arc étant défini par l'intervalle $-1 \leq y \leq +1$.

Calculant les dérivées de Z, on obtient

$$Z' = 2(y - b)(1 + K^2 by - 2k^2 y^2),$$
$$Z'' = 2(1 - k^2 b^2 + 6k^2 by - 6k^2 y^2),$$
$$Z''' = 12k^2(b - 2y).$$

Si b est inférieur à -2, Z''' ne s'annule pas dans $(1, +1)$, une sécante ne peut donc couper en quatre points, ce qui impliquerait nécessairement l'annulation de Z''' dans $(-1, +1)$. Si l'on a

$$-2 \leq b < 1,$$

on voit immédiatement que Z'' sera positive dans $(-1, +1)$ pourvu que l'inégalité

$$1 - k^2(4 + 12 + 6) > 0$$

soit satisfaite ce qui aura lieu pour $k < \frac{1}{5}$. Z'' étant *positive* l'arc Γ'_Q est du second ordre. Autrement Z'' devrait s'annuler entre -1 et $+1$.

Comme n_k ne peut être moindre que trois la dernière position envisagée pour Q ne peut avoir lieu.

5. Le cas $-1<b<+1$ va nous retenir plus longtemps.

Ici l'arc Γ'_0 se compose de deux parties dont les projections sur $x=0$, sont définies respectivement par les conditions

$$z=\frac{a^3(y-b)^3-a^2(y-b)^2}{k^2y^2-a(y-b)}, \qquad -1\leq y\leq b,$$
$$z=a^2(y-b)^2(1-k^2y^2), \qquad b\leq y\leq 1.$$

En divisant par a^2 nous obtiendrons deux arcs de $x=0$ dont la somme est de même ordre n'_k que Γ'_0; nous les désignerons par

(1) $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$ $\quad z=\dfrac{a(y-b)^3-(y-b)^2}{k^2y^2-a(y-b)}, \qquad -1\leq y\leq b,$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ $\quad z=(y-b)^2(1-k^2y^2), \qquad b\leq y\leq 1,$

$\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$ est au-dessous de $z=0$ et $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ au-dessus.

D'après la remarque précédente l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{A'IB}}$ obtenu en faisant varier y de -1 à $+1$ dans (2) sera du second ordre si (comme nous le supposerons désormais) k est moindre que $\frac{1}{3}$. De plus l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{A'IB}}$ tournera sa concavité vers le haut (côté des $z>0$).

On a vu plus haut que nous pouvons supposer

$$b\neq 0, \qquad 1-a\left(\frac{\pm 1}{k}-b\right)\neq 0,$$

ce qui revient à intégrer l'origine et $\left(1, \frac{\pm 1}{k}\right)$ dans l'ensemble des points (x_i, y_i).

Dans ces conditions la fraction algébrique définissant $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$ ne sera indéterminée pour aucune valeur de y.

Rappelons enfin que $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}+\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ étant d'ordre n'_k il existe une sécante Δ le traversant en n'_k points distincts des extrémités et si l'on veut distincts de I [n° 6].

S'il n'y a de points que sur $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$, n'_k est au plus égal à 3, donc égal à 3; s'il n'y en avait que sur $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ on aurait $n'_k\leq 2$, ce qui est impossible. Nous pouvons donc supposer qu'il y a des points sur les deux arcs; soient α et β leurs nombres respectifs sur $\overset{\frown}{\mathrm{IA}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$. On a

$$\alpha+\beta=n'_k, \qquad 1\leq\alpha\leq 3, \qquad 1\leq b\leq 2.$$

Je distinguerai deux cas, suivant que $1-a\left(\frac{1}{k}-b\right)$, qui, on l'a vu, peut être supposé différent de zéro, est négatif ou positif.

I. $1-a\left(\frac{1}{k}-b\right)<0.$

Le coefficient a étant positif cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{a} + b < \frac{1}{k}.$$

Posons $y_0 = b + \frac{1}{a}$. On a

$$a(y-b) - 1 = a(y - y_0) \qquad \text{et} \qquad ky_0 < 1.$$

Considérons d'autre part le trinome

$$k^2y^2 - a(y-b);$$

les résultats de substitution de b, et y_0 sont

$$k^2b^2 \quad \text{et} \quad k^2y_0^2 - 1 < 0.$$

On en déduit que ce trinome a deux zéros y_1 et y_2 tels que l'on ait

$$b < y_1 < y_0 < y_2.$$

Représentons par

$$z = \lambda(y-b) + \mu$$

l'équation de Δ. Celle-ci joignant un point d'abscisse inférieure à b et d'ordonnée négative (sur $\widehat{AI}$) à un point d'abscisse supérieure à b et d'ordonnée positive (sur $\widehat{IB}$), le coefficient λ est positif. D'autre part μ est différent de zéro, puisque Δ ne passe pas par I.

Formons l'équation donnant les y des points d'intersection de $\widehat{AI}$ avec Δ. Elle s'écrit

$$[\lambda(y-b) + \mu][k^2y^2 - a(y-b)] - a(y-b)^2(y-y_0) = 0. \tag{3}$$

Les racines convenables sont celles comprises entre -1 et b. Mais d'après la remarque précédente, en remplaçant dans le premier membre de (3), y par y_1 et y_2 on obtient des résultats respectivement positif et négatif.

Si μ est négatif la substitution de y par b donne un résultat négatif. Dans ce cas $\alpha = 1$, car l'équation (3) a deux racines supérieures à b. Comme $\beta = 1$ ou 2 on a nécessairement $n'_k = 3$.

Si μ est positif, on peut seulement affirmer que α ne peut surpasser 2.

Considérons alors le zéro y_3 de $\lambda(y-b) + \mu$; il est inférieur à b mais supérieur à -1. Mais alors l'équation

$$\lambda(y-b) + \mu - (y-b)^2(1 - k^2y^2) = 0 \tag{4}$$

a une racine entre y_3 et b, car en remplaçant y par y_3 et b on obtient deux résultats de signes contraires (1). Comme $\widehat{A'IB}$ est d'ordre deux, Δ possède un

(1) Car $(y-b)^2(1-k^2y^2)$ est positif sauf pour $y = b$ dans $(-1, +1)$.

point au plus sur $\widehat{IB}$. Donc $\beta = 1$. On a encore n'_k au plus égal à trois, c'est-à-dire exactement égal à 3.

II. $1 - a\left(\frac{1}{k} - b\right) > 0$

De cette condition on déduit

$$a < \frac{k}{1 - kb} < \frac{k}{1 - k} \qquad \text{et} \qquad y_0 > \frac{1}{k} > 1.$$

De là résulte que $\lambda(y_0 - b) + \mu$ est positif, puisque le point d'ordonnée 1 sur la droite $z = \lambda(y - b) + \mu$ a une cote positive et que λ est positif. En désignant toujours par y_3 l'ordonnée du point de rencontre Δ avec Oy, on voit que les résultats de substitution de y_3 et de y_0 dans l'équation (3) sont positifs.

Si μ est négatif, y_3 est supérieur à b, et ce nombre donne un résultat négatif. L'équation (3) a donc au moins une racine intérieure à l'intervalle $(b, 1)$. Par suite α ne peut surpasser 2. Pour que n'_k puisse atteindre 4 il faut que les équations (3) et (4) aient la première trois racines dans $(-1, +1)$ et la seconde deux.

Supposons $\mu > 0$. Dans ce cas l'équation (4) a comme plus haut une racine entre y_3 et b.

Donc $\beta = 1$. L'ordre n'_k ne peut atteindre 4 que si $\alpha = 3$.

En définitive, il nous reste à montrer que si les équations (3) et (4) ont respectivement 3 et 2 racines dans l'intervalle $(-1, +1)$, on aboutit pour k assez petit à une contradiction.

La droite $z = \lambda(y - b) + \mu$ joignant deux points intérieurs de l'arc $\widehat{A'IB}$, λ est égal à la pente d'une tangente en un point de l'arc, donc de $\widehat{IB}$ puisque λ est positif. La valeur maximum de λ est celle de la dérivée de

$$(y - b)^2[1 - k^2 y^2] \quad \text{pour} \quad y = 1.$$

C'est-à-dire

$$2(1 - b)(1 + k^2 b - 2k^2)$$

Comme $|b|$ est inférieur à *un* on a

$$0 < \lambda < 4(1 - 3k^2).$$

Pour simplifier posons : $\mu_1 = \mu - \lambda b$ et bornons μ_1. En désignant par (y', z') un point commun à $\widehat{IB}$ et Δ (il y en a au moins un) on peut écrire

$$z' = \lambda y' + \mu_1,$$

d'où

$$|\mu_1| \leq |z'| + \lambda |y'| < |z'| + \lambda.$$

$|z'|$ est moindre que la cote de B, c'est-à-dire : $(1 - b)^2(1 - k^2)$.

On obtient donc l'inégalité

$$|\mu_1| < 4(1-k^2) + 4(1-3k^2) = 8(1-2k^2).$$

Ceci posé revenons à l'équation (3), qui s'écrit maintenant

$$(\lambda y + \mu_1)[k^2 y^2 - a(y-b)] - a(y-b)^3 + (y-b)^2 = 0.$$

La somme des trois racines : σ est donnée par la relation

$$(\lambda k^2 - a)\sigma + (\mu_1 k^2 - a\lambda + 3ab + 1) = 0$$

d'où l'on déduit

$$1 = (a - \lambda k^2)\sigma + a\lambda - \mu_1 k^2 - 3ab.$$

$|\sigma|$ est moindre que 3, $|b|$ moindre que *un*.

On a vu plus haut que a, positif, ne peut atteindre $\frac{k}{1-k}$. Utilisant enfin des bornes qui viennent d'être obtenues pour λ et μ_1 on peut limiter le module du second membre par l'expression

$$[4(1-3k^2) + 3 + 3]\frac{k}{1-k} + 3k^2 \cdot 4(1-3k^2) + k^2 8(1-2k^2)$$
$$= (10 - 12k^2)\frac{k}{1-k} + 20k^2 - 52k^4,$$

qui tend vers zéro avec k. La démonstration est donc achevée.

Il est facile de déterminer une valeur finie de k satisfaisant à l'inégalité

$$(10 - 12k^2)\frac{k}{1-k} + 20k^2 - 52k^4 < 1.$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$11k - 12k^2 + 20k^2(1-k) - 52k^4(1-k) < 1,$$

inégalité satisfaite *a fortiori* si

$$11k + 20k^2 < 1,$$

ce qui a lieu pour $k \leq \frac{1}{13}$.

Malgré la simplicité (relative) des calculs, je dois avouer que la construction de cet exemple m'a donné beaucoup de peine. D'ailleurs j'ai douté pendant longtemps que le faisceau dérivé en un point ordinaire d'une surface du troisième ordre n'ayant nulle part de plan d'appui local puisse être un dièdre.

SUR LE PROBLÈME DE LA GÉNÉRATION

D'UNE

TRANSFORMATION DONNÉE D'UNE COURBE FERMÉE

PAR UNE TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE

PAR M. ARRIGO FINZI.

CHAPITRE I.

1. Dans un Mémoire précédent (1) j'ai considéré, sur une courbe fermée C, une transformation T, dépourvue de points invariants, d'équation

$$x_1 = g(x), \qquad \left[\frac{dg(x)}{dx} > 0\right],$$

et j'ai étudié la question de savoir s'il existe une transformation infinitésimale $\xi(x)\frac{df}{dx}$, qui engendre la transformation T. Dans le cas où le module (2) k de la transformation T est irrationnel (l'étude du cas où le module est rationnel peut se faire par des considérations tout à fait élémentaires), j'ai donné, au chapitre III du premier Mémoire, une première réponse à la question par le théorème A :

(1) Voir *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 67, 1950, p. 273. Ce Mémoire sera parfois indiqué brièvement par la lettre G.

(2) Le *module* est un invariant, qu'on peut attacher à toute transformation T de C dépourvue de points invariants : considérons T comme engendrée par un mouvement continu, qui porte chaque point dans son transformé, on pourra considérer, pour une puissance T^n, le rapport $\frac{m}{n}$ du nombre m des tours de C, que ce point accomplit par T^n à l'exposant n. On définit le module comme la limite (qui existe toujours) de $\frac{m}{n}$ pour $n \to \infty$. Pour des considérations plus précises, *voir* G, § 6. On peut concevoir trois cas :

La transformation T *admet une transformation infinitésimale génératrice* (et une seulement) *si* $g(x)$ *possède une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz et si, en indiquant par* $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$ *les réduites du développement du module* k *en fraction continue et par* a_α *les quotients incomplets, on peut donner un nombre positif* $\lambda < 1$, *de façon que*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^{\lambda}} = 0.$$

Il importe de rappeler (G, § 36) que, lorsqu'on ne fait aucune hypothèse sur la croissance des entiers a_α pour $\alpha \to \infty$, il peut arriver que T ne possède pas une transformation infinitésimale génératrice, quelles que soient les hypothèses qualitatives (même l'analyticité) que l'on fait concernant $g(x)$.

Dans ce Mémoire je me propose de donner une deuxième solution du problème, qui est fondée sur le théorème suivant :

Considérons une famille ∞^1 *de transformations régulières* (3) $\mathrm{T}(\theta)$, *dépendant du paramètre* θ, *d'équation*

$$x_1 = g(x, \theta). \tag{1}$$

Supposons que $g(x, \theta)$ *possède des dérivées* $\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g(x,\theta)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g(x,0)}{\partial x \partial \theta}$, *et que ces dérivées satisfassent à la condition de Lipschitz par rapport à* x *et à* θ. *Supposons encore* $\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial \theta} > 0$. *Il existe alors une famille* ∞^1 *de transformations infinitésimales*

$$\xi(x, \theta)\frac{df}{dx}, \tag{2}$$

telle qu'on obtient la famille donnée $\mathrm{T}(\theta)$ *en considérant les* ∞^1 *groupes* g_t *engendrés par la famille* (2) *et en choisissant dans chaque groupe la transformation de paramètre* $t = 1$. *On démontre que la fonction* $\xi(x, \theta)$ *est continue par rapport à* θ [et, naturellement, par rapport à x (4)].

En vertu de ce théorème, une transformation T possède certainement une

---

1. Il y a une puissance T^n, qui laisse tous les points de C invariants; T est donc cyclique. On verra au paragraphe 4 qu'une telle transformation possède une infinité de transformations infinitésimales génératrices.

2. Il y a une puissance T^n, qui laisse invariants certains points de C. Le module de T est, dans ce cas aussi, rationnel. On démontre immédiatement (G, § 1) que T n'admet aucune transformation génératrice.

3. Il n'y a pas de points invariants pour une puissance quelconque de T. Le module est irrationnel. On démontre facilement (G, § 5) que T admet une transformation infinitésimale génératrice au plus.

Nous dirons que les transformations 1 et 3 sont *régulières* et que les transformations 2 sont *irrégulières*.

(3) Pour la définition d'une transformation régulière, *voir* note (2), p. 1.

(4) $\xi(x, \theta)$ est même continue par rapport au couple des variables x et θ.

transformation infinitésimale génératrice si elle fait partie d'une famille ∞^1 satisfaisant aux conditions indiquées. On doit remarquer que la condition qualitative concernant $g(x)$ est la même dans les deux solutions du problème, tandis que la condition arithmétique qui paraît dans le théorème A est remplacée ici par une condition d'une nature complètement différente.

Il y a tout de même un caractère commun aux deux solutions : La difficulté du problème revient à ce que $\xi(x)$, considérée comme fonction de $g(x)$, n'est pas continue d'ordre fini, au sens du calcul fonctionnel. On surmonte cette difficulté en se plaçant dans un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions $g(x)$, dans lequel il y a au contraire une continuité d'ordre fini : dans le premier cas l'ensemble des fonctions $g(x)$, qui correspondent aux transformations ayant un même module satisfaisant à la condition arithmétique indiquée, dans le second cas la famille (1) de fonctions dépendant du paramètre θ.

Nous allons indiquer rapidement méthode de démonstration du théorème; il sera possible d'en donner une idée plus précise au commencement du chapitre II.

$\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial x}$ étant positive, le module $k(\theta)$ des transformations de la famille (1) est une fonction croissante du paramètre θ; il y a donc une correspondance biunivoque entre les valeurs du module et les valeurs du paramètre. Indiquons par $\mathbf{k}$ une valeur irrationnelle du module et par Θ la valeur du paramètre telle que $\mathbf{k} = k(\Theta)$. Indiquons ensuite par $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \ldots$, les réduites du développement de $\mathbf{k}$ en fraction continue et par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$, les valeurs correspondantes du paramètre.

Considérons la transformation $T(\theta_\alpha)$ d'équation

$$x_1 = g(x, \theta_\alpha),$$

qui est régulière et qui a un module rationnel; il y a une infinité de transformations infinitésimales, qui engendrent $T(\theta_\alpha)$ (5); on peut toutefois choisir une transformation particulière, $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ par un procédé général. On démontre ensuite (et c'est là le point le plus difficile) que la succession des fonctions

$$\xi(x|\theta_1) \quad \xi(x|\theta_2), \quad \ldots, \quad \xi(x|\theta_\alpha), \quad \ldots,$$

obtenues de la sorte converge d'une façon uniforme vers une fonction continue et positive $\xi(x|\Theta)$. On reconnaît alors facilement que la transformation infinitésimale $\xi(x|\Theta)\frac{df}{dx}$ engendre $T(\Theta)$. En considérant ensuite θ comme une variable et en démontrant que la fonction $\xi(x, \theta)$ obtenue de la sorte est continue par rapport à θ, on trouve la famille (2) de transformations infinitésimales.

(5) *Voir* la note (2), p. 371.

2. Le théorème énoncé au paragraphe précédent suggère certaines questions, desquelles je vais parler ici rapidement. Je dois dire toutefois que la démonstration du théorème, bien qu'elle soit fondée sur une idée relativement simple, nous amène malheureusement à des considérations extrêmement complexes; il serait du plus grand intérêt, pour un avancement ultérieur dans ces recherches, de pouvoir introduire des simplifications dans les méthodes (6). Il me semble toutefois que certaines des considérations développées dans ce Mémoire peuvent présenter l'intérêt, même indépendamment de la démonstration du théorème : peut-être elles pourraient trouver d'autres applications dans une étude ultérieure des transformations d'une courbe fermée.

Un des problèmes qu'on pourrait se poser serait de démontrer à nouveau le théorème A en montrant, *a priori*, qu'une transformation qui satisfait aux conditions de ce théorème fait toujours partie d'une famille ∞^1 satisfaisant aux conditions du théorème énoncé dans le paragraphe précédent. Je pense qu'une telle démonstration pourrait nous rapprocher de la solution de la question suivante : quelles conclusions ultérieures peut-on tirer concernant $\xi(x)$ lorsqu'on sait que $g(x)$ possède des dérivées d'ordre supérieur au second ? Tandis qu'il semble difficile d'étudier cette question par la méthode employée dans la démonstration du théorème A, il semble au contraire que le théorème donné dans ce Mémoire représente le premier cas d'une proposition plus générale, dans laquelle on supposerait l'existence de certaines dérivées d'ordre supérieur pour $g(x, \theta)$ et l'on démontrerait l'existence de certaines dérivées de $\xi(x, \theta)$. J'ai pu, dans cet ordre d'idées, donner une généralisation convenable du lemme démontré ici au paragraphe 6, et qui est la base de la démonstration de notre théorème.

Une deuxième généralisation du théorème, qui aurait, à mon avis, un intérêt remarquable, reviendrait à substituer, à la condition $\frac{\partial g(x, \theta)}{\partial \theta} > 0$, la condition que le rapport $\frac{k(\theta_1) - k(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}$ soit toujours supérieur à une quantité positive donnée; on démontre facilement que cette condition est plus générale que la précédente (7).

On peut enfin poser la question suivante, qu'on pourrait rapprocher d'une autre déjà posée dans mon premier Mémoire : la fonction $\xi(x, \theta)$ est dérivable par rapport à x pour toute valeur de θ qui correspond à une valeur irrationnelle du paramètre. Est-elle dérivable par rapport à x pour toute autre valeur de θ ? Si la réponse à cette question était négative, on aurait le fait assez singulier

(6) J'ai obtenu récemment une méthode plus directe pour arriver à $\xi(x, \theta)$. La méthode donnée ici reste cependant nécessaire pour établir la continuité de $\xi(x, \theta)$.

(7) Dans une Note préliminaire, publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 228, 1949, p. 631, j'avais cru pouvoir énoncer le théorème dans cette hypothèse plus générale. Je ne suis toutefois pas arrivé jusqu'ici à surmonter les difficultés connexes à la démonstration.

qu'à la fonction $g(x, \theta)$, satisfaisant aux conditions du théorème, mais par ailleurs choisie *d'une façon arbitraire*, il devrait correspondre une fonction $\xi(x, \theta)$, jouissant de la propriété d'être dérivable par rapport à x seulement en correspondance d'une infinité dénombrable de valeurs de θ.

3. Comme dans le Mémoire précédent, nous supposerons qu'à un tour complet sur la courbe C il corresponde un intervalle unitaire pour l'abscisse x : à deux valeurs x et $x+1$ de l'abscisse il correspond alors le même point géométrique sur C. La fonction $g(x, \theta)$ satisfait à la relation

$$g(x+1, \theta) = g(x, \theta) + 1.$$

Posons

$$g(g(x, \theta), \theta) = g_2(x, \theta),$$
$$g(g(g(x, \theta), \theta), \theta) = g_3(x, \theta).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et indiquons par $g_0(x, \theta) \equiv x$ la fonction, qui correspond à l'identité. On aura aussi à considérer les fonctions d'indice négatif, qui correspondent aux puissances négatives des transformations $T(\theta)$.

En indiquant par $k(\theta)$ le module de $T(\theta)$, le module de $T^n(\theta)$ sera donné par $nk(\theta)$; il pourra être plus grand que 1. D'ailleurs, si l'on regarde essentiellement la transformation *géométrique* $T^n(\theta)$, le module n'est défini au fond qu'à un entier près.

Nous dirons que, lorsque l'abscisse x croît, le point correspondant se déplace vers la droite : nous supposerons toujours $g(x, \theta) > x$ et, par conséquent, le point transformé $g(x, \theta)$ à droite de x.

Nous indiquerons les dérivées des fonctions $g(x, \theta)$ et $\xi(x, \theta)$ de la façon suivante :

$$\frac{\partial^{h+k}\xi(x, \theta)}{\partial x^h \partial \theta^k} \equiv \xi^{h,k}(x, \theta), \qquad \frac{\partial^{h+k} g(x, \theta)}{\partial x^h \partial \theta^k} \equiv g^{h,k}(x, \theta).$$

Enfin nous poserons

$$\frac{\partial^{h+k} g_l(x, \theta)}{\partial x^h \partial \theta^k} \equiv g_l^{h,k}(x, \theta).$$

Nous devrons, dans la suite, introduire certaines fonctions $g(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ des deux variables x et θ; pour représenter leur dérivées nous utiliserons des notations analogues,

$$\frac{\partial^{h+k} g(x, \theta \mid \theta_\alpha)}{\partial x^h \partial \theta^k} = g^{h,k}(x, \theta \mid \theta_\alpha).$$

Au paragraphe 7 du premier Mémoire j'ai défini les transformations très petites et développé à leur égard certaines considérations générales. Il me semble inutile de répéter ici exactement ces mêmes considérations et je me permets de renvoyer le lecteur au paragraphe indiqué.

4. Nous allons exposer dans ce paragraphe certaines considérations élémentaires concernant les transformations cycliques (régulières, de module rationnel). La plupart de ces considérations ont été déjà exposées dans le premier Mémoire; il m'a paru toutefois préférable de les réunir ici, dans la forme la plus convenable pour les applications que nous en devrons faire.

Indiquons par $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ le module rationnel de la transformation cyclique T, d'équation

$$x_1 = g(x),$$

et par $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$ les réduites de son développement en fraction continue limitée; indiquons ensuite par $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ les quotients incomplets. On a

$$T^{n_\alpha} = I;$$

T^{n_α} ramène donc chaque point x à sa position initiale; x possède alors en tout $n_\alpha - 1$ homologues par rapport à T : $g(x), g_2(x), \ldots, g_{n_{\alpha-1}}(x)$.

Nous allons voir de quelle façon ces points sont disposés sur la courbe. Les points

$$x, \quad g(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_{n_1}(x)$$

se suivent de gauche à droite; T^{n_1} est la plus grande puissance de T pour laquelle x n'arrive pas à accomplir un tour complet de C; $g_{n_1}(x)$ est donc placé immédiatement à gauche de x. Les points

$$g(x), \quad g_{n_1+1}(x), \quad g_{2n_1+1}(x), \quad \ldots, \quad g_{a_1 n_1+1}(x) \equiv g_{n_2}(x)$$

se suivent de droite à gauche; T^{n_2} est la plus petite puissance de T pour laquelle le point x accomplit m_2 tours complets de C et le point $g_{n_2}(x)$ est donc placé immédiatement à droite de x. De même, les points

$$g_{n_1}(x), \quad g_{n_1+n_1}(x). \quad g_{2n_2+n_1}(x), \quad \ldots, \quad g_{a_2 n_2+n_1}(x) \equiv g_{n_3}(x)$$

se suivent de droite à gauche; T^{n_3} est la plus petite puissance de T pour laquelle le point x n'arrive pas à accomplir m_3 tours complets de C, et le point $g_{n_3}(x)$ se trouve immédiatement à gauche de x. En continuant de la sorte, si α est pair (impair), on arrivera finalement à un point $g_{n_{\alpha-1}}(x)$ placé à gauche (à droite) de x, qui est, de plus, le plus proche à gauche (à droite) parmi tous les $n_{\alpha-1}$ conséquents. Les points

$$g_{n_{\alpha-2}}(x), \quad g_{n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}}(x), \quad g_{2n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}}(x), \quad \ldots, \quad g_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}}(x) \equiv g_{n_\alpha}(x)$$

se suivent de droite à gauche (de gauche à droite) et le point $g_{n_\alpha}(x)$ coïncide avec le point initial x.

Considérons l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x))$; il importe pour la suite de faire la remarque que, en transformant cet intervalle par T, T^2, T^3, ..., $T^{n_{\alpha-1}}$, on recouvre la courbe C complètement et simplement.

Une transformation cyclique admet une infinité de transformations infinitésimales génératrices. Pour le démontrer rappelons d'abord que, d'après la théorie des groupes continus et finis, l'équation du groupe g_t engendré par $\xi(x)\frac{df}{dx}$ est donnée par

$$\int_x^{x_1} \frac{dx}{\xi(x)} = t,$$

t étant le paramètre du groupe; si donc on admet que T est engendré par $\xi(x)\frac{df}{dx}$ lorsqu'on fait $t=1$, on doit avoir

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1. \tag{3}$$

Pour résoudre cette équation, posons

$$\xi(x) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{p[g_{s-1}(x)]}{g_s^{1,0}(x)} \qquad (d_\alpha = \text{const.}), \tag{4}$$

$p(x)$ étant une fonction continue, positive, de période 1, et par ailleurs arbitraire. On a

$$\xi[g(x)] = \xi(x)\, g^{1,0}(x);$$

de cette relation on déduit

$$\frac{d}{dx}\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = g^{1,0}(x)\frac{1}{\xi[g(x)]} - \frac{1}{\xi(x)} = 0.$$

L'intégrale $\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)}$ ne dépend donc pas de x; en disposant de la constante d_α on peut alors satisfaire à (3). La transformation infinitésimale $\xi(x)\frac{df}{dx}$ engendre donc T.

Il est bon de remarquer, en terminant, que pour obtenir la transformation infinitésimale la plus générale, qui engendre T, on aurait dû partir, non pas nécessairement d'une fonction $p(x)$ positive, mais simplement d'une fonction telle que $\xi(x)$, définie par (4), soit partout positive (7).

5. Considérons une famille ∞^1 de transformations infinitésimales

$$\xi(x, \theta)\frac{df}{dx} \tag{2}$$

et la famille ∞^2 des transformations finies

$$x_1 = g(x, t, \theta),$$

(7) La démonstration donnée ici pourrait se substituer à celle qui est donnée dans G, au paragraphe 4.

qui font partie des ∞^1 groupes g_1 engendrés par (2). Si, pour une valeur donnée 0 du paramètre, $\xi(x, 0)$ est dérivable par rapport à 0, on a, dans un voisinage de 0_α,

$$\xi(x, 0) = \xi(x, 0_\alpha) + (0 - 0_\alpha)\xi^{0,1}(x, 0_\alpha) + \ldots;$$

d'une façon analogue on a

$$g(x, t, 0) = g(x, t, 0_\alpha) + (0 - 0_\alpha)\, g^{0,1}(x, t, 0_\alpha) + \ldots,$$

$g(x, t, 0_\alpha)$ est déterminée lorsqu'on a donné $\xi(x, 0_\alpha)$; on voit ensuite facilement que $g^{0,1}(x, t, 0_\alpha)$ est déterminée à son tour par la connaissance de $\xi^{0,1}(x, 0_\alpha)$; on peut d'ailleurs donner l'expression de cette dépendance fonctionnelle; on a

$$g^{0,1}(x, t, 0_\alpha) = \mathrm{L}[\xi^{0,1}(x, 0_\alpha), x, t] = \int_0^t \xi^{0,1}[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha] \frac{\xi[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha]}{\xi[g(x, \tau, 0_\alpha), 0_\alpha]}\, d\tau.$$

Pour établir cette relation, appliquons la formule de Taylor à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t, 0) = \xi[g(x, t, 0), 0],$$

nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g(x, t, 0_\alpha)}{\partial t} + (0 - 0_\alpha)\frac{\partial g^{0,1}(x, t, 0_\alpha)}{\partial t} + \ldots \\ &\quad = \xi[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha] + (0 - 0_\alpha) \\ &\qquad \times \{\xi^{1,0}[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha] g^{0,1}(x, t, 0_\alpha) + \xi^{0,1}[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha]\} + \ldots. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $(0 - 0_\alpha)$ dans le premier et dans le second membre nous trouvons, pour $g^{0,1}(x, t, 0)$, l'équation différentielle

$$\frac{\partial g^{0,1}(x, t, 0_\alpha)}{\partial t} = \xi^{1,0}[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha]\, g^{0,1}(x, t, 0_\alpha) + \xi^{0,1}[g(x, t, 0_\alpha), 0_\alpha].$$

$g^{0,1}(x, t, 0)$ doit d'autre part être identiquement nulle pour $t = 0$, étant donné que pour $t = 0$ toute transformation de la famille considérée se réduit à l'identité. Ces conditions, qui suffisent évidemment pour déterminer $g^{0,1}(x, t, 0)$, sont d'autre part satisfaites par l'expression intégrale donnée.

6. Partons maintenant d'une famille ∞^1 de transformations régulières $\mathrm{T}(0)$, qui dépend du paramètre 0, d'équation

(1) $$x_1 = g(x, 0).$$

Nous posons la question de savoir s'il est possible de trouver deux fonctions $\xi(x \mid 0_\alpha)$ *et* $\xi^{0,1}(x \mid 0_\alpha)$ *telles que, en indiquant par*

$$x_1 = g(x, t \mid 0_\alpha)$$

l'équation du groupe g_1 engendré par $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ on ait

$$g(x,\theta_\alpha)=g(x,1\,|\,\theta_\alpha), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} g^{0,1}(x,\theta_\alpha)&=\mathrm{L}[\xi(x,\theta_\alpha),\xi^{0,1}(x,\theta_\alpha),x,1]\\ &=\int_0^1 \xi^{0,1}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

On peut présenter la même question d'une façon quelque peu différente : considérons les ∞^1 groupes g_1 engendrés par les transformations infinitésimales de la famille

$$\bar{\xi}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{df}{dx}\equiv\frac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{1-\dfrac{\xi^{0,1}(x,\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\frac{df}{dx}\equiv\{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\,\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)+\dots\}\frac{df}{dx};$$

indiquons par

$$x_1=\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$$

l'équation de la famille ∞^1 formée par les transformations de paramètre $t=1$ appartenant à ces groupes. Est-il possible de choisir $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ et $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de façon qu'on ait

$$\begin{aligned} \bar{g}(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha)&=g(x,\theta_\alpha),\\ \bar{g}^{0,1}(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha)&=g^{0,1}(x,\theta_\alpha). \end{aligned}$$

Il nous suffira d'avoir considéré le problème sous des conditions particulières ; nous supposerons que la transformation de la famille (1) de paramètre θ_α possède un module rationnel $k(\theta_\alpha)=\dfrac{m_\alpha}{n_\alpha}$; nous supposerons en outre que $g(x,\theta)$ possède des dérivées $g^{1,0}(x,\theta)$, $g^{2,0}(x,\theta)$, $g^{0,1}(x,\theta)$, $g^{1,1}(x,\theta)$ et que ces dérivées soient continues; nous supposerons enfin que $g^{0,1}(x,\theta)$ soit positive. *Dans ces conditions on peut répondre par l'affirmative à la question posée.*

Remarquons d'abord que, d'après l'équation (5), le groupe g_1 engendré par $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\dfrac{df}{dx}$ doit donner $\mathrm{T}(\theta_\alpha)$ pour $t=1$; d'après ce qu'on a vu au paragraphe 4 on pourra résoudre (5) en posant

$$\xi(x\,|\,\theta_\alpha)=\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{x_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}, \tag{7}$$

la constante d_α étant déterminée par la condition

$$\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}=1. \tag{3'}$$

Considérons ensuite l'équation (6). Cette équation est linéaire en $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; si donc nous posons

$$\begin{cases} g^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha)=\dfrac{1}{n_\alpha}\displaystyle\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s\frac{g^{0,1}[g_s(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}=\frac{1}{d_\alpha}\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha],\\ g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)=g^{0,1}(x,\theta_\alpha)-g^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha), \end{cases} \tag{8}$$

et nous déterminons deux solutions $\xi^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha)$ et $\xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)$ des deux équations

$$(6') \qquad \mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1] = \int_0^1 \xi^{0,1*}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = g^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha),$$

$$(6'') \qquad \mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1**}x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1] = \int_0^1 \xi^{0,1**}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha),$$

la fonction

$$\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha) = \xi^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha) + \xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)$$

nous donnera une solution de l'équation (6).

Remarquons que l'on a

$$\sum_0^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1**}[g_s(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_s(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} = 0,$$

remarquons aussi que $g^{0,1*}(x,|\,\theta_\alpha)$ et $g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)$ possèdent des dérivées premières continues.

On reconnaît immédiatement que l'on peut satisfaire à (6′) en posant

$$\xi^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha) = \frac{1}{d_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha);$$

il nous reste donc seulement à considérer (6″). En dérivant cette équation par rapport à x, nous trouvons

$$= \frac{d}{dx}\int_0^1 \xi^{0,1**}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau,$$

$$= \frac{dt}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{1+t} \xi^{0,1**}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1+t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau\right]_{t=0},$$

$$= \frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\left\{\xi^{0,1**}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] - \frac{\xi[g(x,0_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) + \xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha]\,\mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1]\right\} = \frac{d\,g^{0,1**}(x\,|\,0_\alpha)}{dx}.$$

Égalons le dernier membre de cette équation à l'avant-dernier, après avoir remplacé dans celui-ci $\mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1]$ par sa valeur $g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)$ donnée par (6″), et tâchons de déterminer une solution $\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de l'équation

$$(9) \qquad \frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\left\{\xi^{0,1***}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,0_\alpha] - \frac{\xi[g(x,0_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,0_\alpha) + \xi^{1,0}[g(x,0_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,g^{0,1**}(x,0_\alpha)\right\} = \frac{d\,g^{0,1**}(x\,|\,0_\alpha)}{dx},$$

obtenue de la sorte. En résolvant par rapport à $g^{0,1***}[g(x,\theta_\alpha)]$ et en remarquant que l'on a

$$g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)=g^{0,1}(x,\theta_\alpha)-d_\alpha\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha],$$

on déduit de l'équation (9),

$$\begin{aligned}(10)\quad \xi^{0,1***}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]&=\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)\\&\quad+\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\frac{d\,g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)}{dx}-\xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\,|\,g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)\\&=\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)+\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\,g^{1,1}(x,\theta_\alpha)\\&\quad-\xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,g^{0,1}(x,\theta_\alpha),\end{aligned}$$

et de celle-ci, plus en général,

$$\begin{aligned}\xi^{0,1***}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]&=\frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g_{r-1}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\xi^{0,1***}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]+\xi[g_{r-1}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\\&\quad\times g^{1,1}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]-\xi^{1,0}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\\&=\frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g_{n-1}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\xi^{0,1***}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]+[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\\&\quad\times\frac{g^{1,1}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}-\xi^{1,0}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{r-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\\&=\frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)\\&\quad+\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\sum_1^r{}_j\frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\\&\quad-\sum_1^r{}_j\,\xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]g^{01}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{1,0}_{r-j}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha].\end{aligned}$$

En employant l'identité

$$g^{1,0}_{r-j}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{1,0}_{n_\alpha-r+j}[g_r(x,\theta_\alpha)\theta_\alpha]=g^{1,0}_{n_\alpha}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]=1,$$

on trouve enfin

$$\begin{aligned}(11)\quad \xi^{0,1***}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]&=\frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)\\&\quad+\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\sum_1^r{}_j\frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\\&\quad-\sum_1^r{}_j\,\xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{g^{1,0}_{n_\alpha-r+j}[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}.\end{aligned}$$

Choisissons un point $\mathbf{x}$ sur C et définissons, d'abord d'une façon arbitraire, la fonction continue $\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$ dans l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x},\theta_\alpha,0))$; la relation (11) définit alors la fonction dans chacun des $n_\alpha-1$ intervalles homologues de $(\mathbf{x}, g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$, qui recouvrent C. On a $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)=1$; chaque point revient donc pour $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ à sa position initiale, il est donc nécessaire de montrer que

la valeur $\xi^{0,1***}[g_{n_\alpha}(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$, donnée par (11) lorsqu'on fait $r = n_\alpha$ coïncide avec $\xi^{0,1***}(x|\theta_\alpha)$. En substituant, comme il est évidemment permis, les sommations de 1 à n_α par des sommations de 0 à $n_\alpha - 1$, nous sommes amenés de la sorte à vérifier l'identité

$$(12)\quad \xi(x|\theta_\alpha)\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} - \sum_0^{n_\alpha-1} \xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)|\theta_\alpha]\frac{g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_j^{1,0}(x,\theta_\alpha)} \equiv 0.$$

En dérivant (7) nous trouvons

$$(13)\quad \xi^{1,0}(x|\theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_g^{1,0}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$$
$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_1^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}\sum_0^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} g_l^{1,0}(x,\theta_\alpha),$$

et de là, de façon plus générale,

$$\xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)|\theta_\alpha] = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$$
$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_1^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$$
$$\times\sum_0^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} g_l^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha].$$

Si nous introduisons dans (12) cette expression pour $\xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)|\theta_\alpha]$, nous trouvons

$$(12')\quad \xi(x|\theta_\alpha)\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$$
$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_j^{1,0}(x,\theta_\alpha)}\sum_1^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$$
$$+\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \sum_1^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{01}[g_{j+s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_{j+s}^{1,0}(x,\theta_\alpha)}$$
$$\times\sum_0^{s-1}{}_l g_l^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} \equiv 0.$$

En rappelant l'expression (7) de la fonction $\xi(x|\theta_\alpha)$ on reconnaît immédiate-

ment que le premier et le deuxième terme de (12′) sont égaux, de signe opposé; il nous reste alors à démontrer qu'on a

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}\sum_{1}^{n_\alpha-1}\left\{\frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}_{j+s}(x,\theta_\alpha)}\right.$$

$$\left.\times\sum_{0}^{s-1}{}_l\, g^{1,0}_l[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\right\}\equiv 0.$$

Pour démontrer cette dernière identité il faut associer au terme entre accolades, qui correspond aux valeurs j, s des indices, le terme qui correspond aux valeurs

$$\bar{j}=j+s,\qquad \bar{s}=n-s.$$

On trouve facilement

$$\equiv\frac{g^{0,1}[g_{\bar{j}+\bar{s}-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{\bar{j}-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}_{\bar{j}+\bar{s}}(x,\theta_\alpha)}\sum_{0}^{s-1}{}_l\, g^{1,0}_l[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{g^{2,0}[g_{l+\bar{j}}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+\bar{j}}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$$

$$\equiv\frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}_{j+s}(x,\theta_\alpha)}\sum_{s}^{n_\alpha-1}{}_l\, g^{1,0}_l[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]};$$

par conséquent, en associant le terme j, s avec le terme $\bar{j}, \bar{s}$ on a

$$\frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}_{j+s}(x,\theta_\alpha)}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_l\, g^{1,0}_l[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}.$$

On reconnaît que cette expression est identiquement nulle en remarquant que la sommation par rapport à l représente la dérivée par rapport à x de la fonction $g^{1,0}_{n_\alpha}[g_j(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\equiv 1$. *L'identité* (12) *est donc vérifiée.*

La solution $\xi^{0,1***}(x,\theta_\alpha)$ de l'équation (9), que nous avons ainsi déterminée, aura en général des discontinuités en $\mathbf{x}$ et dans ses $n_\alpha-1$ homologues. Il est toutefois facile d'éliminer ces discontinuités : $\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$ avait été définie d'une façon arbitraire dans l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$; il suffit d'attribuer au contraire à la fonction dans le point $g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha)$ la valeur $\xi^{0,1***}[g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ donnée par (11) lorsqu'on fait $x=\mathbf{x}$ et $r=n_{\alpha-1}$.

Nous allons maintenant déduire, de la solution $\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de l'équation (9), une solution $\xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de l'équation (6″). On reconnaît d'abord que la fonction

$$\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)+A_\alpha\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\qquad(A_\alpha=\text{const.})$$

représente aussi, quel que soit A_α, une solution de (9).

Soustrayons d'autre part de (9) l'identité

$$\frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\Big\{\xi^{0,1***}[g(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha] - \frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha) + \xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,\mathrm{L}[\xi(x),\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1]\Big\} = \frac{d}{dx}\mathrm{L}[\xi(x),\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1];$$

nous obtenons de la sorte, pour $g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) - \mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1]$, l'équation linéaire et homogène

$$\frac{d}{dx}\{g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) - \mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1]\} = \frac{\xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\{g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) - \mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1]\};$$

cette équation démontre que si une solution de (9) vérifie (6″) pour une valeur particulière $\mathbf{x}$ de x, elle vérifie (6″) pour toute autre valeur de x et représente alors une solution de cette équation.

Attribuons donc à A_α la valeur

$$\frac{g^{0,1**}(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha) - \int_0^1 \xi^{0,1***}[g(\mathbf{x},\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(\mathbf{x},1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(\mathbf{x},\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau}{\xi[g(\mathbf{x},\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]},$$

on trouve alors

$$\int_0^1 \{\xi^{0,1***}[g(\mathbf{x},\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] + \mathrm{A}_\alpha\xi[g(\mathbf{x},\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\}\frac{\xi[g(\mathbf{x},1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(\mathbf{x},\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = g^{0,1**}(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha).$$

Cette relation nous montre que la fonction

$$\xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) = \xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha) + \mathrm{A}_\alpha\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$$

vérifie (6″) pour $\mathbf{x} = x$; d'après la remarque que nous venons de faire cette fonction représente donc une solution de (6″). Enfin la fonction

$$(14)\qquad \xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha) = \frac{1}{d_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha) + \xi^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) = \left(\frac{1}{d_\alpha} + \mathrm{A}_\alpha\right)\xi(x\,|\,\theta_\alpha) + \xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$$

nous donne la solution de l'équation (6).

Il importe de remarquer, en terminant, que *la fonction* $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ *est complètement déterminée; on peut au contraire ajouter à* $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ *une solution arbitraire* $\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha)$ *de l'équation*

$$\mathrm{L}[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha),x,1] = \int_0^1 \xi^{0,1****}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = 0;$$

cette remarque nous sera nécessaire au chapitre IV.

CHAPITRE II.

7. Nous sommes maintenant en état de donner une idée plus précise de la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1.

Indiquons encore par $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \ldots$ les réduites du développement en fraction continue du module rationnel $\mathbf{k}$; par $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$ et par Θ les valeurs correspondantes du paramètre. D'après ce qu'on a démontré au paragraphe 6, on peut construire, pour chaque valeur de l'index α, deux fonctions $\xi(x|\theta_\alpha)$, $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$, telles que, si l'on considère les ∞^1 groupes g_1 engendrés par les transformations infinitésimales

$$\bar{\xi}(x, \theta|\theta_\alpha)\frac{df}{dx} \equiv \frac{\xi(x|\theta_\alpha)}{1-\frac{\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\frac{df}{dx} \equiv \{\xi(x|\theta_\alpha)+\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)(\theta-\theta_\alpha)+\ldots\}\frac{df}{dx},$$

et si l'on représente par

$$x_1 = \bar{g}(x, \theta|\theta_\alpha) \tag{1^\alpha}$$

l'équation de la famille $\bar{T}_0(\theta|\theta_\alpha)$ formée par les ∞^1 transformations de paramètre $t=1$ appartenant à ces groupes, on a

$$\bar{g}(x, \theta_\alpha|\theta_\alpha) = g(x, \theta_\alpha), \qquad \bar{g}^{0,1}(x, \theta_\alpha|\theta_\alpha) = g^{0,1}(x, \theta_\alpha).$$

Nous dirons que la famille $\bar{T}(\theta|\theta_\alpha)$ *est tangente en* θ_α *à la famille* $T(\theta)$. Rappelons toutefois que $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$ n'est pas définie d'une façon univoque.

Nous démontrerons que la succession des fonctions

$$\xi(x|\theta_1), \quad \xi(x|\theta_2), \quad \ldots, \quad \xi(x|\theta_\alpha), \quad \ldots \tag{15}$$

converge d'une façon uniforme vers une fonction positive $\xi(x|\Theta)$, Alors, des relations

$$\int_x^{g(x,\theta_1)} \frac{dx}{\xi(x|\theta_1)} = 1, \qquad \int_x^{g(x,\theta_2)} \frac{dx}{\xi(x|\theta_2)} = 1, \qquad \ldots, \qquad \int_x^{g(x,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x|\theta_\alpha)} = 1, \qquad \ldots,$$

et de la convergence de la succession (15) vers $\xi(x|\Theta)$ et de la succession

$$g(x, \theta_1), \qquad g(x, \theta_2), \quad \ldots, \quad g(x, \theta_\alpha), \quad \ldots$$

vers $g(x, \Theta)$, il s'ensuit l'équation

$$\int_x^{g(x,\Theta)} \frac{dx}{\xi(x|\Theta)} = 1,$$

qui démontre que le groupe g_1 engendré par $\xi(x|\Theta)\frac{df}{dx}$ donne $T(\Theta)$ pour $t=1$.

Pour démontrer que la succession (15) converge d'une façon uniforme, nous

devrons comparer deux termes successifs $\xi(x|\theta_\alpha)$, $\xi(x|\theta_{\alpha+1})$ et montrer que, pour $\alpha \to \infty$, leur rapport tend vers 1 d'une façon convenable. *Indiquons par* $\theta_{\alpha+1}$ *le paramètre de la transformation de module* $\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$ *appartenant à la famille* $\overline{T}(\theta|\overline{\theta}_\alpha)$; l'étude du rapport $\frac{\xi(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}$ sera ramené à celui des deux rapports $\frac{\xi(x|\theta_\alpha)}{\overline{\xi}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)}$ et $\frac{\overline{\xi}(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}$. Pour étudier le deuxième de ces deux rapports nous devrons avoir recours à l'expression (7) de $\overline{\xi}(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$ et de $\xi(x|\theta_{\alpha+1})$ en fonction de $\overline{g}(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$, $\overline{g}^{1,0}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$, $\overline{g}^{0,1}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$ et de $g(x,\theta_{\alpha+1})$, $g^{1,0}(x,\theta_{\alpha+1})$, $g^{0,1}(x,\theta_{\alpha+1})$ respectivement.

Cette recherche sera faite au chapitre III; dans ce chapitre II nous devrons étudier préalablement les fonctions $\overline{g}(x,\theta|\theta_\alpha)$, $\overline{g}^{1,0}(x,\theta|\theta_\alpha)$ et $\overline{g}^{0,1}(x,\theta|\theta_\alpha)$ pour évaluer les erreurs qu'on commet lorsqu'on substitue à ces fonctions les fonctions $g(x,\theta)$, $g^{1,0}(x,\theta)$ et $g^{0,1}(x,\theta)$ respectivement. Cette étude demande, à son tour, qu'on donne des bornes pour $\xi(x|\theta_\alpha)$, pour $\xi^{1,0}(x|\theta_\alpha)$, pour la constante de Lipschitz de cette fonction et enfin pour $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$.

Au chapitre IV on démontrera enfin que la fonction $\xi(x,\theta)$ est continue par rapport à θ.

8. *Nous désignons par* $M^{1,0}$ *et par* $\underline{M}^{1,0}$ *respectivement le maximum et le minimum de la fonction positive* $g^{1,0}(x,\theta)$, *par* $M^{2,0}$ *le maximum de la valeur absolue de* $g^{2,0}(x,\theta)$, *par* $M^{3,0}$ *la constante de Lipschitz de cette même fonction par rapport à la variable* x. *Nous indiquons ensuite par* $M^{0,1}$ *et par* $\underline{M}^{0,1}$ *respectivement le maximum et le minimum de* $g^{0,1}(x,\theta)$, *par* $M^{0,2}$ *la constante de Lipschitz de cette fonction par rapport à* θ. *Nous indiquerons enfin par* $M^{1,1}$ *le maximum de* $g^{1,1}(x,\theta)$ *et par* $M^{2,1}$ *et* $M^{1,2}$ *respectivement la constante de Lipschitz de cette fonction par rapport à* x *et par rapport à* θ.

Nous utiliserons certaines locutions analogues à celles introduites dans le Mémoire précédent. Soit P′ et P″ deux quantités dépendant d'un nombre quelconque d'indices et de variables : en disant que « P″ *est de l'ordre* de P′ » nous indiquerons qu'on a deux inégalités

$$p|P'| < |P''| < q|P'|,$$

p et q étant deux constantes positives, qui dépendent seulement de la fonction $g(x,\theta)$, qui définit $T(\theta)$ (d'une façon plus précise, des constantes $M^{i,j}$ introduites précédemment). En disant que « P″ *est au plus de l'ordre de* P′ » nous indiquerons le fait que la deuxième des deux inégalités précédentes est valable; en disant que « P″ *est de l'ordre de* P′ *au moins* » on indiquera que la première des deux inégalités est valable.

Nous dirons en particulier qu'une quantité P *reste finie* si elle est de l'ordre

d'un nombre donné différent de zéro, ou, en d'autres termes, si elle est bornée de même que son inverse.

9. Nous allons indiquer ici certains résultats, qu'on peut déduire immédiatement des considérations développées dans le deuxième et dans le troisième chapitre du premier Mémoire, et qui nous seront nécessaires dans la suite.

k étant le module, rationnel ou irrationnel, qui correspond à la valeur 0 du paramètre, $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ étant ensuite une des réduites du développement de k en fraction continue, nous indiquerons par

$$x' = x + \gamma_\alpha(x \mid 0)$$

l'équation de la transformation très petite, qui transforme les points de C de la même façon que $T^{n_\alpha}(0)$. D'après ce qu'on a vu dans G, au paragraphe 12, la fonction $\gamma_\alpha(x \mid 0)$ *est de l'ordre de* p^α *au plus*, p étant un nombre plus petit que 1, qui dépend des constantes $M^{i,j}$ seulement.

Considérons le rapport $\frac{\gamma_\alpha[g_i(x, \theta) \mid \theta]}{\gamma_\alpha(x \mid \theta)}$ valeurs de cette fonction au point x et transformé par $T^i(\theta)$. On a, comme on a vu au paragraphe 11 du premier mémoire,

$$\frac{\gamma_\alpha[g_i(x, \theta) \mid \theta]}{\gamma_\alpha(x \mid \theta)} = g_i^{1,0}(x^\star, \theta), \tag{16}$$

$x^\star$ étant un point convenable de l'intervalle $(x, g_{n_\alpha}(x, \theta))$ d'ampleur $|\gamma_\alpha(x \mid 0)|$. x' et x'' étant deux points de l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta))$ considérons le rapport $\frac{g_{n_\alpha}^{1,0}(x', \theta)}{g_{n_\alpha}^{1,0}(x'', \theta)}$; ce rapport est égal à 1 (G, § 19), à une quantité près, qui est plus petite que $\left|\frac{x' - x''}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta)}\right| \varepsilon_\alpha$, ε_α étant de l'ordre de $\frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}$ au plus. Plus généralement le rapport $\frac{g_i^{1,0}(x', \theta)}{g_i^{1,0}(x'', \theta)}$ $(i \leqq n_\alpha)$ est égal à 1 (G, § 20), à une quantité près, qui est plus petite que $\left|\frac{x' - x''}{\gamma_{\alpha-1}(x, \theta)}\right| \varepsilon_\alpha^*$, ε_α^* étant également de l'ordre de $\frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}$ au plus.

10. Considérons l'allure de la fonction

$$\xi(x \mid \theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)} \tag{7}$$

dans l'intervalle $(x, g_{n_\alpha - 1}(x, \theta_\alpha))$ défini par deux points contigus homologues par rapport au groupe cyclique d'ordre n_α engendré par $T(\theta_\alpha)$. Soient x' et x'' deux points de l'intervalle : nous voulons montrer que *le rapport* $\frac{\xi(x' \mid \theta_\alpha)}{\xi(x'' \mid \theta_\alpha)}$ *est égal à* 1, *à une quantité près de* l'ordre de ε_α^* au plus. Ayons recours pour cela à

l'expression (7) de $\xi(x|\theta_\alpha)$; étant donné que les termes de la sommation sont tous du même signe (positif) il suffira d'avoir montré la même chose pour chacun des produits $\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x'',\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{0,1}[g_{s-1}(x',\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\cdot\frac{g_s^{1,0}(x',\theta_\alpha)}{g_s^{1,0}(x'',\theta_\alpha)}$. $g^{0,1}(x,\theta_\alpha)$ reste supérieur au nombre positif donné $\overline{M}^{0,1}$ et satisfait à la condition de Lipschitz; l'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x|\theta_\alpha)|$ de l'intervalle $(x, g_{n_\alpha-1}(x,\theta_\alpha))$, qui contient x' et x'', est infiniment petite d'un ordre supérieur par rapport à ε_α^*, comme on l'a dit au paragraphe précédent. Il s'ensuit que la première fraction dans le rapport précédent est égal à 1, à une quantité près infiniment petite d'ordre supérieur à ε_α^*. D'autre part, d'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, la deuxième fraction est égale à 1, à une quantité près de l'ordre de ε_α^* au plus.

Nous pouvons déduire, du résultat précédent, un lemme qui nous sera souvent nécessaire dans la suite :

La somme

$$\sum_0^{n_\alpha-1}{}_i\,\xi[g_i(x,\theta_\alpha)|\theta_\alpha| \tag{17}$$

des valeurs, que la fonction $\xi(x|\theta_\alpha)$ *prend en* x *et dans ses* $n_\alpha-1$ *homologues par rapport à* $T(\theta_\alpha)$ *est de l'ordre de* n_α.

Remarquons d'abord que chacun des modules

$$0,\quad \frac{m_\alpha}{n_\alpha},\quad 2\frac{m_\alpha}{n_\alpha},\quad \ldots,\quad (n_\alpha-1)\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$$

des transformations

$$T^0(\theta_\alpha),\quad T(\theta_\alpha),\quad T^2(\theta_\alpha),\quad \ldots,\quad T^{n_\alpha-1}(\theta_\alpha),$$

engendrées par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ est congru (mod 1) à l'un des nombres

$$0,\quad \frac{1}{n_\alpha},\quad \frac{2}{n_\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{n_\alpha-1}{n_\alpha}.$$

Nous avons déjà (§ 6) représenté par

$$x_1 = g(x,t|\theta_\alpha)$$

l'équation du groupe g_1 engendré par la transformation infinitésimale $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$, qui donne pour $t=1$ la transformation $T(\theta_\alpha)$ de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; pour t égal à $0, \frac{1}{m_\alpha}, \frac{2}{m_\alpha}, \ldots, \frac{n_\alpha-1}{m_\alpha}$ cette équation donnera donc des transformations qui coïncident, au point de vue géométrique, avec les transformations $T^0(\theta_\alpha)$, $T(\theta_\alpha)$, $T^2(\theta_\alpha)$, $\ldots$, $T^{n_\alpha-1}(\theta_\alpha)$, ordonnées d'une façon convenable. La somme (17) est alors également donnée par

$$\sum_0^{n_\alpha-1}{}_i\,\xi\left[g\left(x,\frac{i}{m}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]. \tag{17'}$$

Deux points $g\left(x, \frac{i}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$, $g\left(x, \frac{i+1}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$ sont contigus homologues par rapport au groupe cyclique engendré par $T(\theta_\alpha)$; d'après le résultat précédemment établi dans ce paragraphe, le rapport entre les valeurs que $\xi(x|\theta_\alpha)$ prend en deux points quelconques de l'intervalle $\left(g\left(x, \frac{i}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right), g\left(x, \frac{i+1}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\right)$ est infiniment proche de l'unité. On peut alors regarder l'expression

$$\frac{1}{m_\alpha}\sum_{0}^{n_{\alpha-1}}{}_i\,\xi\left[g\left(x, \frac{i}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]$$

comme une somme de Riemann relative à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{n_\alpha}{m_\alpha}} \xi[g(x, t|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]\,dt = \int_x^{x+1} \xi(x|\theta_\alpha)\frac{dx}{\xi(x|\theta_\alpha)} = 1;$$

la valeur de la somme (17′) ou (17) est sensiblement égale à m_α, c'est-à-dire, comme nous l'avions annoncé, de l'ordre de n_α,

Nous terminerons ce paragraphe par une application du résultat obtenu au commencement, qui nous sera nécessaire dans la suite.

Le module de la transformation très petite

$$x' = x + \gamma_{\alpha-1}(x|\theta_\alpha),$$

qui transforme les points de C comme $T^{n_{\alpha-1}}(\theta_\alpha)$, est donné par

$$n_{\alpha-1}\frac{m_\alpha}{n_\alpha} - m_{\alpha-1} = \frac{(-1)^\alpha}{n_\alpha}.$$

Cette même transformation appartient au groupe g_1 engendré par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$, qui donne pour $t=1$ la transformation $T(\theta_\alpha)$, de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; on obtiendra donc la transformation très petite en question, en faisant $t=\frac{1}{m_\alpha}$; l'équation de la transformation sera alors

$$\int_x^{x'} \frac{dx}{\xi(x|\theta_\alpha)} = \int_x^{x+\gamma_{\alpha-1}(x,\,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x|\theta_\alpha)} = \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}.$$

Étant donné que $\xi(x|\theta_\alpha)$ a sensiblement la même valeur en tout point de l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha))$, la valeur de l'intégrale précédente est sensiblement donnée par $\frac{\gamma_{\alpha-1}(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_\alpha)}$ et l'on aura donc

$$\frac{\gamma_{\alpha-1}(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_\alpha)} = \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}.$$

On peut conclure que $\gamma_{\alpha-1}(x|\theta_\alpha)$ *est de l'ordre de* $\frac{1}{m_\alpha}\xi(x|\theta_\alpha)$.

11. Nous voulons montrer que, pour toute valeur θ_α du paramètre, qui

correspond à une valeur rationnelle $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ du module, *la dérivée* $k'(\theta_\alpha)$ *de* $k(\theta)$ *est au moins égale* au nombre positif $\underline{M}^{0,1}$.

En indiquant par $d\theta$ une quantité infiniment petite, partons de l'identité

$$(18)\qquad T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)\equiv\prod_{n_\alpha}^{1}{}_s\, T^{-s}(\theta_\alpha)[T(\theta_\alpha+d\theta)T^{-1}(\theta_\alpha)]T^{s}(\theta_\alpha).$$

Au deuxième membre, on reconnaît les transformations transformées de $T(\theta_\alpha+d\theta)T^{-1}(\theta_\alpha)$, qui ont toutes évidemment le même module. $T(\theta_\alpha+d\theta)T^{-1}(\theta_\alpha)$ induit sur un point de C un déplacement, qui est au moins égal à $\underline{M}^{0,1}\,d\theta$, son module est donc au moins égal à $\underline{M}^{0,1}\,d\theta$. De (18), et du lemme donné au paragraphe 7 du premier Mémoire, on déduit que le module de $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ est au moins égal à $n_\alpha\underline{M}^{0,1}\,d\theta$.

$T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)$ étant évidemment permutable avec toute autre transformation, et donc en particulier avec $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$, le module de $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ est égal à la différence entre le module de $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ et celui de $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$. Cette différence est donc au moins égale à $n_\alpha\underline{M}^{0,1}\,d\theta$; la différence entre le module de $T(\theta_\alpha+d\theta)$ et celui de $T(\theta_\alpha)$ est alors au moins égale à $\underline{M}^{0,1}\,d\theta$, et la dérivée $k'(\theta_\alpha)$ est au moins égale à $\underline{M}^{0,1}$.

12. Nous voulons montrer d'autre part que $k'(\theta_\alpha)$ *reste borné*. Considérons pour cela de nouveau la transformation

$$(18)\qquad T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)\equiv\prod_{n_\alpha}^{1}{}_s\, T^{-s}(\theta_\alpha)[T(\theta_\alpha+d\theta)T^{-1}(\theta_\alpha)]T^{s}(\theta_\alpha);$$

comme on l'a remarqué au paragraphe précédent, on a, au deuxième membre, le produit des transformations transformées de la transformation très petite $T(\theta_\alpha+d\theta)T^{-1}(\theta_\alpha)$ par les puissances négatives de $T(\theta_\alpha)$; pour $d\theta$ infiniment petit, cette transformation très petite est caractérisée par la fonction $g^{0,1}[g_{-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,d\theta$. En ayant alors recours aux formules données au paragraphe 7 du premier Mémoire, on trouve que la transformation $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ est caractérisée par la fonction

$$\sum_{1}^{n_\alpha}{}_s\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}\,d\theta.$$

D'après une formule donnée dans le même paragraphe le module de la transformation est alors donné par

$$\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dx}{\displaystyle\sum_{1}^{n_\alpha}{}_s\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}\,d\theta}}.$$

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on obtient $k'(\theta_\alpha)$ en divisant cette expression par $n_\alpha d\theta$; pour démontrer que $k'(\theta_\alpha)$ reste bornée il suffit alors de démontrer la même chose pour la fonction

$$\frac{1}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}.$$

Si, pour chaque entier $\alpha' \leq \alpha$, nous posons

$$\chi_{\alpha'}(x\,|\,\theta_\alpha) = \frac{1}{n_{\alpha'}}\sum_{1}^{n_{\alpha'}}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)},$$

nous avons, pour la fonction $\chi_{\alpha'}(x\,|\,\theta_\alpha)$, la relation récurrente

$$(19)\qquad \chi_{\alpha'+1}(x\,|\,\theta_\alpha) = \frac{1}{n_{\alpha'+1}}\left\{\sum_{0}^{\alpha'}{}_l \frac{n_{\alpha'}}{g^{1,0}_{l n_{\alpha'}}(x,\theta_\alpha)}\chi[g_{l n_{\alpha'}}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] + \frac{n_{\alpha'-1}}{g^{1,0}_{a_{\alpha'}n_{\alpha'}}(x,\theta_\alpha)}\chi_{\alpha'-1}[g_{a_{\alpha'}n_{\alpha'}}(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\right\}.$$

la considération de cette relation nous permettra de démontrer que la fonction

$$\frac{1}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}$$

reste bornée; il est toutefois nécessaire d'interrompre le cours de la déduction pour étudier la fonction

$$\gamma_{\alpha'}(x\,|\,\theta_\alpha) = g_{n_{\alpha'}}(x,\theta_\alpha) - x - m_{\alpha'},$$

déjà considérée au paragraphe 9, et qui représente la transformation très petite $\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$; en désignant par $\mathbf{x}$ un point déterminé de C nous étudions l'allure de cette fonction dans l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$.

Divisons l'intervalle $(\theta_{\alpha'}, \theta_\alpha)$ en un nombre infiniment grand de parties d'ampleur $d\theta$. Nous avons

$$(20)\quad \mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha) = [\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+d\theta)][\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+d\theta)\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+2d\theta)]\ldots[\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_\alpha - d\theta)\mathrm{T}_{\alpha'}(\theta^n)].$$

Toutes les transformations $[\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+d\theta)]$, $[\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+d\theta)\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+2d\theta)]\ldots$, déplacent les points de C dans le même sens, qui est celui de la transformation $\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$. Cette dernière transformation porte l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$ dans l'intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x},\theta_\alpha), g_{n_{\alpha'}+n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$; alors le produit des l premiers facteurs $\left(l < \frac{\theta_\alpha - \theta_{\alpha'}}{d\theta}\right)$ du deuxième membre de (20) transforme chaque point de l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$ en un point intérieur à l'inter-

valle (¹). La transformation très petite représentée symboliquement par le $(l+1)^{\text{ième}}$ facteur

$$T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+l\,d\theta)\,T^{n_{\alpha'}}[\theta_{\alpha'}+(l+1)\,d\theta]$$

est caractérisée par la fonction

$$(21)\qquad \sum_{s}^{n_{\alpha'}} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_{\alpha'}+l\,d\theta),\theta_{\alpha'}+l\,d\theta]}{g_s^{1,0}(x,\theta_{\alpha'}+l\,d\theta)}\,d\theta \quad (^1).$$

Indiquons par x' et x'' deux points quelconques de l'intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x},\theta_\alpha), g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$; on démontre par un raisonnement tout à fait analogue à celui qu'on a employé au paragraphe 10 pour le rapport $\frac{\xi(x'|\theta_\alpha)}{\xi(x''|\theta_\alpha)}$ que le rapport entre les valeurs que la fonction (21) prend en x' et x'' est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus. En d'autres termes, le rapport entre l'ampleur des déplacements induits par le $(l+1)^{\text{ième}}$ facteur du deuxième membre de (20) sur les points x' et x'' est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus.

Considérons maintenant deux points de l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$ et les deux points transformés de ces points $T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\,T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$. On obtient les points transformés par $\left|\frac{\theta_\alpha-\theta_{\alpha'}}{d\theta}\right|$ déplacements élémentaires successifs, tous dans un même sens, appliqués aux points donnés, ces déplacements correspondant aux $\left|\frac{\theta_\alpha-\theta_{\alpha'}}{d\theta}\right|$ facteurs du deuxième membre de (20). Nous venons de voir, d'autre part, que le rapport entre les déplacements que chacun de ces facteurs induit sur les deux points est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus: nous arrivons alors à la même conclusion pour ce qui concerne le déplacement total induit par $T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\,T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$. Cela signifie que le rapport des valeurs que $\gamma_{\alpha'}(x|\theta_\alpha)$ prend en ces deux points est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus.

Nous allons dès maintenant désigner par $(g_{-n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha),\mathbf{x})$ l'intervalle indiqué jusqu'ici par $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$; appliquons le résultat que nous venons d'établir à l'étude des fonctions $g_{ln_{\alpha'}}(x,\theta_\alpha)$ qui paraissent dans (19). Nous avons, en rappelant (16),

$$\frac{\gamma_{\alpha'}[g_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x},\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha'}(\mathbf{x}|\theta_\alpha)} = g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x^*,\theta_\alpha) \qquad (l=1,2,\ldots,a_\alpha),$$

x^* étant un point convenable de l'intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x},\theta_\alpha),\mathbf{x})$, dont le choix dépend aussi de l'index l. D'après le résultat que nous venons d'établir on a

(¹) On peut le voir par un raisonnement semblable à celui du début du paragraphe pour la transformation $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\,T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+l\,d\theta)$. $[\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'}+n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\theta_\alpha)]$.

alors que $g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x^*, \theta_\alpha)$ est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus.

Il s'agit maintenant de montrer qu'une telle conclusion est également valable pour $g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$, c'est-à-dire lorsqu'on substitue au point x^* le point $\mathbf{x}$, qui est un point arbitraire de C. On a

$$\frac{g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x^*, \theta_\alpha)}{g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)} = \prod_{0}^{l-1} \frac{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{ln_{\alpha'}}(x^*, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}, \tag{22}$$

$\frac{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{ln_{\alpha'}}(x^*, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$ est égal à 1 (§ 9), à une quantité près, de l'ordre de $\left|\frac{g_{ln_{\alpha'}}(x^*, \theta_\alpha) - g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha'-1}[g_{-n_{\alpha'-1}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}\right| \varepsilon_\alpha$ au plus. En remarquant que les intervalles $(g_{ln_{\alpha'}}(x^*, \theta_\alpha), g_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ ont, tout au plus, les points extrêmes en commun et qu'ils sont tous compris dans l'intervalle $(x, g_{-n_{\alpha'-1}}(x, \theta_\alpha))$, on trouve alors que le premier membre de (21) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus; finalement *on trouve que*

$$g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \qquad (l = 1, 2, \ldots, a_{\alpha'})$$

est égal à 1, *à une quantité près, de l'ordre de* $\varepsilon^*_{\alpha'}$ *au plus.*

Revenons à l'étude de (19). Par un raisonnement semblable à celui développé au commencement du paragraphe 10 pour la fonction $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ on trouve que $\gamma_{\alpha'}[g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ est égale à $\gamma_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$, à un facteur près, qui diffère de 1 d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus. Dans la même approximation on peut substituer dans (19) $\gamma_{\alpha'-1}[g_{a_{\alpha'}n_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ par $\gamma_{\alpha'-1}(x \mid \theta_\alpha)$. On tire alors de (19) que $\gamma_{\alpha'+1}(x \mid \theta_\alpha)$ est donnée par

$$\frac{1}{n_{\alpha'+1}} \{ a_{\alpha'} n_{\alpha'} \gamma_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha) + n_{\alpha'-1} \gamma(x \mid \theta_\alpha) \}$$

à un facteur près, qui diffère de 1 d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus. En remarquant que

$$a_{\alpha'} n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1} = n_{\alpha'+1},$$

on déduit d'ici que $\gamma_{\alpha'+1}(x \mid \theta_\alpha)$ ne peut pas dépasser le plus grand des deux nombres $\gamma_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$, $\gamma_{\alpha'-1}(x \mid \theta_\alpha)$, multiplié par un facteur, qui dépasse 1 d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha'}$ au plus.

Remarquons maintenant que, d'après ce qu'on a dit au paragraphe 9 concernant l'ordre de grandeur des nombres $\varepsilon^x_{\alpha'}$, la série $\varepsilon^*_1 + \varepsilon^*_2 + \varepsilon^*_3 + \ldots$ converge; on déduit alors du résultat précédent que $\gamma_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$ reste bornée lorsque θ_α et α' varient. En faisant $\alpha' = \alpha$ on trouve enfin que la fonction

$$\frac{1}{n_\alpha} \sum_{1}^{n_\alpha} \sum_{s} \frac{g^{0,1}[g_s(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{s_x}(x, \theta_\alpha)} \cdot$$

reste bornée, et de là, comme on a dit au commencement du paragraphe, on conclut que $k'(\theta_\alpha)$ reste bornée.

13. D'après les résultats des deux derniers paragraphes nous pouvons dire que $k'(\theta_\alpha)$ reste finie. D'ailleurs, comme on l'a vu au paragraphe 12, $k'(\theta_\alpha)$ est donnée par l'intégrale

$$\int_x^{x+1} \frac{dx}{\frac{1}{n_\alpha}\sum_1^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}}; \tag{23}$$

on peut donc affirmer que l'intégrale en question reste finie.

On a d'autre part, en rappelant (7),

$$\frac{1}{n_\alpha}\sum_1^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)} = \frac{1}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)} = \frac{1}{d_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha),$$

d_α étant déterminée par la condition

$$\int_x^{g(x,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1. \tag{3'}$$

De cette même condition (3') on déduit d'autre part que l'intégrale

$$\int_x^{x+1} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} \tag{24}$$

reste finie. De la considération des deux intégrales (23) et (24) on déduit que *le nombre d_α reste fini* lorsque θ_α varie.

On peut déduire de ce résultat un lemme, qui est à rapprocher de celui donné au paragraphe 10 : *La somme des inverses des valeurs de la fonction $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ en un point x et dans ses $n_\alpha - 1$ homologues par rapport à $T(\theta_\alpha)$,*

$$\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s \frac{1}{\xi[g_s(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]},$$

est de l'ordre de n_α.

Pour la démonstration, remarquons que, en dérivant par rapport à x l'équation

$$\int_x^{g(x,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1, \tag{3'}$$

on trouve

$$g^{1,0}(x,\theta_\alpha) = \frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}; \tag{25}$$

de cette relation on déduit, plus en général,

$$g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha) = \frac{\xi[g_s(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}. \tag{26}$$

On a alors

$$(7') \quad \xi(x\ \theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)} = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha) \sum_0^{n_\alpha - 1} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{\xi[g_s(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]},$$

et de là

$$\frac{n_\alpha}{d_\alpha} = \sum_0^{n_\alpha - 1} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{\xi[g_s(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}.$$

En rappelant que $g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$ reste comprise entre les deux nombres positifs $\underline{M}^{0,1}$ et $M^{0,1}$, on reconnaît que cette relation démontre le lemme énoncé.

14. Nous devons donner, dans ce paragraphe, une borne pour la valeur absolue de la fonction $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$. Pour cela il faut évaluer, d'une façon préliminaire, l'ordre de grandeur de la somme

$$(27) \qquad \sum_0^i \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \qquad (i < n_\alpha).$$

Nous allons voir que, à une quantité près que nous pouvons négliger, cette somme est donnée par

$$(28) \qquad \frac{g_i^{1,0}[g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_i^{1,0}(x, \theta_\alpha)} - 1;$$

en effet (par un raisonnement tout à fait semblable à celui développé dans la note de la page 267 du premier Mémoire), on trouve d'abord qu'on peut remplacer l'expression (28) par la somme

$$\sum_0^i \frac{g^{1,0}[g_{l+n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] - g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}.$$

Appliquons ensuite le théorème de la moyenne aux numérateurs des termes de cette somme et substituons, dans chaque numérateur, à la valeur de la fonction $g^{2,0}(x, \theta_\alpha)$, calculée en un point intérieur de l'intervalle $(g_l(x, \theta_\alpha), g_{l+n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha))$ la valeur $g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$, que cette même fonction prend à l'extrémité de l'intervalle. Nous faisons de la sorte, une erreur totale, au plus de l'ordre du maximum de l'ampleur de l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha))$ (1); nous arrivons ainsi à la somme (27).

D'après le résultat du paragraphe 20 du premier Mémoire l'expression (28) est de l'ordre de ε_α^* au plus, il en est alors de même de la sommation (27), que nous devions évaluer.

(1) On peut le reconnaître par un raisonnement analogue à celui fait à la page 266 du premier Mémoire.

Après ces considérations préliminaires venons à l'étude de $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$; en utilisant pour cette fonction son expression (13) et en rappelant (26), on a

$$(13') \quad \xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$

$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_1^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)} \sum_0^{s-1} {}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} g_l^{1,0}(x, \theta_\alpha)$$

$$= \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} - \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \sum_1^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

$$\times \left\{ \sum_0^{s-1} {}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \right\}.$$

On voit que $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$ nous est donnée par la différence entre deux expressions, que nous allons considérer séparément.

La première expression consiste dans la somme de n_α termes qui sont bornés, multipliée par le facteur d_α, qui reste fini, et divisée par n_α; la valeur de cette expression est évidemment bornée.

Pour évaluer la deuxième expression, supposons avoir démontré, d'une façon préliminaire, que les sommes entre accolades sont toutes au plus de l'ordre d'une certaine quantité $N_\alpha^{1,0}$; il en résultera alors que l'expression à considérer est elle-même au plus de l'ordre de

$$\frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_1^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)} N_\alpha^{1,0},$$

par conséquent [d'après (7)] au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Il s'agit donc d'évaluer les sommations

$$(29) \qquad \sum_0^{s-1} {}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n_\alpha - 1).$$

En indiquant par x_l^* des points convenables de l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha))$ et par ρ_l des nombres (fonctions de x) plus petits que 1 en valeur absolue, nous avons

$$(30) \qquad \frac{\dfrac{\xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}}{\dfrac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)}} = \frac{\dfrac{\xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}}{\dfrac{\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)}} = \frac{g_l^{1,0}(x, \theta_\alpha)}{g_l^{1,0}(x_l^*, \theta_\alpha)} = 1 + \rho_l \varepsilon_\alpha^*.$$

Ces équations nous montrent avant tout que les fractions

$$(31) \qquad \frac{\xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n_\alpha - 1)$$

sont égales entre elles, à des quantités près qui, pour $\alpha \to \infty$, sont négligeables par rapport à ces mêmes fractions; en remarquant alors que la somme

$$\sum_{0}^{n_{\alpha-1}} {}_{l} \xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$$

est (§ 10) de l'ordre de n_α et que la somme

$$\sum_{0}^{n_{\alpha-1}} {}_{l} |\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]|$$

est égale à 1 (1), on conclut que les fractions (31) sont toutes de l'ordre de n_α.

De (30) on tire ensuite

$$\xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] = \frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha](1 + \rho_l \varepsilon_\alpha^*);$$

en introduisant ces expressions dans (29) on obtient

$$(29') \qquad \frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)} \left\{ \sum_{0}^{s-1} {}_{l} \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \right\}$$
$$+ \frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)} \varepsilon_\alpha^* \sum_{0}^{s-1} {}_{l} \rho_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha].$$

La fraction qui multiplie l'expression entre accolades dans le premier des deux termes de (29') est de l'ordre de n_α, d'après ce que nous venons de voir; nous avons démontré d'autre part dans ce même paragraphe que l'expression entre accolades est de l'ordre de ε_α^* au plus, alors le premier terme de (29') est de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^*$ au plus. On reconnaît facilement qu'une même conclusion est valable pour le second terme, en effet, en remarquant que

$$\sum_{0}^{s-1} {}_{l} |\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]| < 1$$

et que les facteurs $\rho_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$ sont bornés, on voit que la sommation par rapport à l dans le deuxième terme reste bornée; le deuxième terme est donc de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^*$ au plus.

On peut enfin conclure, de l'étude faite dans ce paragraphe, que $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$ est de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^*$ au plus; en précisant davantage la définition des

---

(1) En effet, les intervalles

$$(g_{l+n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha), g_l(x, \theta_\alpha)) \qquad (l = 0, 1, \ldots, n_{\alpha-1}),$$

d'ampleur $\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$, recouvrent la courbe C complètement et simplement.

nombres $N_\alpha^{1,0}$ nous pouvons affirmer qu'*on peut donner, pour la valeur absolue de la fonction* $\xi^{1,0}(x|0_\alpha)$, *une borne* $N_\alpha^{1,0}$ *de l'ordre de* $n_\alpha\varepsilon_\alpha^*$ *au plus.*

15. Des résultats établis au paragraphe précédent on déduit facilement que les valeurs de la fonction $\xi(x|0_\alpha)$ sont au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Indiquons en effet par $\mathbf{x}$ le point où $\xi(x|0_\alpha)$ est maximum; du fait que $\xi^{1,0}(x|0_\alpha)$ ne dépasse $N_\alpha^{1,0}$ on déduit que la fonction $\xi(x|0_\alpha)$ reste comprise entre $\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)$ et $\frac{\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)}{2}$ dans tout intervalle de centre $\mathbf{x}$ et d'ampleur non supérieur à $\frac{\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$. Si l'on avait alors $\xi(\mathbf{x}|0_\alpha) > N_\alpha^{1,0}$, la fonction serait partout sur la courbe de l'ordre de $\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)$; d'autre part, d'après (3'), $\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)$ ne peut pas, pour $\alpha \to \infty$, devenir partout infiniment grande.

Nous voulons montrer d'autre part que le *minimum de* $\xi(x|0_\alpha)$ *est de l'ordre de* $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ *au moins*. Indiquons maintenant par $\mathbf{x}$ le point où $\xi(x|0_\alpha)$ est minimun. Dans un intervalle de centre $\mathbf{x}$ et ampleur $2\frac{\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$ les valeurs de la fonction seront comprises entre $\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)$ et $2\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)$. Nous voulons voir combien des intervalles contigus

$$(32)\quad \ldots,\quad (g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha), \mathbf{x}),\quad (\mathbf{x}, g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)),\quad (g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha), g_{2n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)),\quad \ldots$$

d'ampleur

$$\ldots,\quad \gamma_{\alpha-1}[g_{-n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)|0_\alpha]|,\quad |\gamma_{\alpha-1}(\mathbf{x}|0_\alpha)|,\quad |\gamma_{\alpha-1}[g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)|0_\alpha]|,\quad \ldots$$

appartiennent à l'intervalle considéré d'ampleur $2\frac{\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent concernant les fractions (30), $|\gamma_{\alpha-1}[g_{ln_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)|0_\alpha]|$ est de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha}\xi[g_{ln_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)|0_\alpha]$; d'autre part, si l'intervalle $(g_{ln_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha), g_{(l+1)n_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha))$ appartient à l'intervalle considéré d'ampleur $2\frac{\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$, on a

$$\frac{1}{n_\alpha}\xi[g_{ln_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0)|0_\alpha] < \frac{2}{n}\xi(\mathbf{x}|0_\alpha);$$

par conséquent le nombre des intervalles (31), qui appartiennent à l'intervalle considéré, est de l'ordre de $\frac{n_\alpha}{N_\alpha^{1,0}}$.

Pour une valeur l de l'indice, qui correspond à l'un de ces intervalles, on aura

$$g_{ln_\alpha-1}^{1,0}(\mathbf{x}, 0_\alpha) = \frac{\xi[g_{ln_\alpha-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha)|0_\alpha]}{\xi(\mathbf{x}|0_\alpha)} < 2.$$

On a, d'autre part,

$$\xi(\mathbf{x}|0_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(\mathbf{x}, 0_\alpha), 0_\alpha]}{g_s^{1,0}(\mathbf{x}, 0_\alpha)};$$

dans la somme, d'après ce qu'on a dit, on aura un nombre de termes, de l'ordre de $\frac{n_\alpha}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins, qui sont plus grands que $\frac{M^{0,1}}{2}$; alors $\xi(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins.

16. Nous allons maintenant évaluer, dans ce paragraphe, l'ordre de grandeur des valeurs de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$. Rappelons que l'on a

$$(14') \qquad \xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha) = \left(\frac{1}{d_x} + A_\alpha\right)\xi(x\,|\,\theta_\alpha) + \xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha);$$

rappelons aussi (§ 6) que $\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$ peut être définie d'une façon arbitraire en chaque point x d'un intervalle $(\mathbf{x},\ g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$ et qu'elle est alors donnée, au le point d'abscisse $g_r(x,\theta_\alpha)$, par l'équation

$$(11) \quad \xi^{0,1***}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] = \frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha) + \left\{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\sum_1^r{}_j \frac{g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} - \sum_1^r{}_j \xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_\alpha-r+j}[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\right\}.$$

Évaluons d'abord l'ordre de grandeur de $\xi^{0,1***}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$. Au deuxième membre de (11), dans la première des deux expressions entre accolades, nous avons $\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$, qui multiplie la somme de $r(r<n_\alpha)$ termes qui restent bornés $\left(\text{qui ne dépassent } \frac{M^{1,1}}{M^{1,0}}\right)$; la valeur de cette expression est donc au plus de l'ordre de $n_\alpha\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$. D'autre part, la deuxième des deux expressions entre accolades est plus petite que

$$M^{1,1}N_\alpha^{1,0}\sum_1^r{}_j \frac{1}{g^{1,0}_{n_\alpha-r+j}[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]} \equiv M^{1,1}N_\alpha^{1,0}\sum_{n_\alpha-r+1}^{n_\alpha}{}_j \frac{1}{g^{1,0}_j[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]};$$

l'équation (7), lorsqu'on y introduit $g_r(x,\theta_\alpha)$ à la place de x nous montre que la sommation par rapport à j est au plus de l'ordre de $n_\alpha\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$; l'expression considérée est donc au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$. La même conclusion est alors évidemment valable pour la somme des deux expressions entre accolades dans (11).

Considérons ensuite le terme $\frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$; on pourra affirmer que ce terme est lui-même au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ si l'on a montré que, en tout point x de l'intervalle $(\mathbf{x},\ g_{\alpha-1}(\mathbf{x},\theta_\alpha))$, la fonction $\xi^{0,1***}(x,\theta_\alpha)$ est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ au plus. Pour cela rap-

pelons (§ 6) que, dans ce même intervalle, la fonction est seulement assujettie aux conditions d'être continue et de prendre au point $g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$ la valeur $\xi^{0,1***}[g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$ donnée par (11) lorsqu'on pose $x = \mathbf{x}$ et $r = n_{\alpha-1}$. Attribuons, par exemple, la valeur zéro à la fonction au point $\mathbf{x}$; la valeur au point $g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$ est alors donnée par la somme des deux expressions entre accolades dans (11) lorsqu'on fait $x = \mathbf{x}$ et $r = n_{\alpha-1}$; cette somme, d'après ce que nous avons vu, est de l'ordre $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi[g_{n_\alpha-1}(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$ au plus. La condition précédente, concernant l'ordre de grandeur de $\xi^{0,1***}(x|\theta_\alpha)$ dans $(\mathbf{x}, g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ sera donc certainement satisfaite si nous supposons attribueés à la fonction, dans ce même intervalle, des valeurs comprises entre celles qu'elle prend aux extrêmes.

En conclusion on peut donc supposer que le terme $\frac{\xi[g_r(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{(x|\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x|\theta_\alpha)$ est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi[g_r(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$. *$x$ étant maintenant un point quelconque de* C, on pourra affirmer, d'après ce qu'on vient de voir, que la valeur $\xi^{0,1***}(x|\theta_\alpha)$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi(x|\theta_\alpha)$. Il nous reste à considérer, dans (14), le terme $\left(\frac{1}{d_\alpha} + A_\alpha\right)\xi(x|\theta_\alpha)$. Rappelons (§ 6) que A_α est donné par

$$\frac{g^{0,1**}(\mathbf{x}|\theta_\alpha) - \int_0^1 \xi^{0,1***}[g(\mathbf{x}, \tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]\frac{\xi[g(\mathbf{x}, 1|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[g(\mathbf{x}, \tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}\,d\tau}{\xi[g(\mathbf{x}, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]}.$$

La fonction sous le signe somme, d'après ce qu'on a vu dans ce même paragraphe, est au plus de l'ordre de

$$n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi[g(\mathbf{x}, 1|\theta_\alpha)|\theta_\alpha] \equiv n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi[g(\mathbf{x}, \theta_\alpha)|\theta_\alpha],$$

il en est alors de même pour l'intégrale; $g^{0,1**}(\mathbf{x}|\theta_\alpha)$ est d'autre part, d'après (8), de l'ordre de $\xi[g(\mathbf{x}, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$ au plus; la constante A_α est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}$ au plus et le terme $\left(\frac{1}{d_\alpha} + A_\alpha\right)\xi(x|\theta_\alpha)$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi(x|\theta_\alpha)$.

Nous pouvons enfin conclure que la fonction $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi(x|\theta_\alpha)$; *on pourra donc donner, pour le rapport* $\left|\frac{\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_\alpha)}\right|$, *une borne* $N_\alpha^{0,1}$ *de l'ordre de* $n_\alpha N_\alpha^{1,0}$ *et l'on aura alors*

$$|\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)| < N_\alpha^{1,0}\,\xi(x|\theta_\alpha).$$

17. Il nous reste à évaluer la constante de Lipschitz de la fonction $\xi^{1,0}(x|\theta_\alpha)$. Utilisons encore l'expression (13′) de cette fonction. Considérons d'abord le premier terme du troisième membre de (13′)

$$\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s\frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}.$$

A la fonction

$$\frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n_\alpha - 1),$$

de la variable x, nous voulons faire correspondre une nouvelle fonction, qui, en chaque point x, est au moins égale au plus grand, en valeur absolue, parmi les nombres dérivés de la fonction donnée. Pour cela nous pouvons d'abord faire correspondre, dans ce même sens, au numérateur $g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$ la fonction

$$M^{2,1} g^{1,0}_{s-1}(x, \theta_\alpha) = M^{2,1} \frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{\xi(x | \theta_\alpha)},$$

et au dénominateur (qui est d'ailleurs dérivable) la fonction

$$M^{2,0} g^{1,0}_{s-1}(x, \theta_\alpha) = M^{2,0} \frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{\xi(x | \theta_\alpha)}.$$

A la fraction considérée nous pourrons faire correspondre la fonction

$$\left(\frac{M^{2,1}}{M^{1,0}} + \frac{M^{2,0} M^{1,1}}{[M^{1,0}]^2}\right) \frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{\xi(x | \theta_\alpha)}.$$

Enfin, au premier terme de l'expression (13'), nous pourrons faire correspondre la fonction

$$\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\left(\frac{M^{2,1}}{M^{1,0}} + \frac{M^{2,0} M^{1,1}}{[M^{1,0}]^2}\right) \frac{1}{\xi(x | \theta_\alpha)} \sum_0^{n_\alpha - 1}{}_s \xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha];$$

la somme par rapport à s est de l'ordre de n_α (§ 10), la fonction est alors de l'ordre de $\frac{1}{\xi(x | \theta_\alpha)}$. Considérons ensuite le deuxième terme du troisième membre de (13'),

$$(33) \quad \frac{1}{\xi(x | \theta_\alpha)} \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_1^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_s(x, \theta_\alpha)} \left\{ \sum_0^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \xi[g_l(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha] \right\}.$$

Remarquons d'abord, en rappelant (7), que l'expression

$$\frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_1^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_s(x, \theta_\alpha)}$$

est de l'ordre de $\xi(x | \theta_\alpha)$ et sa dérivée de l'ordre de $\xi^{1,0}(x/\theta_\alpha)$, par conséquent, au plus de l'ordre de $N^{1,0}_\alpha$. Alors l'expression

$$\frac{1}{\xi(x | \theta_\alpha)} \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_1^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_s(x, \theta_\alpha)}$$

reste finie (elle est d'ailleurs très proche de 1) et l'on peut lui faire corres-

pondre, dans le sens précédemment indiqué, une fonction de l'ordre de

$$\frac{N_\alpha^{1,0}}{[\xi(x\,|\,\theta_\alpha)]^2}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+\frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}N_\alpha^{1,0},$$

c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Nous devons déterminer ensuite une borne pour l'expression entre accolades dans (33), et une fonction qui corresponde, dans le sens indiqué précédemment, à la même expression, qui soient toutes les deux indépendantes de l'indice s.

Par un raisonnement semblable à celui fait au commencement du paragraphe on reconnaît qu'aux fractions $\frac{g^{2,0}[g_l(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$ on peut faire correspondre les fonctions

$$\left(\frac{M^{3,0}}{M^{1,0}}+\frac{[M^{2,0}]^2}{[M^{1,0}]^2}\right)\frac{\xi[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)},$$

qui sont, respectivement, de l'ordre de $\frac{\xi[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$; à $\xi[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ on peut faire correspondre sa dérivée par rapport à x, qui ne dépasse pas $N_\alpha^{1,0}\frac{\xi[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Les fractions $\frac{g^{2,0}[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$ restent bornées; d'autre part, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 15, $\xi[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ est de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$ au plus. On reconnaît alors qu'au terme d'indice l de la sommation dans le troisième facteur entre accolades on peut faire correspondre une fraction de l'ordre de $\frac{\xi[g_l(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}N_\alpha^{1,0}$; en faisant ensuite la somme par rapport à l nous trouvons une fonction qui, d'après le lemme du paragraphe 10, est de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}n_\alpha}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. De ce qu'on a vu on peut facilement conclure qu'on peut faire correspondre à l'expression (33), toujours dans le même sens, une fonction de l'ordre de $\frac{n_\alpha N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Finalement à la fonction $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$ on pourra également faire correspondre une fonction de l'ordre de $\frac{n_\alpha N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Le minimum de $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ est (§ 15) de l'ordre de $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins; *on peut* alors *supposer la constante de Lipschitz* $N_\alpha^{2,0}$ *de* $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$ *de l'ordre de* $n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2$.

Nous éviterons de considérer la constante de Lipschitz de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$.

18. Pour terminer ce chapitre, nous devons évaluer l'ordre de grandeur des erreurs qu'on commet lorsqu'on remplace les fonctions

$$\bar g(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\quad \bar g^{1,0}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\quad \bar g^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$$

par les fonctions

$$g(x,\theta),\quad g^{1,0}(x,\theta),\quad g^{0,1}(x,\theta)$$

respectivement. Dans cette recherche nous allons toujours supposer que les

quantités $(\theta-\theta_\alpha)N_\alpha^{1,0}$, $(\theta-\theta_\alpha)^2N_\alpha^{2,0}$ soient petites et nous admettrons que leurs carrés soient négligeables par rapport aux quantités elles-mêmes, ce qui équivaut à supposer qu'on reste dans un voisinage assez restreint de θ_α. Nous allons également supposer le voisinage de θ_α suffisamment restreint, pour que l'expression

$$|\bar g(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-\bar g(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha)|\equiv|\bar g(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g(x,\theta_\alpha)|$$

ne dépasse jamais sensiblement $M^{0,1}|\theta-\theta_\alpha|$; nous pourrons alors supposer, dans une première approximation, qu'on ait

$$(34)\qquad g(x,\theta_\alpha)-|\theta-\theta_\alpha|M^{0,1}<\bar g(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)<g(x,\theta_\alpha)+|\theta-\theta_\alpha|M^{0,1};$$

on verra d'ailleurs que cette nouvelle condition est comprise dans la précédente (1).

Nous supposons enfin qu'on ait

$$\frac{N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}<N_\alpha^{0,1};$$

$\xi(x|\theta_\alpha)$ étant de l'ordre $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins (§ 15) et $N_\alpha^{0,1}$ de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{0,1}$, l'hypothèse sera certainement vérifiée pourvu qu'on choisisse α suffisamment grand.

Considérons les ∞^1 groupes g_1 engendrés par les transformations infinitésimales

$$\bar\xi(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{df}{dx}-\frac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{1-\dfrac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\frac{df}{dx}$$

et indiquons par

$$x_1=\bar g(x,t,\theta\,|\,\theta_\alpha)$$

l'équation de la famille ∞^2 composée des transformations appartenant à ces groupes. On aura

$$\bar g(x,1,\theta\,|\,\theta_\alpha)=\bar g(x,\theta\,|\,\theta_\alpha).$$

Comparons d'abord $\bar g^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$ et $g^{0,1}(x,\theta_\alpha)$. On a

$$(6')\qquad g^{0,1}(x,\theta_\alpha)=\int_0^1\xi^{0,1}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi|\,g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\,g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}d\tau$$

$$=\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\xi^{0,1}(z\,|\,\theta_\alpha)\frac{\xi[\,g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{[\xi(z\,|\,\theta_\alpha)]^2}dz;$$

(1) La signification exacte des hypothèses précédentes est la suivante : nous devrons considérer des voisinages des valeurs θ_α, $\theta_{\alpha+1}$, .,. tels que, pour $\alpha\to\infty$, les quantités $(\theta-\theta_\alpha)N_\alpha^{0,1}$ et $(\theta-\theta_\alpha)^2N_\alpha^{2,0}$ soient infiniment petites et que l'erreur éventuelle, qu'on commet en supposant (34) vérifiée, soit infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $|\bar g(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g(x,\theta_\alpha)|$.

on a ensuite

$$(35)\quad \bar{g}^{0,1}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha) = \int_x^{\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)} \bar{\xi}^{0,1}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,\frac{\bar{\xi}\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha),\,0\,|\,\theta_\alpha\big]}{\big[\bar{\xi}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\big]^2}\,dx$$

$$= \frac{\bar{\xi}\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha),\,0\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]} \int_x^{g(x,\,\theta_\alpha)} \bar{\xi}^{0,1}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,\frac{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\big[\bar{\xi}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\big]^2}\,dx$$

$$+ \int_{g(x,\,0)}^{\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)} \bar{\xi}^{0,1}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,\frac{\bar{\xi}\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha),\,0\,|\,\theta_\alpha\big]}{\big[\bar{\xi}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\big]^2}\,dx.$$

On a

$$\frac{\bar{\xi}\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha),\,0\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]} = \frac{\xi\big[g(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]} \left\{ 1 + \frac{\xi^{0,1}\big[g(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}\,(0-\theta_\alpha) + \dots \right\}.$$

La valeur de l'expression entre accolades reste comprise entre le couple de valeurs correspondant aux deux choix du signe, supérieur ou inférieur,

$$1 \mp \mathrm{N}_\alpha^{0,1}(0-\theta_\alpha);$$

on trouve d'autre part, en vertu de (34), que la valeur de

$$\frac{\xi\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]} = 1 + \frac{\xi\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big] - \xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}$$

reste comprise entre chacun des deux couples

$$1 \mp \mathrm{M}^{0,1}\,\frac{\mathrm{N}_\alpha^{1,0}}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}\,(0-\theta_\alpha), \qquad 1 \mp \mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}(0-\theta_\alpha);$$

alors la valeur de $\dfrac{\bar{\xi}\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha),\,0\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}$ reste comprise entre le couple

$$1 \mp (1 + \mathrm{M}^{0,1})\mathrm{N}_\alpha^{0,1}(0-\theta_\alpha).$$

On a ensuite, pour la première des deux intégrales du troisième membre de (35), en rappelant (6′),

$$\int_x^{g(x,\,\theta_\alpha)} \bar{\xi}^{0,1}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\,\frac{\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\big[\bar{\xi}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)\big]^2}\,dx$$

$$= \int_x^{g(x,\,\theta_\alpha)} \frac{\dfrac{\partial}{\partial 0}\left[\dfrac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}(0-\theta_\alpha)}\right]_{\theta=\theta_\alpha} \xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\left[\dfrac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}(0-\theta_\alpha)}\right]^2} dx$$

$$= \int_x^{g(x,\,\theta_\alpha)} \frac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{[\xi(x\,|\,\theta_\alpha)]^2}\,\xi\big[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]\,dx = g^{0,1}(x,\,\theta_\alpha).$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$\int_{g(x,\,\theta_\alpha)}^{\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)} \frac{\bar{\xi}^{0,1}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)}\,\frac{\bar{\xi}\big[\bar{g}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha),\,0\,|\,\theta_\alpha\big]}{\bar{\xi}(x,\,0\,|\,\theta_\alpha)}\,dx.$$

En ce qui concerne l'ampleur de l'intervalle d'intégration, on a

$$|\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) - g(x, \theta_\alpha)| < |\theta - \theta_\alpha| M^{0,1}.$$

La fraction

$$\frac{\bar{\xi}^{0,1}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)} = \frac{\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)\dfrac{[\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)]^2}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} + \dots}{\xi(x \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + \dots}$$

ne dépasse pas $N_\alpha^{0,1}$. Enfin la fraction $\dfrac{\bar{\xi}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha), \theta \mid \theta_\alpha]}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}$, du fait que x est dans l'intervalle $(g(x, \theta_\alpha), \bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha))$, reste comprise entre le couple de valeurs

$$1 \mp (\theta - \theta_\alpha)(2 + M^{0,1}) N_\alpha^{0,1}.$$

On voit ainsi que l'intégrale considérée est plus petite que $|\theta - \theta_\alpha| M^{0,1} N_\alpha^{0,1}$. D'après les résultats établis jusqu'ici, on déduit de (35) que $\bar{g}^{0,1}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ reste comprise entre le couple de valeurs

$$g^{0,1}(x, \theta_\alpha) \mp (\theta - \theta_\alpha)(2 + M^{0,1}) M^{0,1} N_\alpha^{0,1}. \tag{36}$$

Du fait que $g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$ est compris entre le couple

$$g^{0,1}(x, \theta_\alpha) \mp M^{0,2}(\theta - \theta_\alpha)$$

on déduit alors

$$|\bar{g}^{0,1}(x, \theta \mid \theta_\alpha) - g^{0,1}(x, \theta)| < |\theta - \theta_\alpha| \{(2 + M^{0,1}) M^{0,1} N_\alpha^{0,1} + M^{0,2}\}; \tag{37}$$

le deuxième membre de cette inégalité est de l'ordre de $(\theta - \theta_\alpha) N_\alpha^{0,1}$.

Il est facile maintenant de comparer les deux fonctions $\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ et $g(x, \theta_\alpha)$. D'après le théorème de la moyenne on a en effet

$$\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) = \bar{g}(x, \theta_\alpha \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)\bar{g}^{0,1}(x, \theta' \mid \theta_\alpha) \equiv g(x, \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)\bar{g}^{0,1}(x, \theta' \mid \theta_\alpha),$$

θ' étant une valeur comprise entre θ_α et θ. En substituant dans cette formule, pour $\bar{g}^{0,1}(x, \theta' \mid \theta_\alpha)$, l'une et l'autre des deux expressions approchées (36) on trouve que $\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ reste compris entre le couple

$$g(x, \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha) g^{0,1}(x, \theta_\alpha) \mp (\theta - \theta_\alpha)^2 (2 + M^{0,1}) M^{0,1} N_\alpha^{0,1}. \tag{38}$$

La fonction $g(x, \theta)$ reste comprise d'autre part entre le couple

$$g(x, \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha) g^{0,1}(x, \theta_\alpha) \mp (\theta - \theta_\alpha)^2 \frac{M^{0,2}}{2};$$

on a donc alors

$$|\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) - g(x, \theta)| < (\theta - \theta_\alpha)^2 \left\{(2 + M^{0,1}) M^{0,1} N_\alpha^{0,1} + \frac{M^{0,2}}{2}\right\}. \tag{39}$$

Cette relation nous montre que la distance entre un point de C *et son transformé par* $\bar{T}(\theta \mid \theta_\alpha) T^{-1}(\theta)$ *est de l'ordre de* $(\theta - \theta_\alpha)^2 N_\alpha^{0,1}$ *au plus.*

19. Nous allons établir, dans ce paragraphe, des formules analogues pour la fonction $\bar{g}^{0,1}(x, 0 \mid \theta_\alpha)$.

Remarquons, d'une façon préliminaire, que, en dérivant par rapport à x, l'équation

$$(6') \qquad g^{0,1}(x, \theta_\alpha) = \int_0^1 \xi^{0,1}[g(x, \tau \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \frac{\xi[g(x, 1 \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, \tau \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} d\tau,$$

on obtient, par un calcul virtuellement déjà exécuté au paragraphe 6,

$$(40) \quad g^{1,1}(x, \theta_\alpha) = \frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \left\{ \xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] - \frac{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + \xi^{1,0}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] g^{0,1}(x, \theta_\alpha) \right\}.$$

Partons maintenant de l'équation

$$(24^\alpha) \quad \bar{g}^{1,0}(x, \theta \mid \theta_\alpha) = \frac{\bar{\xi}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha), \theta \mid \theta_\alpha]}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}$$

$$= \frac{\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + \dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} (\theta - \theta_\alpha)} (\theta - \theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{r} [\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + (\theta - \theta_\alpha) \xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \\ + (\theta - \theta_\alpha)^2 \frac{\{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\}^2}{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} + \dots \end{array} \right\}}{\xi(x \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha) \xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)^2 \frac{\{\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)\}^2}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} + \dots}$$

$$+ (\theta - \theta_\alpha) \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} (\theta - \theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} (\theta - \theta_\alpha)}}{\xi(x, \theta \mid \theta_\alpha)}.$$

En rappelant que $\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ reste comprise entre le couple de valeurs (38) et en considérant aussi (34), on trouve facilement que $\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ reste comprise entre le couple

$$\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + (\theta - \theta_\alpha) \xi^{1,0}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$$
$$\mp (\theta - \theta_\alpha)^2 M^{0,1} \left[\frac{1}{2} M^{0,1} N_\alpha^{2,0} + (3 + M^{0,1}) N_\alpha^{0,1} N_\alpha^{1,0} \right].$$

Après avoir substitué à $\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ le couple de valeurs approchées que nous venons de déterminer, développons la première fraction du dernier membre de (24^α) selon les puissances de $(\theta - \theta_\alpha)$, en nous arrêtant au terme de deuxième degré. En tenant compte de (40), on trouve que le coefficient de $(\theta - \theta_\alpha)$ est donné par $g^{1,1}(x, \theta_\alpha)$. On peut simplifier le coefficient

de $(\theta-\theta_\alpha)^2$ en considérant (14) et (10) d'un côté et (40) de l'autre côté. En conclusion on arrive au résultat que la fonction $\overline{g}^{1,0}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$ reste comprise entre le couple

$$g^{1,0}(x,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\,g^{1,1}(x,\theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)^2 \times \frac{M^{0,1}\left[\frac{1}{2}M^{0,1}N_\alpha^{2,0}+(2+M^{0,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\right]+2(M^{1,1}+1)N_\alpha^{1,0}N_\alpha^{0,1}+2(M^{0,1}+M^{1,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$$

$$+(\theta-\theta_\alpha)\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\overline{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\overline{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\overline{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}}{\overline{\xi}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}.$$

$g^{1,0}(x,\theta)$ est d'autre part comprise entre le couple

$$g^{1,0}(x,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\,g^{1,1}(x,\theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)^2\frac{M^{1,2}}{2},$$

on en déduit

$$(41)\quad |\overline{g}^{1,0}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g^{1,0}(x,\theta)|$$

$$<(\theta-\theta_\alpha)^2\left\{\frac{M^{1,2}}{2}+\frac{\left\{\begin{array}{l}M^{0,1}\left[\frac{1}{2}M^{0,1}N_\alpha^{2,0}+(2+M^{0,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\right]\\ +2(M^{1,1}+1)N_\alpha^{1,0}N_\alpha^{0,1}+2(M^{0,1}+M^{1,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\end{array}\right\}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\right\}$$

$$+(\theta-\theta_\alpha)\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\overline{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\overline{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\overline{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}}{\overline{\xi}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)};$$

l'expression entre accolades est de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}N_\alpha^{0,1}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$ au plus.

CHAPITRE III.

20. Considérons la succession des fonctions

$$(15)\qquad \xi(x\,|\,\theta_1),\quad \xi(x\,|\,\theta_2),\quad \ldots,\quad \xi(x\,|\,\theta_\alpha),\quad \ldots;$$

nous voulons montrer dans ce chapitre qu'on a

$$\lim_{\alpha=\infty}\frac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}=1,$$

et que la succession (15) *converge vers une fonction continue et positive.*

Nous allons considérer, dans ce paragraphe, quelques questions préliminaires.

Évaluons d'abord l'ordre de grandeur de $(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$. Supposons, $\theta_{\alpha+1} > \theta_\alpha$; considérons l'identité

$$(42) \qquad T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\, T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha) = \prod_{0}^{n_\alpha - 1}{}_s\, T^s(\theta_\alpha)\,[T(\theta_{\alpha+1})\, T^{-1}(\theta_\alpha)]\, T^{-s}(\theta_\alpha).$$

Le module de $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\, T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)$ est égal à la différence

$$n_\alpha \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} - n_\alpha \frac{m_\alpha}{n_\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha+1}}$$

entre le module de $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et celui de $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ (1). Les transformations indiquées symboliquement par les facteurs du second membre de (42) ont toutes d'autre part un module égal à celui de $T(\theta_{\alpha+1})\, T^{-1}(\theta_\alpha)$. Cette transformation imprime à tout point un déplacement vers la droite, qui est au moins égal à $(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)\underline{M}^{0,1}$; le module de cette transformation est donc égal au moins à $(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)\underline{M}^{0,1}$. Alors, d'après le lemme du paragraphe 7 du premier Mémoire, le module du produit est de l'ordre de $\underline{M}^{0,1} n_\alpha (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$ au moins, on a donc que $\frac{1}{n_{\alpha+1}}$ est de l'ordre de $\underline{M}^{0,1} n_\alpha (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$ au moins, alors $(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$ *est de l'ordre de* $\frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$ *au plus.*

Comme nous l'avons déjà fait au paragraphe 7, nous indiquons par $\bar{\theta}_{\alpha+1}$ le paramètre de la transformation de module $\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$ appartenant à la famille $\overline{T}(\theta \mid \theta_\alpha)$. Nous voulons évaluer l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_{\alpha+1}}{\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha}$. Considérons pour cela les deux transformations très petites

$$(\star) \qquad T(\theta_{\alpha+1})\, T^{-1}(\bar{\theta}_{\alpha+1}), \qquad \overline{T}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)\, T^{-1}(\bar{\theta}_{\alpha+1}).$$

La première de ces deux transformations transforme le point

$$g(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}) = g(x, \theta_{\alpha+1}) + g^{0,1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1})(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_{\alpha+1}) + \dots$$

dans le point $g(x, \theta_{\alpha+1})$, à des quantités infiniment petites d'ordre supérieur près, elle est donc représentée par la fonction

$$g^{0,1}[g_{-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}), \bar{\theta}_{\alpha+1}](\theta_{\alpha+1} - \bar{\theta}_{\alpha+1}).$$

La deuxième transformation d'autre part, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe 18, est caractérisée par une fonction dont les valeurs sont au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$. On a, évidemment,

$$T^{n_{\alpha+1}}(\theta_{\alpha+1}) = \overline{T}^{n_{\alpha+1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha).$$

(1) Du fait que $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ est évidemment permutable avec tout autre transformation.

Alors, des identités

$$\prod_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} T^{s}(\bar{\theta}_{\alpha+1})\left[T(\theta_{\alpha+1})\,T^{-1}(\bar{\theta}_{\alpha+1})\right]T^{-s}(\bar{\theta}_{\alpha+1}) = T^{n_{\alpha+1}}(\theta_{\alpha+1})\,T^{-n_{\alpha+1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1}),$$

$$\prod_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} T^{s}(\bar{\theta}_{\alpha+1})\left[\bar{T}(\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-1}(\bar{\theta}_{\alpha+1})\right]T^{s}\,(\bar{\theta}_{\alpha+1}) = \bar{T}^{n_{\alpha+1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-n_{\alpha+1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1}),$$

on déduit qu'on peut égaler entre elles les fonctions, qui représentent les premiers membres. Ces premiers membres sont donnés d'autre part respectivement par les produits des transformations

$$(\star) \qquad T(\theta_{\alpha+1})\,T^{-1}(\bar{\theta}_{\alpha+1}), \quad \bar{T}(\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-1}(\bar{\theta}_{\alpha+1}),$$

transformées par les puissances de $T(\theta_{\alpha+1})$. En utilisant les formules données au paragraphe 7 du premier Mémoire on trouve alors, pour la première des deux fonctions, l'expression

$$(\theta_{\alpha+1}-\bar{\theta}_{\alpha+1})\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} g^{0,1}\left[g_{-s-1}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}),\bar{\theta}_{\alpha+1}\right]g_{s}^{1,0}\left[g_{-s}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}),\bar{\theta}_{\alpha+1}\right]$$

$$>(\theta_{\alpha+1}-\bar{\theta}_{\alpha+1})\,\underline{M}^{0,1}\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} g_{s}^{1,0}\left[g_{-s}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}),\bar{\theta}_{\alpha+1}\right],$$

et l'on reconnaît d'autre part que la deuxième fonction est au plus de l'ordre de

$$n_{\alpha}N_{\alpha}^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})^{2}\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} g_{s}^{1,0}\left[g_{-s}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}),\bar{\theta}_{\alpha+1}\right].$$

On peut conclure de là que $(\theta_{\alpha+1}-\bar{\theta}_{\alpha+1})$ est au plus de l'ordre de $n_{\alpha}N_{\alpha}^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})^{2}$. On a d'autre part que $(\theta_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})$ est, de même que $(\theta_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})$, de l'ordre de $\frac{1}{n_{\alpha}n_{\alpha+1}}$, alors *le rapport* $\frac{\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha+1}}{\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha}}$ *est de l'ordre de* $\frac{N_{\alpha}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ *au plus*. Le rapport $\frac{\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha}}{\theta_{\alpha+1}-\theta_{\alpha}}$ est donc égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\frac{N_{\alpha}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ au plus.

Évaluons enfin l'ordre de grandeur du déplacement

$$(43) \qquad |\bar{g}_{l}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})-g_{l}(x,\theta_{\alpha+1})| \qquad (l<n_{\alpha+1}),$$

que $\bar{T}^{l}(\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ induit sur le point $g_{l}(x,\theta_{\alpha+1})$. D'une façon préliminaire évaluons le déplacement

$$|\bar{g}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})-g(x,\theta_{\alpha+1})|$$
$$\leq|\bar{g}(x,\bar{\theta}_{\alpha-1}\,|\,\theta_{\alpha})-g(x,\bar{\theta}_{\alpha+1})|+|g(x,\bar{\theta}_{\alpha+1})-g(x,\theta_{\alpha+1})|,$$

que $\bar{T}(\bar{\theta}_{\alpha-1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-1}(\theta_{\alpha+1})$ induit sur le point $g(x,\theta_{\alpha-1})$. D'après le résultat du

paragraphe 18, que nous avons utilisé tout à l'heure, $|\bar{g}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha) - g(x, \bar{\theta}_{\alpha+1})|$ est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$. D'autre part $|g(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}) - g(x, \theta_{\alpha+1})|$ est de l'ordre de $(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_{\alpha+1})M^{0,1}$ au plus, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$ au plus. Nous pouvons en conclure que le premier membre de la dernière inégalité est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$ au plus.

On a ensuite

$$\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1}) = \prod_0^{l-1}{}_r T^r(\theta_{\alpha+1})[\bar{T}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-1}(\theta_{\alpha+1})]T^{-r}(\theta_{\alpha+1});$$

de l'évaluation précédente, en rappelant encore une fois les résultats du paragraphe 7 du premier Mémoire, on déduit alors que le déplacement induit par $\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ sur le point x est au plus de l'ordre de

$$n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{l-1}{}_r g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]$$

$$= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{l-1}{}_r \frac{1}{g_{-r}^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} < n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_{\alpha+1}-1}{}_r \frac{1}{g_{-r}^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}$$

$$= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_{\alpha+1}-1}{}_r \frac{1}{g_r^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}$$

$$< n_\alpha n_{\alpha+1} N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{1}{d_{\alpha+1}\underline{M}^{0,1}} \frac{d_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} \sum_0^{n_{\alpha+1}-1}{}_r \frac{g^{0,1}|g_{r-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}|}{g_r^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}$$

$$= n_\alpha n_{\alpha+1} N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta)^2 \frac{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}{d_{\alpha+1}\underline{M}^{0,1}}.$$

On tire de là que *le déplacement* $|\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha) - g_l(x, \theta_{\alpha+1})|$, *que la transformation* $\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ *induit sur le point* $g_l(x, \theta_{\alpha+1})$, *est de l'ordre de* $n_\alpha n_{\alpha+1} N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1})|\theta_{\alpha+1}]$, *ou encore* [d'après l'évaluation précédente de $(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$] *de l'ordre de* $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}} \xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1})|\theta_{\alpha+1}]$ *au plus.*

21. *Nous allons ramener l'étude du rapport*

(44) $$\frac{\xi(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}$$

à celui des deux rapports

(44′) $$\frac{\xi(x|\theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)},$$

(44″) $$\frac{\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}.$$

On a

$$\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha) = \xi(x|\theta_\alpha) + (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha) + \dots,$$

en remarquant que $(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$ au plus et que $\left|\frac{\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}\right|$ est plus petit que $N_\alpha^{0,1}$, par conséquent de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}$ au plus, on trouve que le rapport (44′) est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ au plus.

Nous devons maintenant considérer le rapport (44″); nous utiliserons pour cela, pour $\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})$ et $\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, les expressions

$$(7') \qquad \xi(x \mid \theta_{\alpha+1}) \equiv \frac{d_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} \sum_0^{n_{\alpha+1}-1} {}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g_s^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}$$

et

$$(7'') \qquad \bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \equiv \frac{\bar{d}_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} \sum_0^{n_{\alpha+1}-1} {}_s \frac{\bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha]}{\bar{g}_s^{1,0}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)}.$$

Les constantes $d_{\alpha+1}$ et $\bar{d}_{\alpha+1}$ sont déterminées, respectivement, par les conditions

$$\int_x^{g(x, \theta_{\alpha+1})} \frac{dx}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})} = 1, \qquad \int_x^{\bar{g}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)} \frac{dx}{\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)} = 1;$$

les deux limites supérieures d'intégration $g(x, \theta_{\alpha+1})$ et $\bar{g}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$ coïncident, d'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, à une quantité près, qui est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$, c'est-à-dire de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}^2}$; *il suffira* donc *d'avoir démontré que le rapport entre les deux sommes*

$$(45') \qquad \sum_0^{n_{\alpha+1}-1} {}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g_s^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}$$

et

$$(45'') \qquad \sum_0^{N_{\alpha+1}-1} {}_s \frac{\bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha]}{\bar{g}_s^{1,0}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)}$$

est infiniment proche de 1 *pour* $\alpha \to \infty$, il s'ensuivra immédiatement la même chose pour le rapport $\frac{d_\alpha}{d_{\alpha+1}}$ et enfin pour le rapport (44″).

Remarquons maintenant que les termes des deux sommes (45′) et (45″) sont tous positifs, il suffira alors de démontrer que le rapport entre deux termes correspondant est infiniment proche de 1 pour $\alpha \to \infty$, ou encore de démontrer que cela arrive pour les rapports

$$\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{\bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha]} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n_{\alpha+1} - 1),$$

entre les numérateurs et pour les rapports

$$\frac{g_s^{1,0}(x,\,\theta_{\alpha+1})}{\bar{g}_s^{1,0}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} \qquad (s=0,\,1,\,\ldots,\,n_{\alpha+1}-1), \tag{46}$$

entre les dénominateurs des termes correspondant. En ce qui concerne les numérateurs, étant donné qu'on a

$$g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] > \underline{M}^{0,1},$$

$\underline{M}^{0,1}$ étant un nombre positif fixé à l'avance, il suffira de démontrer que, pour $\alpha \to \infty$, les quantités

$$\left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - \bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha] \right| \tag{47}$$
$$(s=0,\,1,\,\ldots,\,n_{\alpha+1}-1)$$

sont infiniment petites.

Étudions d'abord ces dernières expressions. On a

$$\begin{aligned} &\left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - \bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha] \right| \\ &\leq \left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] \right| \\ &\quad + \left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] - g^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] \right| \\ &\quad + \left| g^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] - \bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha] \right|. \end{aligned} \tag{48}$$

Le premier terme du second membre de l'inégalité précédente est au plus égal à $M^{0,2}\left|\theta_{\alpha+1}-\bar{\theta}_{\alpha+1}\right|$. En rappelant le dernier résultat du paragraphe précédent on reconnaît ensuite que le deuxième terme est au plus de l'ordre de

$$M^{1,1}\,\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}\,\frac{\xi[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}]}{n_{\alpha+1}}.$$

Enfin le troisième terme est, d'après (37), au plus de l'ordre de $\left|\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_\alpha\right| N_\alpha^{0,1}$, c'est-à-dire au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$. Nous pouvons conclure finalement que le premier membre de (48) est au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$.

22. Considérons ensuite le rapport (46) entre deux dénominateurs correspondant à une même valeur de l'index : nous serons amenés à des considérations un peu plus compliquées que celles du paragraphe précédent. On a

$$\begin{aligned} \frac{g_s^{1,0}(x,\,\theta_{\alpha+1})}{\bar{g}_s^{1,0}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} &= \prod_0^{s-1}{}_l \frac{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}]}{\bar{g}^{1,0}[g_l(x,\,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \\ &= \prod_0^{s-1}{}_l \left[1 + \frac{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - \bar{g}^{1,0}[\bar{g}_l(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\bar{g}^{1,0}[\bar{g}_l(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \right]; \end{aligned} \tag{49}$$

en rappelant (24^{α}) on trouve, pour les numérateurs des fractions du deuxième membre,

$$
\begin{aligned}
&= g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\big] - \bar g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big],\\
&= \big\{g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\big] - g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}\big]\big\}\\
&\quad + \big\{g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}\big] - g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\big]\big\}\\
&\quad + \left\{ \frac{\left\{\begin{array}{l} g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\big]\\ \quad \left\{\begin{array}{l} \xi\big[\bar g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]\\ \quad -(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big] + (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\,\dfrac{\{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]\}^2}{\xi\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]} + \dots \end{array}\right. \end{array}}{\xi\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]} \right\}\\
&\quad - (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\xi^{0,1}\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]}.
\end{aligned}
$$

Pour démontrer que, pour $\alpha \to \infty$, le produit (49) est infiniment proche de 1, il suffira alors d'avoir démontré que les trois sommes

$$(50)\qquad \sum_0^{s-1}{}_l \left| \frac{g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\big] - g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}\big]}{\bar g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]} \right|,$$

$$(51)\qquad \sum_0^{s-1}{}_l \left| \frac{g^{1,0}\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}\big] - g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\big]}{\bar g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]} \right|,$$

$$(52)\qquad \sum_0^{s-1}{}_l \left| \frac{g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\big] - \dfrac{\left\{\begin{array}{l} \xi\big[\bar g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]\\ \quad -(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]\\ \quad +(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\,\dfrac{\{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]\}^2}{\xi\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]} + \dots \end{array}\right.}{\xi\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]}}{\bar g^{1,0}\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]} \right|$$

sont infiniment petites pour $\alpha \to \infty$, et que le produit

$$(53)\qquad
\begin{aligned}
&= \prod_0^{s-1}{}_l \, 1-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\xi^{0,1}\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi\big[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]}}{g^{1,0}\big[g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]}\\
&= \prod_0^{s-1}{}_l \, 1-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\xi^{0,1}\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha\big]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha-1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}{\xi\big[g\big[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha\big]\,|\,\theta_\alpha\big]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi\big[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\big]}
\end{aligned}
$$

$$= \prod_{0}^{s-1}{}_{l} \, 1 - (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha) \; \frac{\dfrac{\xi^{0,1}\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g\left[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[g\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)}}{\xi\left[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right] + \dfrac{\xi^{0,1}\left[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\left[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)}$$

$$= \prod_{0}^{s-1}{}_{l} \, 1 - (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha) \; \frac{\dfrac{\xi^{0,1}\left[g_{l+1}(x, \theta_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g\left[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[g\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)}}{1 + \dfrac{\dfrac{\xi^{0,1}\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\left[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]}{\xi\left[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\right]} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)}$$

est infiniment proche de 1.

Considérons d'abord la somme (50). Étant donné que les dénominateurs sont au moins égaux au nombre positif donné $M^{0,1}$, nous sommes ramenés à la considération de la somme

$$(50') \qquad \sum_{0}^{s-1}{}_{l} \left| g^{1,0}\left[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}\right] - g^{1,0}\left[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \bar{\theta}_{\alpha+1}\right] \right|.$$

Cette dernière somme ne peut pas dépasser $n_{\alpha+1} M^{1,1} \left| \theta_{\alpha+1} - \bar{\theta}_{\alpha+1} \right|$; en rappelant l'évaluation de $\left| \theta_{\alpha+1} - \bar{\theta}_{\alpha+1} \right|$ faite au paragraphe 20, on trouve que la somme est donc au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$. De la même façon, de la somme (51) on est ramené à la somme

$$(51') \qquad \sum_{0}^{s-1}{}_{l} \left| g^{1,0}\left[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \bar{\theta}_{\alpha+1}\right] - g^{1,0}\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1}\right] \right| \qquad (s < n_{\alpha+1});$$

de celle-ci, en rappelant l'évaluation de $\left| \bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) - g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \right|$ faite au paragraphe 20, on est ramené ensuite a la somme

$$M^{2,0} \frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}} \sum_{0}^{s-1}{}_{l} \xi\left[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}\right] \qquad (s < n_{\alpha+1}),$$

dont la valeur de, d'après le lemme du paragraphe 10, est au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$. De la somme (52) on est ramené à la somme

$$(52') \qquad \sum_{0}^{s-1}{}_{l} \left| g^{1,0}\left[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1}\right] - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \xi\left[\bar{g}\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right] \\ \quad - (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha) \xi^{0,1}\left[g\left[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right] \\ \quad + (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{\left\{\xi^{0,1}\left[g\left[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]\right\}^2}{\xi\left[g\left[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\right] \mid \theta_\alpha\right]} + \dots \end{array} \right\}}{\xi\left[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha\right]} \right|.$$

En tenant compte de (24^2) et de (41) on trouve que les termes de cette somme sont plus petits que ceux de

$$\sum_0^{s-1}{}_l (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 \left| \frac{M^{1,2}}{2} \cdot \frac{\left\{ M^{0,1}\left[\frac{1}{2}M^{0,1}N_\alpha^{2,0} + (2+M^{0,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\right] + 2(M^{1,1}+1)N_\alpha^{1,0}N_\alpha^{0,1} + 2(M^{0,1}+M^{1,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\right\}}{\xi[\bar g_l(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}\right|,$$

qui, à leur tour, sont au plus de l'ordre des termes de la somme

$$= \sum_0^{s-1}{}_l (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 \frac{n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}$$

$$= \sum_0^{s-1}{}_l \frac{(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2}{\xi[\bar g_l(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]+\dots}$$

$$< \frac{(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2}{1-|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|N_\alpha^{0,1}} \sum_s^{s-1}{}_0 \frac{1}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]}.$$

Dans le dernier membre, la première fraction est de l'ordre de $\frac{[N_\alpha^{1,0}]^2}{n_{\alpha+1}^2 n_\alpha}$ et la somme, d'après le lemme du paragraphe 13, est au plus de l'ordre de $n_{\alpha+1}$. La somme $(52')$ est donc au plus de l'ordre de $\frac{[N_\alpha^{1,0}]^2}{n_{\alpha+1}n_\alpha}$. En ce qui concerne enfin le produit (53), on est ramené à démontrer que la somme

$$(54)\quad \sum_1^{s-1}{}_l |\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha| \left| \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}\right|$$

est infiniment petite pour $\alpha\to\infty$ (¹). Pour démontrer cela remarquons d'abord que la somme (54) à considérer est inférieure où égale à

$$(54')\quad \sum_1^{s-1}{}_l |\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha| \left| \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}\right|$$

$$+\sum_1^{s-1}{}_l |\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha| \left| \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} \frac{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}\right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]} \{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]-\xi[\bar g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]\}\right|.$$

Développons la première des deux sommes de (54′) selon les puissances de $|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|$. Le terme du premier degré est donné par

$$\sum_l^{s-1}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\left\{\frac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}-\frac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}\right\}.$$

En rappelant (40), où l'on aura substitué x par $g_l(x,\bar\theta_{\alpha-1}|\theta_\alpha)$, on trouve que l'expression entre accolades est égale à

$$\equiv g^{1,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)\ \theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}$$

$$-\xi^{1,0}|g[g_l(x,\theta_{\alpha-1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha|\ \theta_\alpha]\frac{g^{0,1}[g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha]}$$

$$\equiv\frac{g^{1,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}-\xi^{1,0}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]|\theta_\alpha|$$

$$\times\frac{g^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\frac{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}\frac{1}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]}.$$

Dans le deuxième membre de l'inégalité précédente les fractions

$\frac{g^{1,1}[\bar g_l(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$ et $\frac{g^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$ sont bornées. $\frac{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\ \theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}$ est sensiblement égal à 1, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 21 concernant le rapport (44′). L'expression entre accolades est donc de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]}$. Le terme du premier degré est donc au plus de l'ordre de

$$|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|N_\alpha^{1,0}\sum_l^{s-1}\frac{1}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha]}.$$

En appliquant à $\xi(x,\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$ le lemme du paragraphe 13, on déduit que la sommation par rapport à l est de l'ordre de $n_{\alpha+1}$ au plus, $|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|$ étant d'autre part de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$ au plus; on peut en conclure que le terme de degré 1 est au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$.

En ce qui concerne les termes de degré supérieur du développement de la première somme de (54′), on trouve, en utilisant encore (40), qu'ils sont infiniment petits d'ordre supérieur par rapport au premier.

---

(1) Le produit (53) est en effet de la forme

$$\prod_0^{s-1}{}_l\,1-\frac{\varepsilon_l'\ \varepsilon_l''}{1+\varepsilon_l'}=\prod_0^{s-1}{}_l\frac{1+\varepsilon_l''}{1+\varepsilon_l'}=\frac{1+\varepsilon_0''}{1+\varepsilon_{s-1}'}\prod_1^{s-1}{}_l\frac{1+\varepsilon_0''}{1+\varepsilon_{l-1}'}=\frac{1+\varepsilon_l''}{1+\varepsilon_{s-1}'}\prod_1^{s-1}{}_l\,1+\varepsilon_l''-\varepsilon_{l-1}'+\dots.$$

Considérons maintenant la deuxième des sommes de (54'). On a

$$\left| \frac{\dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] \mid \theta_\alpha\big]}{\xi\big[g\big[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] \mid \theta_\alpha\big]}}{1 - \dfrac{\xi^{0,1}\big[g\big[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] \mid \theta_\alpha\big]}{\xi\big[g\big[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] \mid \theta_\alpha\big]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)} \right| < \frac{N_\alpha^{0,1}}{1 - N_\alpha^{0,1}(\bar{\theta}_{\alpha-1} - \theta_\alpha)},$$

le premier membre de cette inégalité est donc (§ 16) de l'ordre $N_\alpha^{1,0} n_\alpha$ au plus. $\dfrac{\xi\big[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha\big]}{\xi\big[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\big]}$ est sensiblement égal à 1, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 21 concernant le rapport (44'). En remarquant enfin que, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 20, l'expression

$$\begin{aligned} &\big| g\big[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] - \bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \big| \\ &\quad = \big| g\big[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] - g\big[\bar{g}_l(x, \theta_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha\big] \big| \end{aligned}$$

est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$ au plus, on trouve que

$$\big| \xi\big[g\big[g_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha\big] \mid \theta_\alpha\big] - \xi\big[g_{l+1}(x, \theta_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha\big] \big|$$

est au plus de l'ordre de $\dfrac{(N_\alpha^{1,0})^2}{n_\alpha n_{\alpha+1}^2}$. La deuxième somme de (54') est en conclusion au plus de l'ordre de

$$(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha) \frac{[N_\alpha^{1,0}]^2}{n_{\alpha+1}^2} \sum_1^{s-1} \frac{1}{\xi\big[g_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha\big]},$$

ou encore (en appliquant à la fonction $\xi(x, \theta_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$ le lemme du paragraphe 13), au plus de l'ordre de $\dfrac{[N_\alpha^{1,0}]^2}{n_{\alpha-1}^2 n_\alpha}$. Il en est alors certainement de même de la somme (51).

On peut conclure finalement que le rapport (46) entre les dénominateurs de même indice est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$ au plus.

De ce qu'on a démontré dans ces deux derniers paragraphes concernant les différences (48) et les rapports (46) on peut conclure, d'après ce qu'on a dit au paragraphe précédent, que le *rapport* (44) *est égal à* 1, *à une quantité près, de l'ordre de* $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$ *au plus.*

23. Nous avons vu (§ 14) qu'on peut choisir $N_\alpha^{1,0}$ de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^*$; nous avons vu d'autre part (§ 9) qu'on peut choisir ε_α^* de l'ordre de $\frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}$. Du résultat énoncé à la fin du paragraphe précédent on déduit alors qu'on a deux inégalités

$$\xi(x \mid \theta_\alpha) \left(1 - a \varepsilon_\alpha^* \frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}\right) < \xi(x \mid \theta_{\alpha+1}) < \xi(x \mid \theta_\alpha) \left(1 + a \varepsilon_\alpha^* \frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}\right), \tag{55}$$

a étant une constante, qu'on peut choisir indépendamment de α.

On tire immédiatement de (55) que *la succession*

$$\xi(x\,|\,\theta_1),\quad \xi(x\,|\,\theta_2),\quad \ldots,\quad \xi(x\,|\,\theta_\alpha),\quad \ldots \tag{15}$$

converge vers une fonction continue et positive $\xi(x\ \Theta)$. *La transformation infinitésimale* $\xi(x\,|\,\Theta)\frac{df}{dx}$ *engendre alors*, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 7, *la transformation* $T(\Theta)$, *d'équation*

$$x_1 = g(x\,|\,\Theta).$$

En considérant maintenant θ comme une variable, nous avons une fonction $\xi(x, \theta)$ des deux variables x et θ; *la famille* ∞^1 *de transformations infinitésimales* $\xi(x, \theta)\frac{df}{dx}$ *nous donne la solution du problème traité dans ce Mémoire.*

CHAPITRE IV.

24. Pour compléter la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1, nous devons démontrer que la fonction $\xi(x, \theta)$ est continue par rapport à θ.

Pour toute valeur de θ, qui correspond à une transformation de module irrationnel, la continuité résulte immédiatement de la démonstration donnée au paragraphe précédent. *Il nous reste donc à démontrer que* $\xi(x, \theta)$ *est continue pour toute valeur de* θ *qui correspond à une transformation de module rationnel* $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$.

Comme nous avons fait au paragraphe 4, nous indiquons par $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$, $\frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$ les réduites du développement de $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$. Si k est le module d'une transformation de la famille de paramètre θ infiniment proche de θ_α, les $\alpha + 1$ premières réduites de k sont données par les α premières réduites de $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ et par $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ elle-même; la $(\alpha + 2)^{\text{ième}}$ réduite sera donnée par

$$\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} = \frac{m_{\alpha-1} + a_\alpha m_\alpha}{n_{\alpha-1} + a_\alpha n_\alpha},$$

où l'entier a_α *doit être considéré comme infiniment grand.* Indiquons par $\frac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}}$, $\frac{m_{\alpha+3}}{n_{\alpha+3}}, \ldots$ les réduites successives (éventuelles) de k et par $\theta_{\alpha+1}, \theta_{\alpha+2}, \theta_{\alpha+3}, \ldots$ les valeurs du paramètre, qui correspondent, respectivement, aux valeurs $\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}, \frac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}}, \frac{m_{\alpha+3}}{n_{\alpha+3}}, \ldots$ du module.

Démontrons d'abord qu'on a

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1; \tag{56}$$

il est à peine nécessaire de remarquer que, contrairement à ce que nous faisions aux chapitres II et III, nous considérons ici l'indice α comme fixe. D'autre part, $(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$ sera infiniment petite, de l'ordre de $\frac{1}{a_\alpha}$.

Pour établir (56), nous allons reprendre les considérations du chapitre précédent et démontrer que, pour $a_\alpha \to \infty$, l'expression (47) devient infiniment petite, et que d'autre part, le rapport (46) tend vers 1.

Considérons d'abord l'expression (47), en utilisant encore l'inégalité (48). Nous trouvons d'abord que le premier et le troisième terme du deuxième membre de cette inégalité sont infiniment petits pour $\alpha \to \infty$. En ce qui concerne le deuxième terme du deuxième membre, on a d'abord que ce terme est au plus de l'ordre de

$$M^{1,1} \frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha} \frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}) | \theta_{\alpha+1}]}{n_{\alpha+1}};$$

$\xi[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}) | \theta_{\alpha+1}]$ est d'autre part de l'ordre de $\xi[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}) | \theta_\alpha]$, d'après les résultats du chapitre précédent, et $\xi[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}) | \theta_\alpha]$ est (§ 15) au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Le terme considéré est donc au plus de l'ordre de $M^{1,1} \frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha} \frac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$; il est donc lui aussi infiniment petit pour $\alpha \to \infty$. Nous pouvons alors conclure que l'expression (47) est infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$.

Pour démontrer que le rapport (46) tend vers 1 pour $a_\alpha \to \infty$, nous devrons faire voir que les sommes (50′), (51′) et (52′) deviennent infiniment petites et que le produit (53) tend vers 1. En ce qui concerne les sommes (50′) et (52′), cela résulte déjà des évaluations faites au paragraphe 22. En ce qui concerne d'autre part le produit (53), nous sommes ramenés à démontrer que la somme

$$\sum_1^{s-1} |\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha| \times \left| \frac{\xi^{0,1}[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{1 - \frac{\xi^{0,1}[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) | \theta_\alpha]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)} - \frac{\xi^{0,1}[g[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha), \theta_\alpha] | \theta_\alpha]}{1 - \frac{\xi^{0,1}[g[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha), \theta_\alpha] | \theta_\alpha]}{\xi[g[\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha), \theta_\alpha] | \theta_\alpha]} (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)}}{\xi[\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha]} \right|$$

devient infiniment petite.

Pour $a_\alpha \to \infty$, $\bar{g}_{l+1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha)$ et $g[\bar{g}_l(x, \theta_{\alpha+1} | \theta_\alpha), \theta_\alpha]$ sont infiniment proches; chaque fraction dans la somme précédente est donc infiniment petite; chaque terme de la somme est par conséquent infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $|\bar{\theta}_{\alpha-1} - \theta_\alpha| \left(\text{à } \frac{1}{n_{\alpha+1}}\right)$. En remarquant que le nombre s des termes est plus petit que $n_\alpha + 1$, on conclut que la somme est infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$.

25. Pour démontrer l'affirmation contenue dans (56), il nous reste à étudier

la somme (51′). Cette étude occupera ce paragraphe et les deux suivants. La somme en question est plus petite que

$$M^{2.0}\sum_{l}^{s-1}\left|\bar{g}_l(x,\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)-g_l(x,\theta_{\alpha+1})\right| \qquad (s\leq n_{\alpha+1});$$

pour $a_\alpha \to \infty$ le nombre des termes, $s \leq n_{\alpha+1} = a_\alpha n_\alpha + n_{\alpha-1}$, est infiniment grand de l'ordre de a_α au plus; pour démontrer que la somme est infiniment petite il s'agit alors de montrer que l'expression

$$\left|\bar{g}_l(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)-g_l(x,\theta_{\alpha+1})\right| \qquad (l=1,2,\ldots,s-1) \tag{43}$$

est infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$, ce qui revient à dire que la fonction, qui caractérise la transformation très petite $T^l(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$, est infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$. Nous allons déduire ici ce dernier résultat d'un lemme, que nous démontrerons dans les deux paragraphes suivants, d'après lequel on peut supposer que la fonction, qui caractérise la transformation très petite $\bar{T}^{-n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, est, pour $a_\alpha \to \infty$, infiniment petite d'ordre supérieur à $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$. Remarquons que, d'après l'évaluation faite au paragraphe 20, la fonction qui caractérise $T(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-1}(\theta_{\alpha+1})$ est, pour $a_\alpha \to \infty$, de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$ au plus et que, t étant un entier donné, il en est *a priori* de même, d'après l'évaluation faite au paragraphe 20, de la fonction, qui caractérise $\bar{T}^t(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-t}(\theta_{\alpha+1})$.

Ayant posé

$$l = bn_\alpha + t \qquad (t \leq n_{\alpha-1}),$$

on a

$$\begin{aligned}\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1}) = &\left\{\prod_{0}^{b-1}{}_r T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[T^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\right\}\\ &\times T^{n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1})\left[\bar{T}_r(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-t}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1}).\end{aligned} \tag{57}$$

$T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$ étant engendrée par la transformation infinitésimale $\xi(x|\theta_{\alpha+1})\frac{df}{dx}$, on a, en rappelant (25),

$$g^{1,0}_{n_\alpha r}[g_{-n_\alpha r}(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}] = \frac{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}{\xi[g_{-n_\alpha r}(x,\theta_{\alpha+1})|\theta_{\alpha+1}]};$$

$g^{1,0}_{n_\alpha r}[g_{-n_\alpha r}(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}]$ est donc au plus égal au rapport entre le maximum et le minimum de la fonction $\xi(x|\theta_{\alpha+1})$. D'après les résultats du chapitre précédent $\xi(x|\theta_{\alpha+1})$ est, quel que soit x, de l'ordre de $\xi(x|\theta_\alpha)$, le rapport en question est alors de l'ordre du rapport entre le maximum et le minimum de $\xi(x|\theta_\alpha)$; ce dernier rapport est évidemment indépendant de a_α. On voit

alors, en rappelant la formule donnée au paragraphe 7 du premier Mémoire, que la fonction qui caractérise

$$T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[\overline{T}^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$$

est infiniment petite, pour $a_\alpha > \infty$, d'ordre supérieur à $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$, si tel est le cas pour la fonction qui caractérise $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$. Au produit entre accolades, de b a_α facteurs, il correspond alors une fonction infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$.

A la transformation

$$T^{n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1})\left[\overline{T}^{t}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-t}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1}),$$

il doit correspondre d'autre part, d'après ce que nous venons de dire, une fonction infiniment petite de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$. On peut donc conclure finalement qu'à la transformation $\overline{T}^{t}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-t}(\theta_{\alpha+1})$ correspond une fonction infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$.

26. Nous devons maintenant combler la lacune dans la déduction du paragraphe précédent.

La famille $T^{n_\alpha}(\theta\,|\,\theta_\alpha)$, de même que la famille $T(\theta\,|\,\theta_\alpha)$, n'est pas complètement déterminée, du fait de l'indétermination, qui intervient dans le choix de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; nous voulons montrer maintenant que, *pour a_α infiniment grand, on peut choisir $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de façon que la fonction, qui caractérise $\overline{T}^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, soit infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$.*

Nous allons d'abord reconnaître d'une façon plus précise quelle est l'indétermination, qui intervient dans le choix de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; d'après ce qu'on a vu au paragraphe 6, on peut ajouter à cette fonction une solution $\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de l'équation

$$\int_0^1 \frac{\xi^{0,1****}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = 0. \tag{58}$$

De cette équation, en dérivant par rapport à x, on tire

$$\frac{\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = \frac{\xi^{0,1****}[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]};$$

cette relation nous montre que $\frac{\xi^{0,1****}[g(x,t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$, considérée comme une fonction de t, est périodique de période 1.

Il est facile de reconnaître que cette fonction possède une deuxième période.

Lorsque t varie, le point $g(x, t|\theta_\alpha)$ parcourt la courbe fermée C; la fonction $\frac{\xi^{0,1****}[g(x,t|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[g(x,t|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}$ prend donc la même valeur pour deux valeurs différentes de t qui correspondent à un même point de la courbe. Pour déterminer la période en question, il suffit alors de remarquer que la transformation $T(\theta_\alpha)$, qui a un module égal à $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$, transforme le point x dans le point $g(x, 1|\theta_\alpha) \equiv g(x, \theta_\alpha)$; à cette transformation correspond donc un intervalle unitaire pour la variable t; à un tour complet de C il doit correspondre alors l'intervalle $\frac{1}{\frac{m_\alpha}{n_\alpha}} = \frac{n_\alpha}{m_\alpha}$ pour la variable t.

La fonction $\frac{\xi^{0,1****}[g(x,t|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[g(x,t|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}$ a donc les deux périodes 1 et $\frac{n_\alpha}{m_\alpha}$; elle a alors la période $\frac{1}{m_\alpha}$. Par conséquent, l'équation (58) équivaut à

$$\int_0^{\frac{1}{m_\alpha}} \frac{\xi^{0,1****}[g(x,\tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha]}\, d\tau = 0. \tag{58'}$$

En rappelant d'autre part que les valeurs de $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$ doivent être de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi(x|\theta_\alpha)$ au plus, on arrive à conclure que *l'indétermination dans le choix de la fonction* $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$ *consiste en ce qu'on peut lui ajouter une solution arbitraire* $\xi^{0,1****}(x|\theta_\alpha)$ *de* (58'), *qui soit toutefois de l'ordre de* $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi(x|\theta_\alpha)$ *au plus.*

Pour arriver à démontrer le résultat énoncé en italique au commencement de ce paragraphe nous devons étudier aussi, d'une façon préliminaire, les deux transformations très petites, qui transforment les points de la courbe de la même façon, respectivement, que $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et $\bar{T}^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$, et que nous allons appeler les *transformations géométriques* $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$. La transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ coïncide avec la transformation $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$; pour $a_\alpha \to \infty$ son équation est donnée, d'après ce qu'on a montré au commencement du paragraphe 12, par

$$x' = x + \sum_1^{n_\alpha} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)+\ldots = x + \frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(x|\theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)+\ldots. \tag{59}$$

Considérons ensuite la transformation géométrique $\bar{T}^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)$. Cette transformation est donnée par le groupe g_1 engendré par

$$\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)\frac{dt}{dx} = \{\xi(x|\theta_\alpha) + (\bar{\theta}_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)+\ldots\}\frac{dt}{dx}$$

lorsque, dans g_1, on donne au paramètre t une valeur convenable infiniment petite. De l'équation (59) de la transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et de ce

que $T^{n_\alpha}(\theta)$ et $T^{n_\alpha}(\theta\ \theta_\alpha)$ sont tangentes on déduit que, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, dt est donné par $\frac{n_\alpha}{d_\alpha}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$. La valeur que la fonction, qui caractérise $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$, prend en un point $\mathbf{x}$ est donné par dt, qui multiplie la valeur de l'expression

$$\xi(x,\,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)=\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)+\dots$$

en un point convenable compris entre $\mathbf{x}$ et son transformé par la transformation géométrique $\bar T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$; la distance entre ce point et le point $\mathbf{x}$ est évidemment au plus de l'ordre de $\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$. La valeur en question est donc exprimée par

$$\xi(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)+(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\left[\xi^{0,1}(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)+\rho\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi^{1,0}(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)\xi(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)+\dots\right],$$

dans cette expression ρ représente un coefficient borné, qui ne dépend évidemment pas du choix de la fonction $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; les termes négligés sont infiniment petits pour $a_\alpha\to\infty$.

L'équation de la transformation géométrique $\bar T^{n_\alpha}(\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned}(60)\qquad x'=x&+\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\\&+\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\left[\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)+\rho\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\right.\\&\left.+\frac{dt-\frac{n_\alpha}{d_\alpha}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}{\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+\dots\right](\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2.\end{aligned}$$

Considérons enfin la transformation $\bar T^{n_\alpha}(\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$; indiquons par

$$(61)\qquad x'=x+\mu(x\,|\,\theta_\alpha,\,\bar\theta_{\alpha+1})(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2$$

l'équation de cette transformation; nous allons évaluer l'ordre de $\mu(x\,|\,\theta_\alpha,\,\theta_{\alpha-1})$. On a vu au paragraphe 20 que la fonction, qui caractérise $\bar T(\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-1}(\theta_{\alpha+1})$, est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2$; d'après les résultats du paragraphe 7 du premier Mémoire, la fonction, qui caractérise $\bar T^{n_\alpha}(\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, est alors au plus de l'ordre de

$$n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\sum_0^{n_\alpha-1}{}_r\,g_r^{1,0}[g_{-r}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}].$$

Lorsque $a_\alpha \to \infty$, $g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha-1}]$ tend vers $g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$; l'expression précédente tend donc vers

$$n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r\, g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$$

$$= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r \frac{1}{g_{-r}^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

$$= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r \frac{1}{g_r^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

$$< n_\alpha^2 N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{1}{d_\alpha \underline{M}^{0,1}} \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r \frac{g^{0,1}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha, \theta_\alpha)]}{g_r^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

$$= n_\alpha^2 N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{\xi(x \mid \theta_2)}{d_\alpha \underline{M}^{0,1}}.$$

On peut alors conclure que $\mu(x \mid \theta_\alpha, \theta_{\alpha-1})$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha^2 N_\alpha^{1,0} \xi(x \mid \theta_\alpha)$.

Supposons maintenant qu'on ajoute à $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ une solution $\xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha)$ de l'équation (58′); d'après (60), on devra alors ajouter, à la fonction qui représente la transformation géométrique $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, la fonction

$$\left\{ \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha) + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha) \right\} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2, \tag{62}$$

σ étant un coefficient convenable, qui dépend de θ_α et de $a_{\alpha-1}$ (1). A la fonction $\mu(x \mid \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1})(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$, qui représente $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, on devra par conséquent ajouter la valeur

$$\left\{ \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}[g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha] + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi[g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha] \right\} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2,$$

que la fonction (62) prend, au point $g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1})$, transformé de x par $T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$.

Lorsque $a_\alpha \to \infty$, $g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1})$ tend vers x; la valeur considérée tend vers

$$\left\{ \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha) + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha) \right\} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2.$$

Nous pouvons alors conclure que, à l'indétermination dans le choix de $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ correspond une indétermination pour $\mu(x \mid \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha-1})$; on peut ajouter à cette fonction une expression de la forme

$$\frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha) + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha),$$

---

(1) On doit considérer le terme $\sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha)$ du fait qu'on ne peut pas exclure, *a priori*, que dt dépende du choix de $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$.

$\xi^{0,1***}(x|\theta_\alpha)$ étant une solution de (58'), dont les valeurs sont de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi(x|\theta_\alpha)$ au plus.

27. Nous allons donner une équation symbolique, qui doit être satisfaite, pour $a_\alpha \to \infty$, par la transformation très petite $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$. De (57), en faisant $l = n_{\alpha+1}$, on tire

$$(63)\quad \left\{\prod_0^{a_\alpha-1} T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[\bar{T}^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\right\}T^{n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$$
$$\times\left[\bar{T}^{n_{\alpha-1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_{\alpha-1}}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1}) = \bar{T}^{n_{\alpha+1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_{\alpha+1}}(\theta_{\alpha+1}) = I.$$

A priori, pour $\alpha_\alpha \to \infty$, la fonction, qui caractérise $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ est infiniment petite, de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$ au plus; en répétant le raisonnement développé au paragraphe 25 on trouve par conséquent que la fonction, qui caractérise la transformation indiquée symboliquement par l'expression entre accolades dans (63), doit être infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{a_\alpha}$ au plus. La fonction, qui caractérise

$$T^{n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\left[\bar{T}^{n_{\alpha-1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_{\alpha-1}}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1}),$$

sera infiniment petite de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$. On peut alors négliger cette transformation et l'on trouve de la sorte

$$(63')\qquad \prod_0^{a_\alpha-1} T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[\bar{T}^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1}) = I.$$

Il est nécessaire de transformer ultérieurement l'équation, que nous venons d'obtenir. Remarquons d'abord que les deux fonctions, qui caractérisent respectivement la transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, dont le module est égal à $n_\alpha\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} - m_\alpha = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$, et la transformation de même module engendrée par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$, se réduisent, pour $a_\alpha \to \infty$, à une même fonction,

$$\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(x|\theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha),$$

à des quantités près, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$. De même, les dérivées premières de ces deux fonctions se réduisent à $\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi^{1,0}(x|\theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$, à des quantités près, infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$.

On déduit de cette remarque que, pour $r < a_\alpha$, les deux fonctions, qui caractérisent respectivement la transformation géométrique très petite $T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$, de module $r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$, et la transformation de même module engendré par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ coïncident, à des quantités près qui sont infiniment petites pour $a_\alpha > \infty$. Les dérivées premières de ces deux fonctions coïncident de même.

On voit alors qu'on peut substituer, dans (63'), à la transformation $T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$, la transformation de module $r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$, engendrée par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$; on obtient ainsi, pour $T^{n_\alpha}(\bar\theta_{\alpha+1}|\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, l'équation symbolique dont nous avons parlé au commencement du paragraphe (équation que d'ailleurs nous renonçons à donner explicitement, pour ne pas introduire de nouveaux symboles). Ce qui nous intéresse, c'est de donner l'équation pour $\mu(x|\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1})$, qui corresponde à cette équation symbolique. Remarquons pour cela que $T(\theta_\alpha)$, de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$, est engendrée par le groupe g_1 de la transformation infinitésimale $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ lorsqu'on fait $t=1$; on obtiendra donc la transformation du même groupe de module $r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$ en faisant $t = r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} : \frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; ce nombre est sensiblement égal à $\frac{(-1)^{\alpha+1}}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}$. L'équation de cette transformation est alors donnée par

$$x_1 = g\left[x, \frac{(-1)^{\alpha+1}}{m_\alpha}\frac{r_\alpha}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right].$$

En utilisant une fois de plus les résultats du paragraphe 7 du premier Mémoire on aura donc, pour $\mu(x|\theta_\alpha, \bar\theta_\alpha)$, l'équation

$$\sum_0^{a_\alpha-1}{}_r \frac{\mu\left[g\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1}\right]}{g^{1,0}\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}, \theta_\alpha\right)} = \xi(x|\theta_\alpha)\sum_0^{a_\alpha-1}{}_r \frac{\mu\left[g\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]} = 0.$$

Divisons cette équation par $\xi(x|\theta_\alpha)$; en outre, si α est impair et $(-1)^\alpha = -1$, remplaçons x par $g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\middle|\frac{a_\alpha-1}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$ et r par $-r+a_\alpha-1$. Nous obtenons de la sorte l'équation

$$\sum_0^{a_\alpha-1}{}_r \frac{\mu\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]} = 0.$$

i étant un entier très grand, considérons, à côté de cette équation, celles qu'on obtient en y substituant x par $g\left(x, \frac{j}{i}\frac{1}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$, où $j = 1, 2, \ldots, i-1$. Si nous additionnons ces équations et divisons ensuite par $\frac{1}{m_\alpha}\frac{1}{a_\alpha}\frac{1}{i}$ nous trouvons

$$\sum_{0}^{i-1}{}_{j}\sum_{0}^{a_\alpha-1}{}_{r}\frac{1}{m_\alpha}\frac{1}{a_\alpha}\frac{1}{i}\frac{\mu\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{ri+j}{a_\alpha i}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{ri+j}{a_\alpha i}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]} = 0.$$

Le premier membre est une somme de Riemann de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{m_\alpha}} \frac{\mu\left[g(x, \tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g(x, \tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha\right]}\, d\tau;$$

du fait que cette relation est valable pour i infiniment grand, on déduit

$$\int_0^{\frac{1}{m_\alpha}} \frac{\mu\left[g(x, \tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g(x, \tau|\theta_\alpha)|\theta_\alpha\right]}\, d\tau = 0.$$

Cette équation pour la fonction $\mu(x|\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1})$ est égale à l'équation (58′), à laquelle doit satisfaire la fonction $\xi^{0,1****}(x|\theta_\alpha)$. Nous sommes arrivés au point essentiel de la déduction développée dans les deux derniers paragraphes : Additionnons à la fonction $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$ la fonction $\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\mu(x|\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1})$, qui représente une solution de (58′) et dont les valeurs sont, comme l'on voulait, de l'ordre $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi(x|\theta_\alpha)$ au plus; d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe précédent, la fonction $\mu(x|\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1})$ est alors transformée en $\sigma\xi(x|\theta_\alpha)$; comme cette fonction doit être encore une solution de (58′) on voit, *a posteriori*, que $\sigma = 0$.

Du résultat obtenu on déduit immédiatement le lemme énoncé au commencement du paragraphe précédent.

On a donc enfin démontré que

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}{\xi(x|\theta_\alpha)} = 1.$$

28. Pour démontrer que $\xi(x, \theta)$ est continue nous devons successivement considérer le rapport $\frac{\xi(x|\theta_{\alpha+2})}{\xi(x|\theta_{\alpha+1})}$; nous allons voir dans ce paragraphe qu'*on a*

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x|\theta_{\alpha+2})}{\xi(x|\theta_{\alpha+1})} = 1. \tag{64}$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, le rapport en question est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{N_{\alpha+1}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$, $N_{\alpha+1}^{1,0}$ étant une borne pour la

valeur absolue de $\xi^{1,0}(x\ \theta_{\alpha-1})$. Nous allons reprendre ici les considérations du paragraphe 14 et reconnaître que, dans les conditions actuelles, on peut choisir la borne $N_{\alpha-1}^{1,0}$ de façon que le rapport $\frac{N_{\alpha-1}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ soit infiniment petit pour $a_\alpha \to \infty$. La détermination d'une borne pour $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_{\alpha-1})$ revient, d'après ce que nous avons vu au paragraphe cité, à celle d'une borne pour les sommes

$$(29^{\alpha+1}) \qquad \sum_{0}^{i} \frac{g^{2,0}[\,g_l(x,\theta_{\alpha-1}),\theta_{\alpha-1}\,]}{g^{1,0}[\,g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\,]}\,\xi[\,g_l(x,\theta_{\alpha-1})\ \theta_{\alpha-1}\,] \qquad (i=n_{\alpha+1}).$$

Nous allons d'abord montrer que, pour $a_\alpha \to \infty$, les sommes

$$(27^{\alpha+1}) \qquad \sum_{0}^{i} \frac{g^{2,0}[\,g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\,]}{g^{1,0}[\,g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\,]}\,\gamma_\alpha[\,g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\,] \qquad (i<n_{\alpha+1})$$

sont infiniment petites; par une déduction tout à fait analogue à celle du paragraphe 14, on voit que ces sommes sont au plus de l'ordre de

$$\frac{g_i^{1,0}[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}\,]}{g_i^{1,0}(x,\theta_{\alpha+1})}-1.$$

On a alors

$$(65) \qquad \frac{g_i^{1,0}[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha-1}),\theta_{\alpha-1}\,]}{g_i^{1,0}(x,\theta_{\alpha+1})}=\frac{\xi(x\ \theta_{\alpha+1})}{\xi[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}\,]}\,\frac{\xi[\,g_{n_{\alpha-1}}(x,\theta_{\alpha-1}),\theta_{\alpha+1}\,]}{\xi[\,g_i(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}\,]}.$$

D'après (56) on peut substituer au premier facteur du second membre de (65)

$$\frac{\xi(x\ \theta_\alpha)}{\xi[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_\alpha\,]}=1-\frac{\xi[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_\alpha\,]-\xi(x\ \theta_\alpha)}{\xi[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_\alpha\,]},$$

en faisant une erreur infiniment petite. Le numérateur de la fraction au second membre de cette dernière équation ne peut certainement dépasser $N_\alpha^{1,0}\gamma_\alpha(x\ \theta_{\alpha-1})$: il est donc, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe 10, au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}\frac{1}{m_{\alpha-1}}\xi(x\ \theta_\alpha)$. La fraction considérée est donc au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{m_\alpha}$, sa valeur est donc infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$, on conclut alors que le premier facteur $\frac{\xi(x\ \theta_{\alpha+1})}{\xi[\,g_{n_\alpha}(x,\theta_{\alpha-1})\ \theta_{\alpha-1}\,]}$ du deuxième membre de (65) est infiniment proche de 1. On peut démontrer, d'une façon analogue, qu'il en est de même du deuxième facteur. Il résulte alors, comme on l'avait annoncé, que les sommes $(29^{\alpha+1})$ sont infiniment petites pour $a_\alpha \to \infty$.

En rappelant (16) et (26) on voit qu'on a

$$(30^{\alpha+1}) \qquad \frac{\dfrac{\xi[\,g_l(x,\theta_{\alpha-1})\ \theta_{\alpha-1}\,]}{\gamma_\alpha[\,g_l(x,\theta_{\alpha-1})\ \theta_{\alpha-1}\,]}}{\dfrac{\xi(x\ \theta_{\alpha-1})}{\gamma_\alpha(x\ \theta_{\alpha-1})}}-\frac{\dfrac{\xi[\,g_l(x,\theta_{\alpha-1})\ \theta_{\alpha-1}\,]}{\xi(x,\theta_{\alpha+1})}}{\dfrac{\gamma_\alpha[\,g_l(x,\theta_{\alpha+1})\ \theta_{\alpha+1}\,]}{\gamma_\alpha(x\ \theta_{\alpha-1})}}-\frac{g_l^{1,0}(x,\theta_{\alpha-1})}{g_l^{1,0}(x,\theta_{\alpha+1})} \qquad (l<n_{\alpha+1}),$$

x^* étant un point convenable dans l'intervalle $(x, g_{\alpha_x}(x, \theta_{x-1}))$. On a d'autre part

$$\frac{g_l^{1,0}(x, \theta_{x-1})}{g_l^{1,0}(x^*, \theta_{x-1})} = \frac{\xi(x^* \mid \theta_{x-1})}{\xi(x \mid \theta_{x+1})} \frac{\xi[g_l(x, \theta_{x+1}) \mid \theta_{x+1}]}{\xi[g_l(x^*, \theta_{x+1}) \mid \theta_{x+1}]}.$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour le deuxième membre de (65) on trouve que le deuxième membre de la dernière relation est infiniment proche de 1 pour $a_x \to \infty$. Le rapport (30^{x-1}) est alors infiniment proche de 1 pour $a_x \to \infty$. On en déduit

$$\xi[g_l(x, \theta_{x+1}) \mid \theta_{x+1}] = \frac{\xi(x \mid \theta_{x+1})}{\gamma_x(x \mid \theta_{x-1})} \gamma_x[g_l(x, \theta_{x+1}) \mid \theta_{x+1}][1 + \rho_l \varepsilon(a_x)],$$

$\varepsilon(a_x)$ étant une quantité infiniment petite pour $a_x \to \infty$ et ρ_l étant un facteur (qui dépend aussi de x et de a_x) qui reste borné.

Si l'on introduit dans (29^{x-1}) l'expression obtenue pour $\xi[g_l(x, \theta_{x-1}) \mid \theta_{x-1}]$ on trouve

$$\frac{\xi(x \mid \theta_{x+1})}{\gamma_x(x \mid \theta_{x-1})} \left\{ \sum_0^{s-1} \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{x+1}), \theta_{x+1}]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_{x-1}), \theta_{x-1}]} \gamma_x[g_l(x, \theta_{x-1}) \mid \theta_{x-1}] \right\}$$
$$+ \frac{\xi(x \mid \theta_{x+1})}{\gamma_x(x \mid \theta_{x+1})} \varepsilon(a_x) \sum_0^{s-1} \rho_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{x+1}), \theta_{x+1}]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_{x+1}), \theta_{x+1}]} \gamma_x[g_l(x, \theta_{x+1}) \mid \theta_{x-1}].$$

Dans le premier des deux termes de cette expression on trouve le produit de la fraction $\frac{\xi(x \mid \theta_{x-1})}{\gamma_x(x \mid \theta_{x-1})}$ (qui, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 14, est de l'ordre de n_{x-1}) par une somme qui, d'après ce que nous venons de voir dans ce paragraphe, est infiniment petite pour $a_x \to \infty$. Dans le deuxième terme on trouve la même fraction $\frac{\xi(x \mid \theta_{x-1})}{\gamma_x(x \mid \theta_{x+1})}$, qui est multipliée par le facteur infiniment petit $\varepsilon(a_x)$ et par une somme qui, du fait qu'on a

$$\sum_0^{s-1} \mid \gamma_x[g_l(x, \theta_{x+1}) \mid \theta_{x+1}] \mid < 1,$$

reste bornée en valeur absolue. On conclut alors, en raisonnant comme au paragraphe 14, qu'on peut donner une borne pour la valeur absolue de $\xi^{1,0}(x \mid \theta_{x-1})$ de façon que, pour $a_x \to \infty$, le rapport de cette borne à n_{x-1} soit infiniment petit. La relation (64) s'en déduit immédiatement.

29. Au paragraphe précédent on a utilisé le fait que

$$\lim_{a_x \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{x-1})}{\xi(x \mid \theta_x)} = 1$$

pour démontrer que

$$\lim_{a_x \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{x-2})}{\xi(x \mid \theta_{x-1})} = 1.$$

On a alors aussi

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+2})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1.$$

En utilisant maintenant ce dernier résultat, on peut démontrer, par un raisonnement tout à fait semblable à celui du paragraphe précédent, qu'on a aussi

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+3})}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+2})} = 1,$$

et par conséquent,

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+3})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1.$$

On peut continuer par induction. On pourra alors choisir une valeur de l'indice $\alpha' > \alpha$, qui soit infiniment grande pour $a_\alpha \to \infty$ et telle que

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha'})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1.$$

En désignant par θ une valeur du paramètre telle que la valeur correspondante k du module admet $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ parmi ses réduites, on a d'autre part, d'après les résultats du chapitre précédent,

$$\lim_{\alpha' \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta)}{\xi(x \mid \theta_{\alpha'})} = 1.$$

On déduit des deux dernières relations que le rapport $\frac{\xi(x \mid \theta)}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}$ tend vers 1 lorsque $a_\alpha \to \infty$. Cette dernière relation démontre la continuité de la fonction $\xi(x, \theta)$ au point θ_α.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-NEUVIÈME.

Pages.

Contribution à l'étude théorique des fluides compressibles (écoulements transsoniques, ondes de choc), par M. *Henri Cabannes*..... 1

Vers un théorème de Picard global, par M. *Daniel Dugué*..... 65

Quelques problèmes sur les produits d'inversion, par M. *René Lagrange*. 83

Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, par M. *René Thom*..... 109

Recouvrements de surfaces de Riemann, par M. *L. Fourès*..... 183

Complément à l'étude des processus de Markoff, par M. *Paul Lévy*..... 203

Quelques applications du calcul fonctionnel à la mécanique rationnelle, par M. *Henri Pailloux*..... 213

Sur les courbes définies à la surface du tore par des équations admettant un invariant intégral, par M. *Taro Ura*..... 259

Sur les fonctions fuchsiennes de deux variables complexes, par M. *Michel Hervé*... 277

Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné et plus particulièrement de celles du troisième ordre, par *M. André Marchaud*..... 303

Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, par M. *Arrigo Finzi*..... 370

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

141210-53

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΤΕΩΜΕΤΡΕΙ